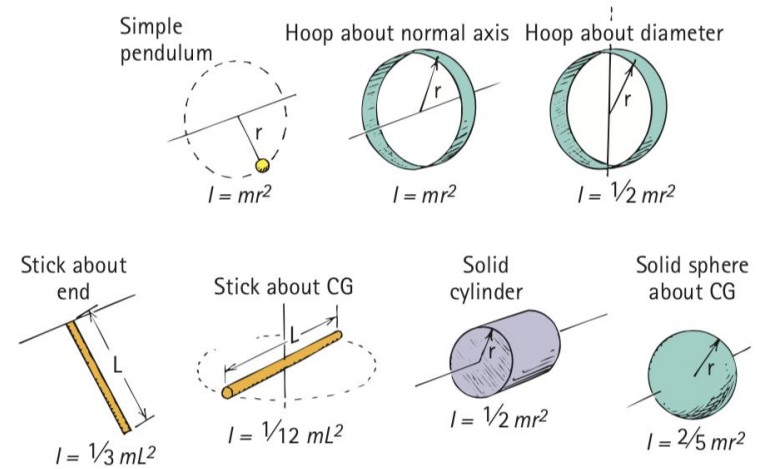
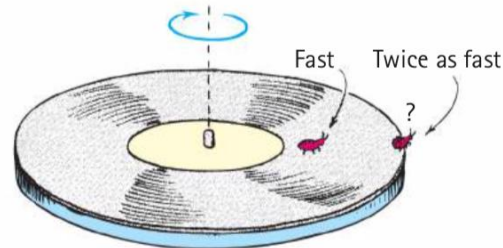
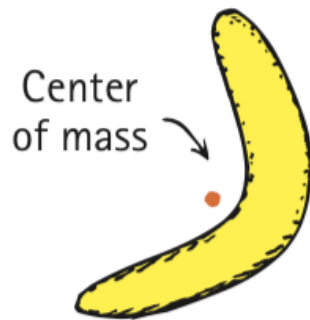


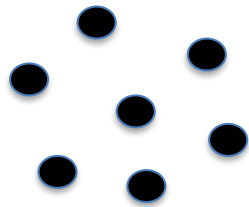
Wykład 6

Ruch obrotowy bryły sztywnej, moment bezwładności

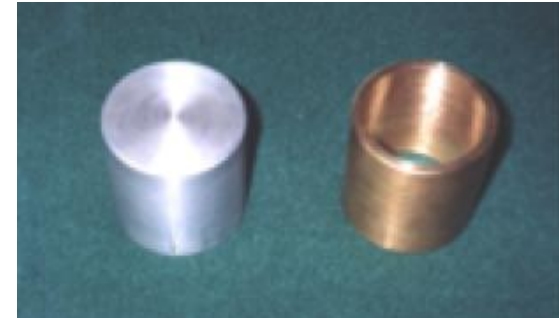


Bryła sztywna

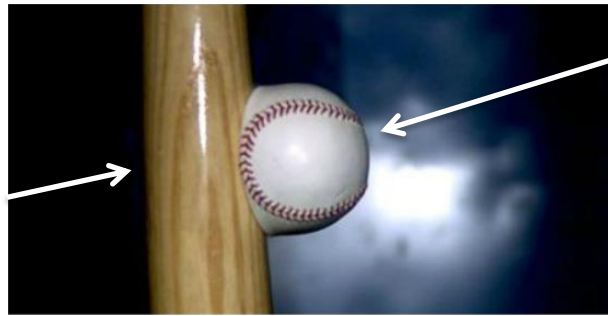
Bryła sztywna to ciało złożone z cząstek (punktów materialnych), które nie mogą się względem siebie przemieszczać. Siły utrzymujące punkty w stałych odległościach są siłami wewnętrznymi bryły sztywnej.



zbiór punktów materialnych
utrzymujących stałą
odległość między sobą



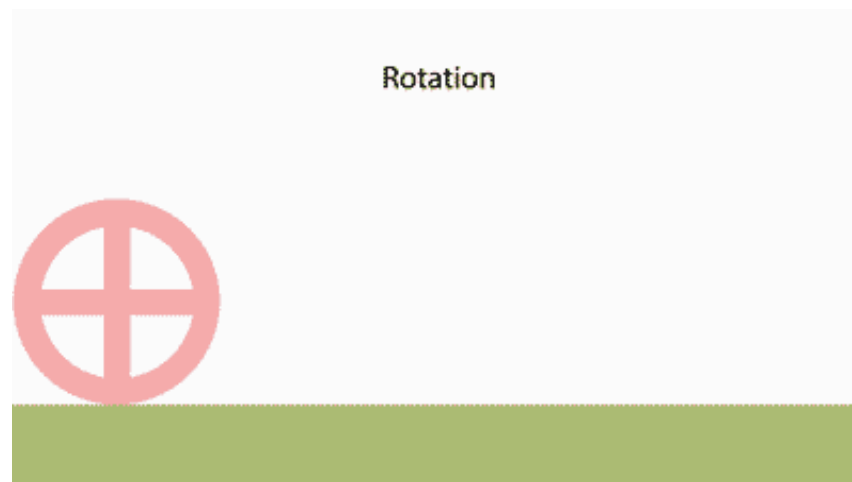
Kij uderzający piłkę
jest bryłą sztywną!



Deformująca się
piłka nie jest bryłą
sztywną!

Ruch bryły sztywnej

ruch bryły = ruch translacyjny + ruch obrotowy



<https://en.wikipedia.org/wiki/Rolling>

W ruchu postępowym (translacyjnym) bryłę możemy traktować jak punkt materialny (środek masy). Do opisu ruchu translacyjnego możemy stosować wszystkie zasady kinematyki i dynamiki słuszne dla punktu materialnego.

Opis czystego ruchu obrotowego wymaga wprowadzenia nowych wielkości fizycznych.

Ruch translacyjny i obrotowy bryły sztywnej – porównanie równań

Ruch postępowy (translacyjny)	Ruch obrotowy
• położenie, x	• ????????
• prędkość liniowa, $v = dx/dt$	• ????????
• przyspieszenie, $a_s = dv/dt$	• ????????
• masa, m	• ????????
• energia kinetyczna, $E_k = \frac{1}{2} mv^2$	• ????????
• siła, $F = ma$	• ????????
• pęd, $p = mv$	• ????????

Ruch obrotowy bryły sztywnej wokół stałej osi

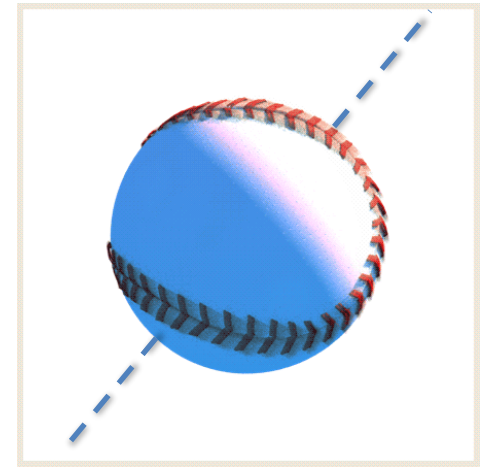
Będziemy rozważać tylko sytuacje, w których oś obrotu nie zmienia swojego kierunku.



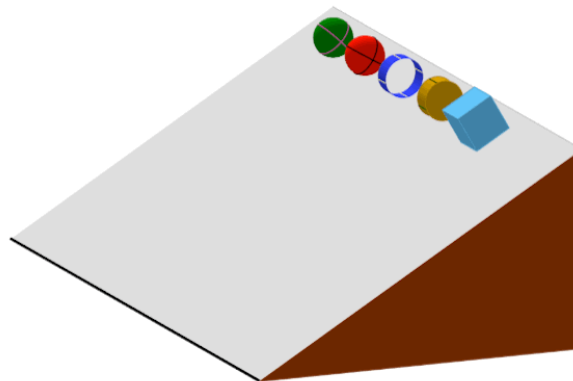
<https://www.picgifs.com/graphics/fan>



<https://www.picgifs.com/graphics/fan>



<https://wifflegif.com/tags/97-animation-gifs?page=927>

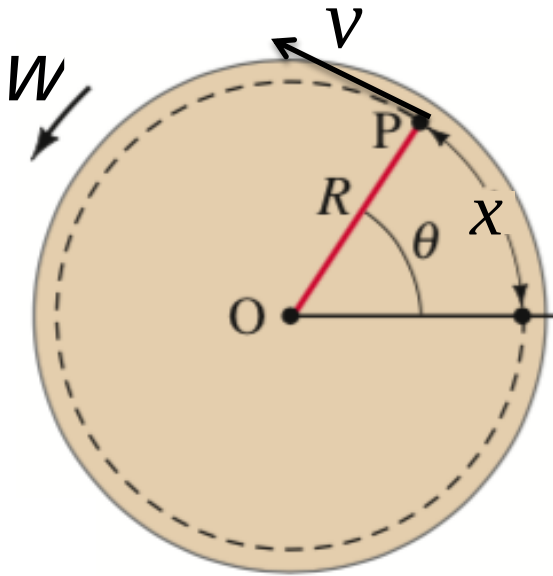


https://www.reddit.com/r/physicsgifs/comments/2z195r/sliding_vs_rolling_moment_of_inertia_demo/

Wielkości kątowe – przesunięcie, prędkość i przyspieszenie

Wielkości kątowe są wygodne do opisu ruchu obrotowego bryły sztywnej, ponieważ nie zależą od odległości od stałej osi obrotu (są takie same dla wszystkich punktów ciała).

dysk rotujący wokół stałej osi
przechodzącej przez jego środek



$$\text{przesunięcie kątowe: } q(t) = \frac{x(t)}{R} \quad [\text{rad}]$$

$$\text{prędkość kątowa: } \omega(t) = \dot{\theta} = \frac{1}{R} \dot{x}(t) = \frac{v(t)}{R} \quad [\text{rad/s}]$$

$$\text{przyspieszenie kątowe: } \epsilon(t) = \dot{\omega} = \frac{1}{R} \dot{v} = \frac{a_s(t)}{R} \quad [\text{rad/s}^2]$$

<https://phet.colorado.edu/sims/cheerpj/rotation/latest/rotation.html?simulation=rotation>

Analogia pomiędzy ruchem prostoliniowym a obrotem ciała wokół stałej osi

Obrót ciała dookoła ustalonej osi odpowiada formalnie ruchowi translacyjnemu ciała w ustalonym kierunku (czyli po linii prostej)....

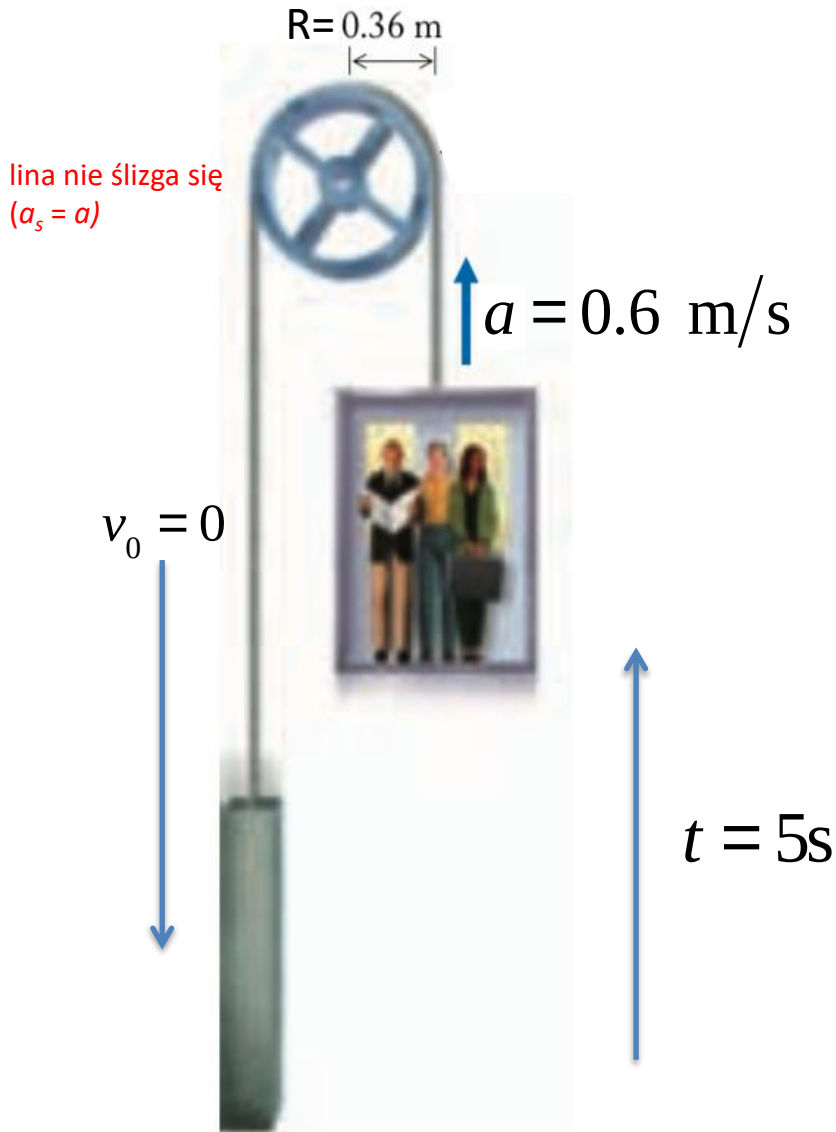
Innymi słowy do opisu ruchu obrotowego jednostajnie zmiennego (ze stałym przyspieszeniem kątowym) możemy stosować te same wzory jak do opisu ruchu prostoliniowego jednostajnie zmiennego wzdłuż linii prostej, zamieniamy tylko wielkości liniowe na wielkości kątowe:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_s t^2 \quad \longleftrightarrow \quad q = q_0 + w_0 t + \frac{1}{2} \alpha^2$$

$$v = v_0 + a_s t \quad \longleftrightarrow \quad w = w_0 + \alpha$$

$$a_s = \text{const} \quad \longleftrightarrow \quad \alpha = \text{const}$$

Analogia pomiędzy ruchem prostoliniowym a obrotem ciała wokół stałej osi - przykład



Ile obrotów wykonało koło zamachowe w ciągu pierwszych 5 sekund ruchu? Jaką prędkość kątową osiągnęło w tym czasie?

$$\epsilon = \frac{a_s}{R} = 1.7 \text{ rad/s}^2$$

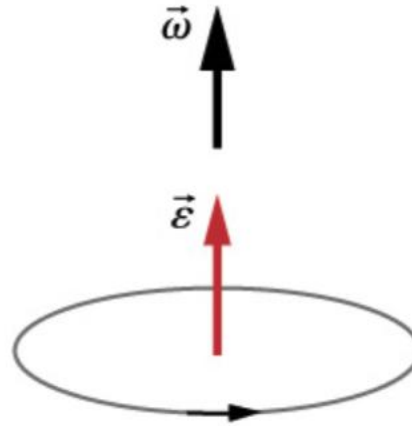
$$\varphi = \frac{1}{2} \epsilon t^2 = 21 \text{ rad}$$

Liczba obrotów: $N = \frac{\varphi}{2\pi} \gg 3.3$

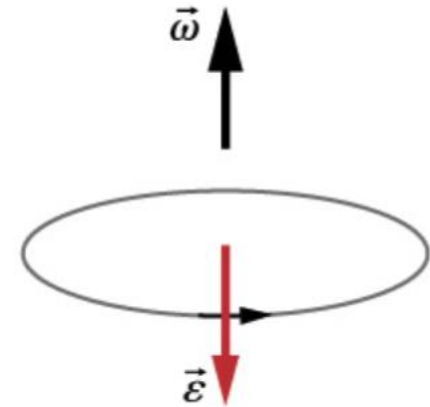
Końcowa prędkość kątowa:

$$\omega = \epsilon t = 8.5 \text{ rad/s}$$

Wektorowa natura prędkości i przyspieszenia kątownego



(a) Obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, prędkość kątowa rośnie



(b) Obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, prędkość kątowa maleje

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

$$\vec{a}_s = \vec{\epsilon} \times \vec{R}$$

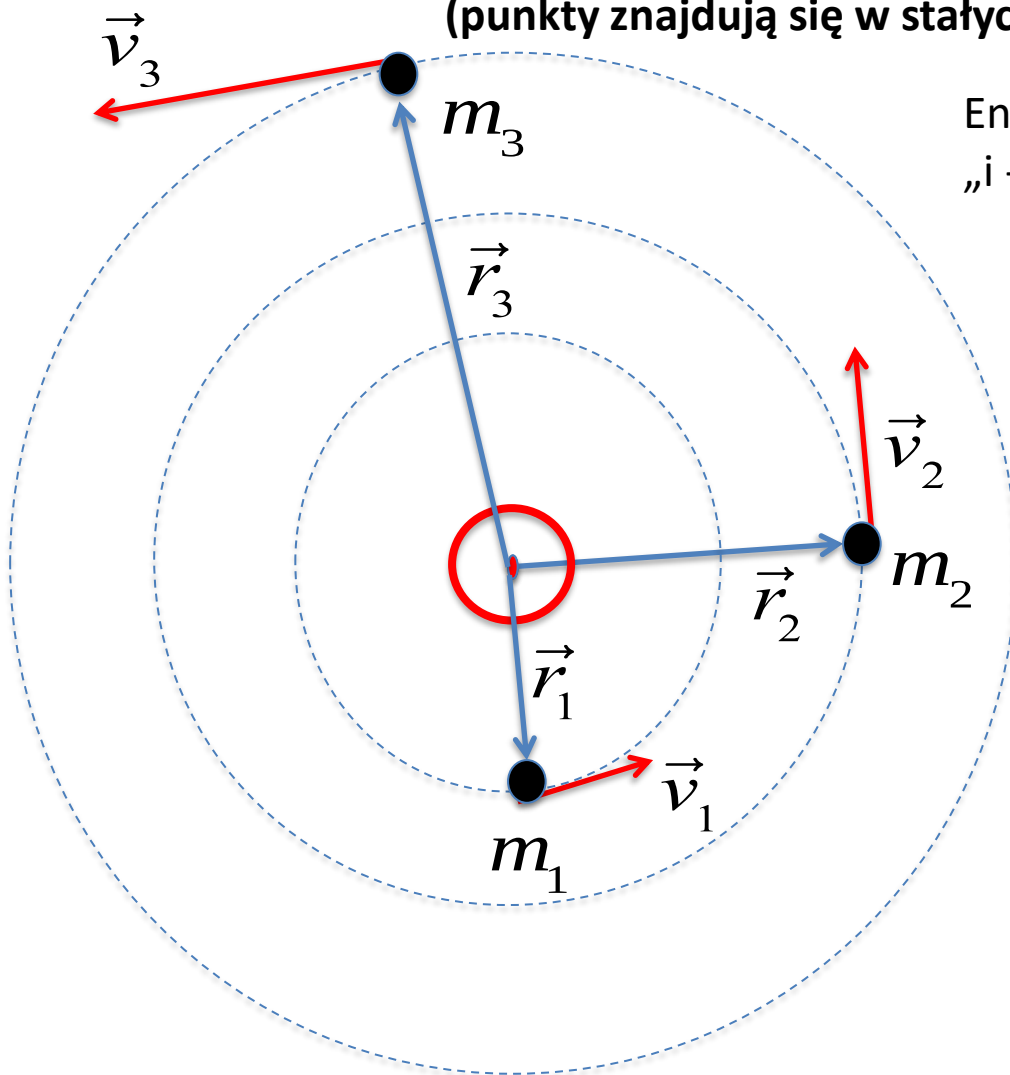
$\vec{R}$ - odległość od osi obrotu

Ruch translacyjny i obrotowy bryły sztywnej – porównanie równań

Ruch postępowy (translacyjny)	Ruch obrotowy
• położenie, x • prędkość liniowa, $v = dx/dt$ • przyspieszenie, $a_s = dv/dt$ • masa, m • energia kinetyczna, $E_k = \frac{1}{2} mv^2$ • siła, $F = ma$ • pęd, $p = mv$	• kąt, θ • prędkość kątowna, $\omega = d\theta/dt$ • przyspieszenie kątowe, $\varepsilon = d\omega/dt$ • ???????? • ???????? • ???????? • ????????

Energia kinetyczna ruchu obrotowego układu punktów materialnych

(punkty znajdują się w stałych odległościach od siebie)



Energia kinetyczna

„i - tego” punktu: $E_{ki} = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2$

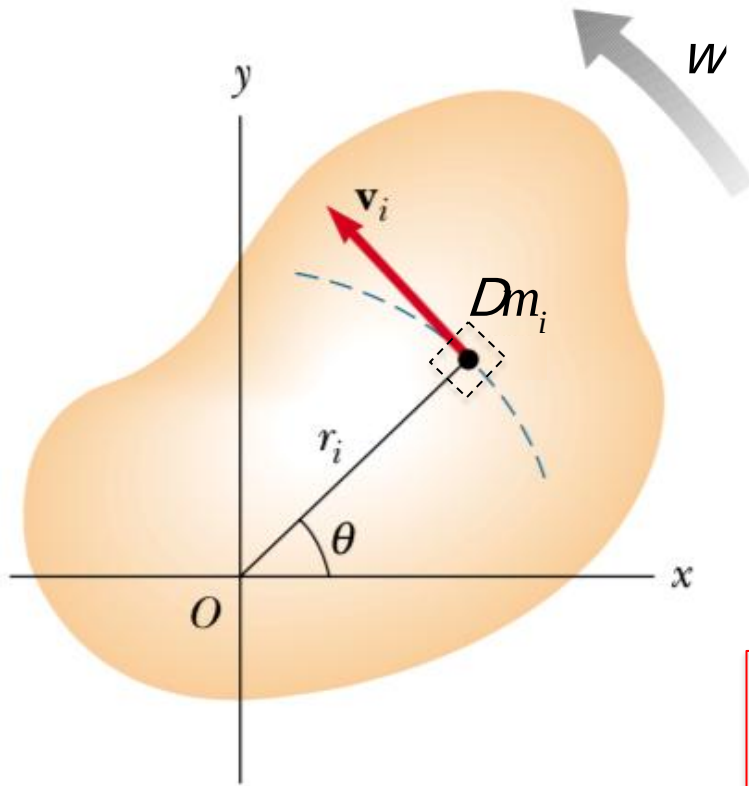
$$E_{k_ukladu} = \frac{1}{2} \omega^2 \underbrace{\sum_i m_i r_i^2}_I$$

moment
bezładności

Moment bezładności
układu n punktów:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

Energia kinetyczna ruchu obrotowego ciała rozciągniętego



Energia kinetyczna elementu Δm_i :

$$E_{ki} = \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \Delta m_i \omega^2 r_i^2$$

Energia kinetyczna całego ciała:

$$E_{k_cialo} = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i \Delta m_i r_i^2$$

I_o moment
bezładności

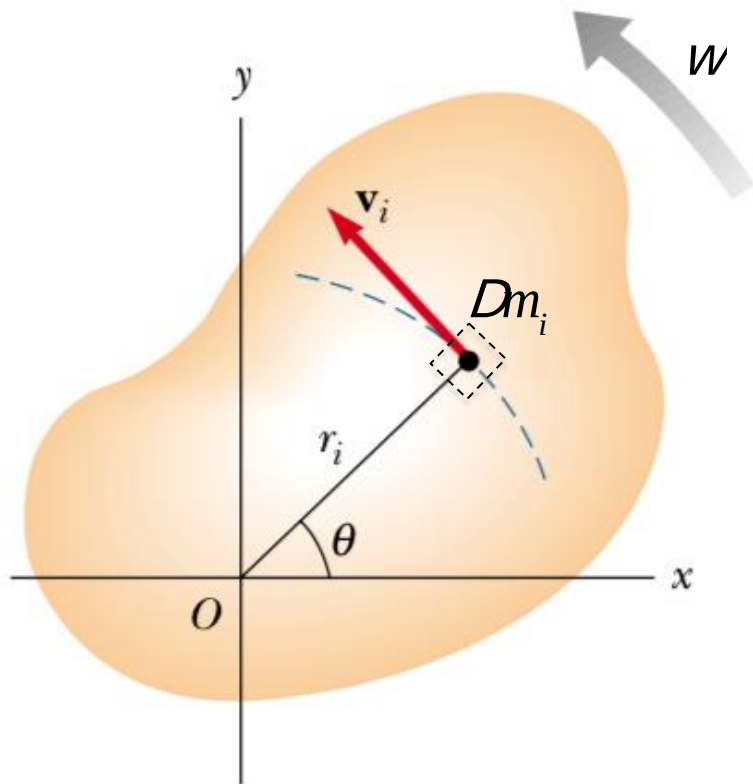
$$E_{k_cialo} = \frac{1}{2} I_o \omega^2$$

- Moment bezładności w ruchu obrotowym jest odpowiednikiem masy w ruchu translacyjnym
- Moment bezładności jest miarą oporu na zmiany obrotów, podobnie jak masa jest miarą oporu na zmiany ruchu
- Moment bezładności zależy od położenia osi obrotu
- Energia kinetyczna ruchu obrotowego nie jest nowym rodzajem energii (jest to po prostu suma energii kinetycznych wszystkich cząstek ciała w ruchu obrotowym)

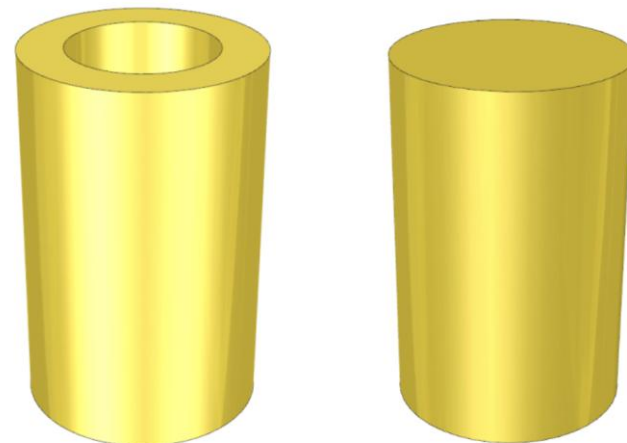
Moment bezwładności ciał rozciągniętych – jak policzyć?

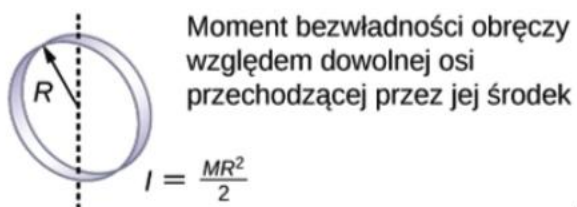
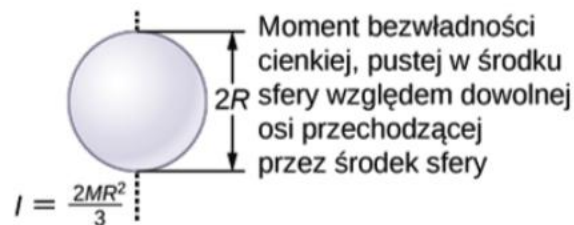
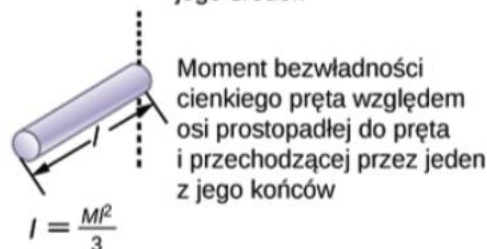
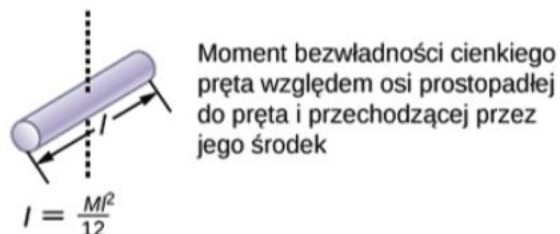
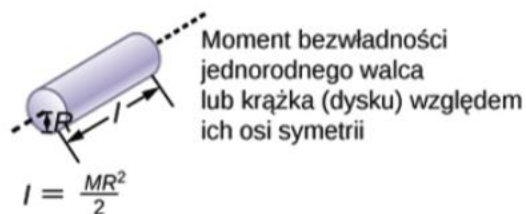
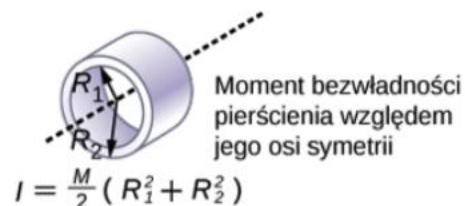
Przepis jak wyznaczyć (całki objętościowe):

$$I = \sum_i Dm_i r_i^2 \quad I = \int r^2 dm$$

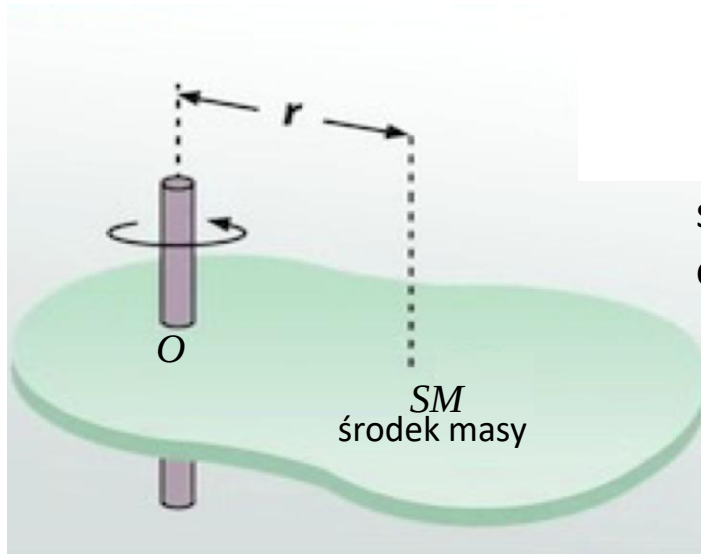


Która z poniższych brył ma większy moment bezwładności względem osi symetrii, jeżeli obydwie mają taką samą masę?





Twierdzenie Steinera

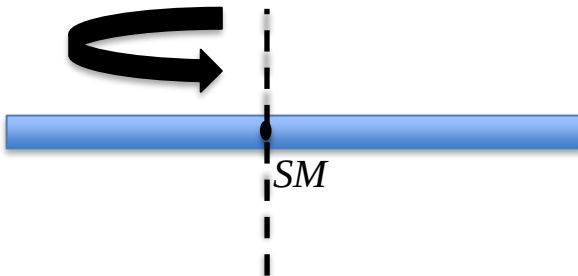


$$I_o = I_{SM} + mr^2$$

słuszne dla wszystkich osi równoległych do osi przechodzącej przez środek masy

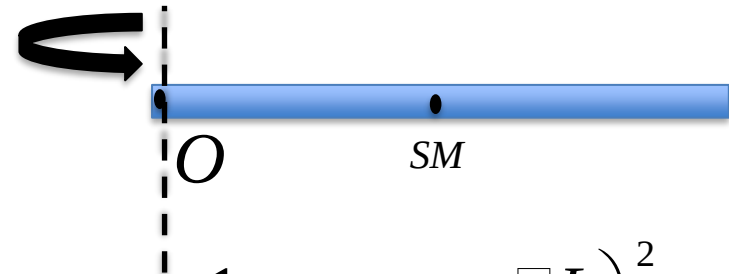
Przykład: rotujący jednorodny cienki pręt o długości L i masie M

obrót wokół osi
przechodzącej przez środek masy



$$I_{SM} = \frac{1}{12} ML^2$$

obrót wokół osi
przechodzącej przez koniec pręta



$$I_o = \frac{1}{12} ML^2 + M \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} ML^2$$

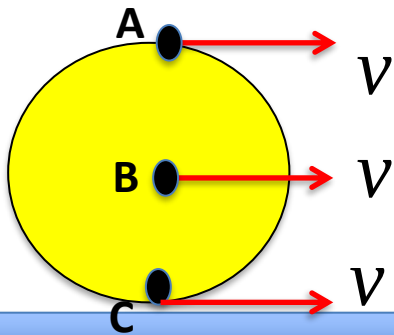
Ruch translacyjny i obrotowy bryły sztywnej – porównanie równań

Ruch postępowy (translacyjny)	Ruch obrotowy
• położenie, x • prędkość liniowa, $v = dx/dt$ • przyspieszenie, $a_s = dv/dt$ • masa, m • energia kinetyczna, $E_k = \frac{1}{2} mv^2$ • siła, $F = ma$ • pęd, $p = mv$	• kąt, θ • prędkość kątowna, $\omega = d\theta/dt$ • przyspieszenie kątowe, $\varepsilon = d\omega/dt$ • moment bezwładności, I • energia kinetyczna, $E_k = \frac{1}{2} I\omega^2$ • ????????? • ?????????

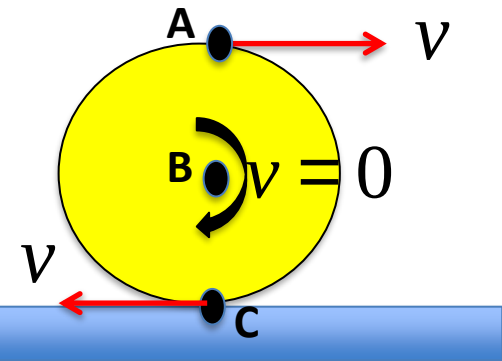
Toczenie się (ruch translacyjny + ruch obrotowy) bez poślizgu

prędkość w ruchu translacyjnym = prędkość w ruchu obrotowym

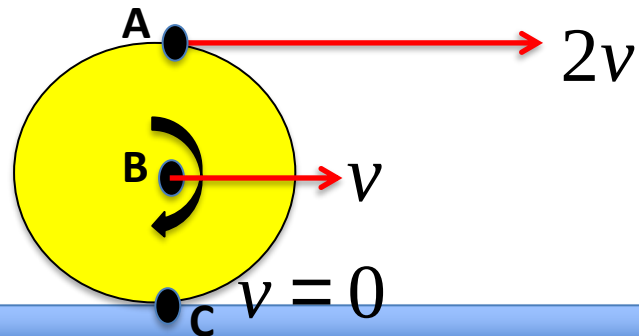
ruch translacyjny



ruch obrotowy



złożenie obydwu ruchów:



Zasada zachowania energii

-kulka jest bryłą sztywną i należy uwzględnić energię kinetyczną ruchu obrotowego

Z jakiej wysokości h należy puścić kulkę, aby pokonała ona „pętlę śmierci” o promieniu R ?

Gdy kulka się nie obraca: $mgh = mg(2r) + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow gh = 2gr + \frac{1}{2}gr \Rightarrow h = \frac{5}{2}r$

Gdy kulka obraca się bez ślizgania

(tj. prędkość obracających się punktów na obwodzie kulki jest równa prędkości całej kulki w ruchu translacyjnym):

$$mgh = mg(2r) + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow mgh = 2mgr + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mR^2\right)\frac{v^2}{R^2}$$

$$\Rightarrow gh = 2gr + \frac{1}{2}gr + \frac{1}{5}gr \Rightarrow h = \frac{27}{10}r$$

Siła zawsze prostopadła do przesunięcia – nie wykonuje pracy!

N

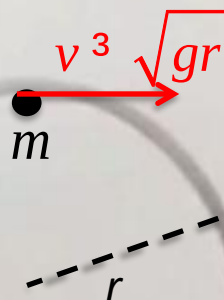
T_s

Tarcie styczne potrzebne jest do obrotów. Tarcie statyczne nigdy nie wykonuje pracy!

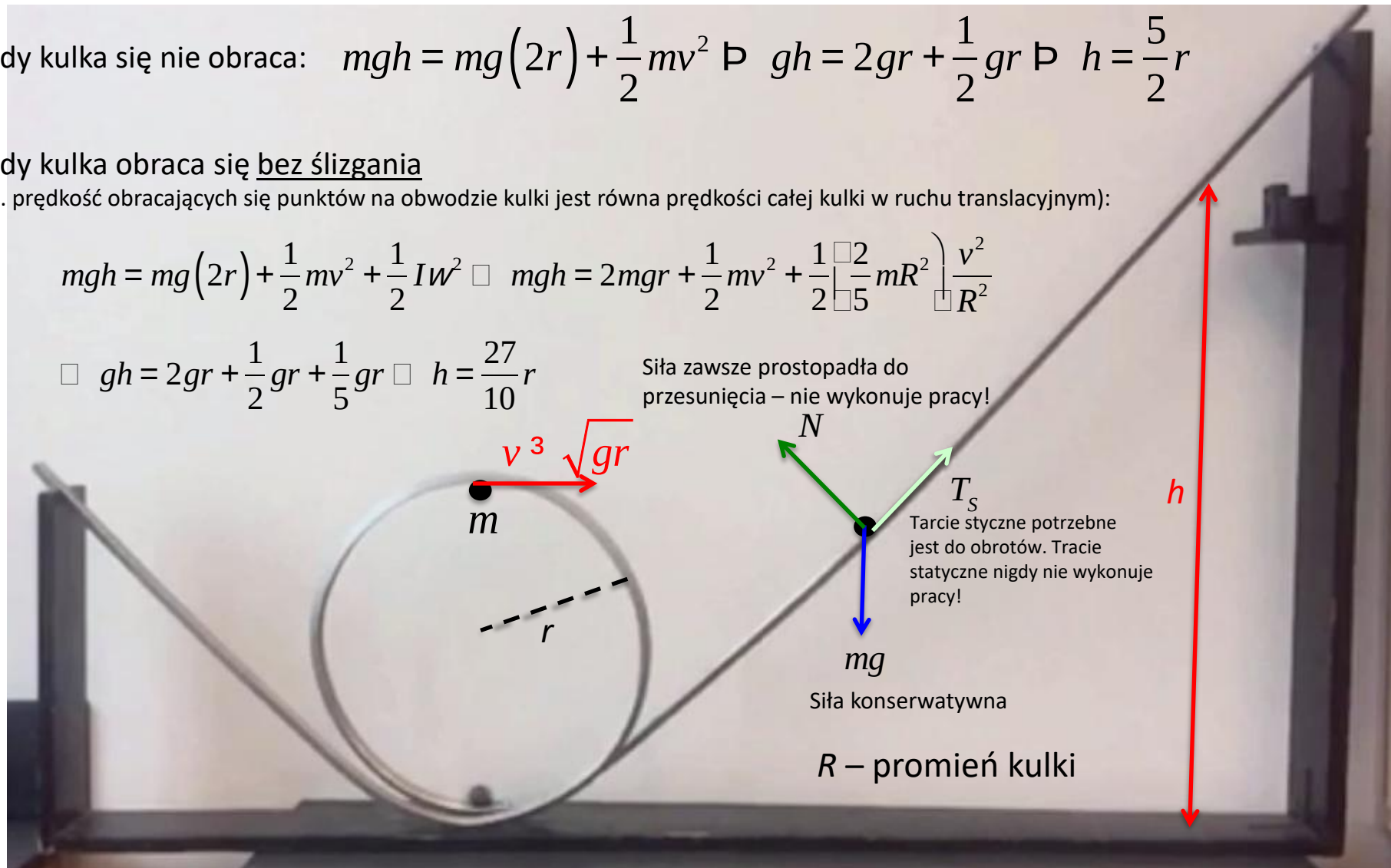
mg

Siła konserwatywna

R – promień kulki



h



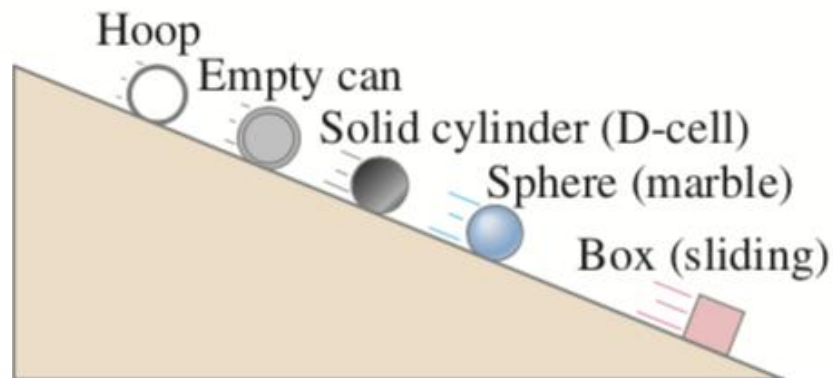
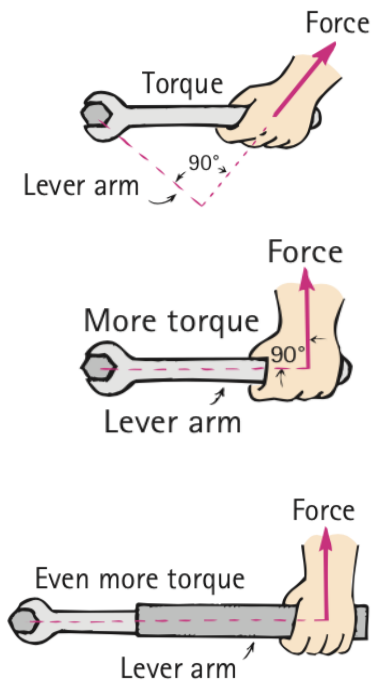
Loop the Loop

MIT Department of Physics
Technical Services Group

https://www.youtube.com/watch?v=dA_UO86MjLY

Moment siły,

II zasada dynamiki Newtona w ruchu obrotowym bryły sztywnej



Ruch translacyjny i obrotowy bryły sztywnej – porównanie równań

Ruch postępowy (translacyjny)	Ruch obrotowy
• położenie, x • prędkość liniowa, $v = dx/dt$ • przyspieszenie, $a = dv/dt$ • masa, m • energia kinetyczna, $E_k = \frac{1}{2} mv^2$ • siła, $F = ma$ • pęd, $p = mv$	• kąt, θ • prędkość kątowna, $\omega = d\theta/dt$ • przyspieszenie kątowne, $\varepsilon = d\omega/dt$ • moment bezwładności, I • energia kinetyczna, $E_k = \frac{1}{2} I\omega^2$ • ?????????? • ???????????

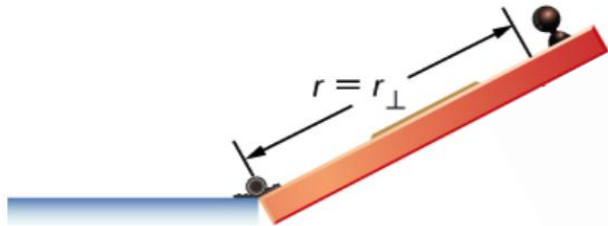
Moment siły

(z ang. *torque*, inna nazwa *moment obrotowy*)

Siły zmieniają ruch translacyjny – odpowiednikiem siły w ruchu obrotowym jest moment siły.
Tak jak siła powoduje przyspieszenie liniowe, tak moment siły powoduje przyspieszenie kątowe.

Przyspieszenie kątowe (a więc i moment siły) ruchu obrotowego drzwi zależy od:

- (i) wartości siły
- (ii) punktu przyłożenia siły (tj. odległości od osi obrotu)
- (iii) od kierunku siły



Moment siły

Moment siły F względem punktu O na rysunku poniżej:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Moment siły jest wektorem o wartości:

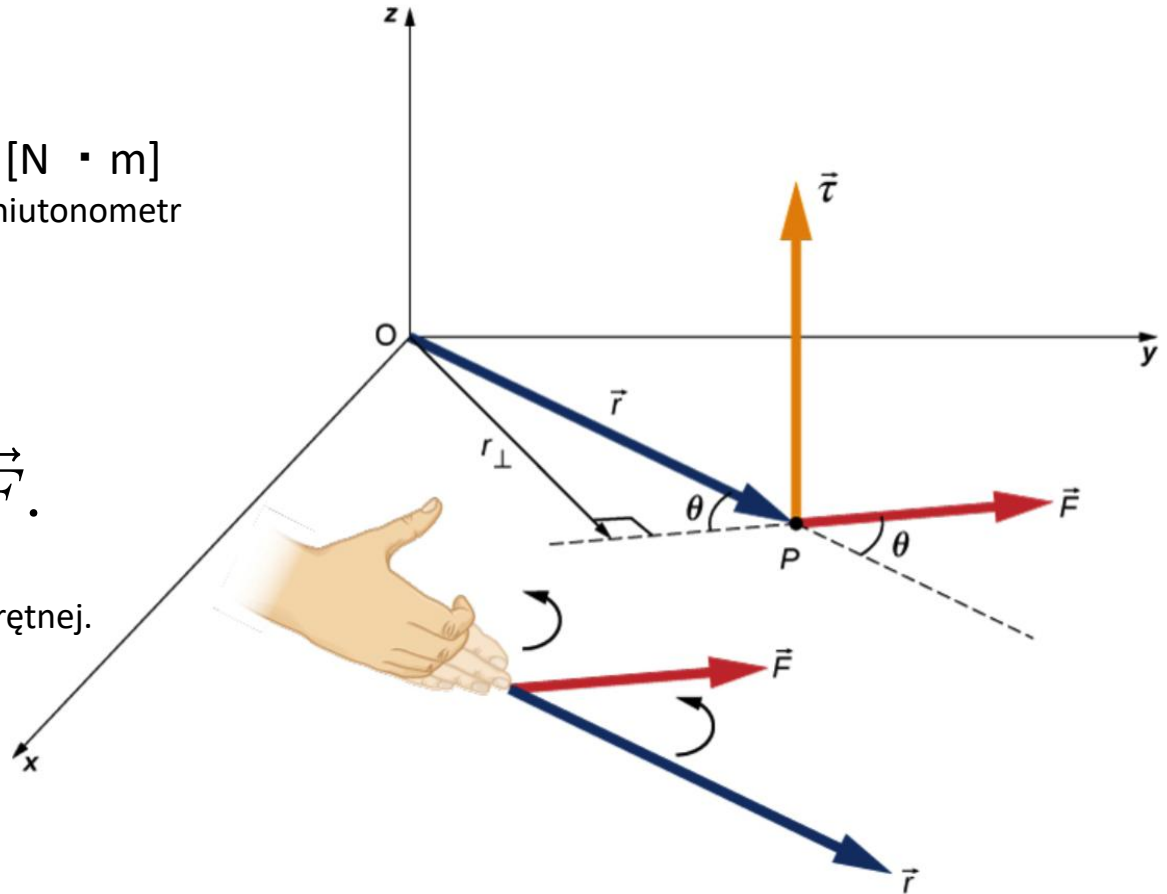
$$t = Fr_{\perp} = Fr \sin \theta \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

niutonometr

Kierunek wektora:

$$\vec{\tau} \perp \vec{r} \quad \text{oraz} \quad \vec{\tau} \perp \vec{F}.$$

Zwrot określamy regułą śruby prawoskrętnej.

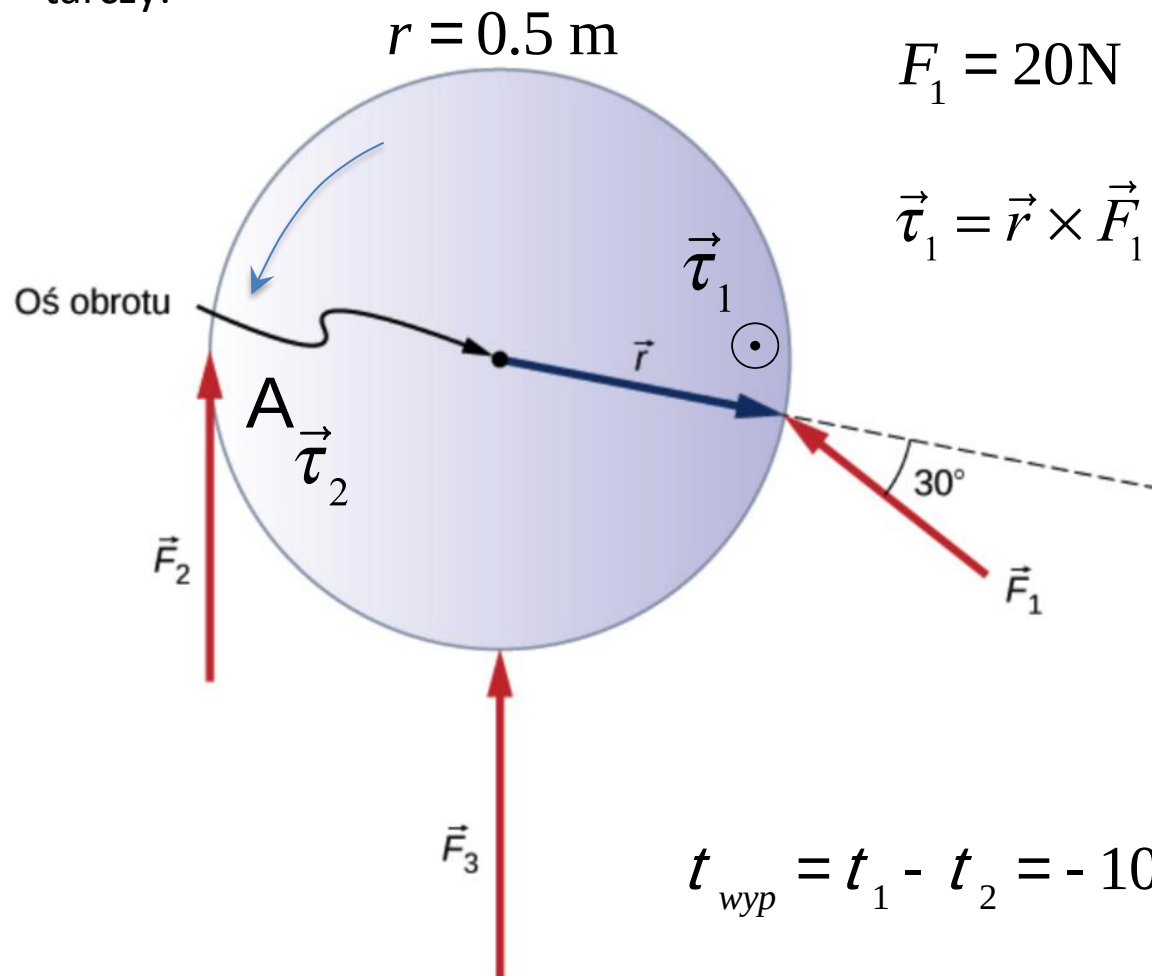


Moment siły zawsze definiujemy względem określonego punktu w przestrzeni.

Zmiana punktu odniesienia zupełnie zmienia moment siły, dlatego wielkość ta jest dla nas bardzo nieintuicyjna.

Moment siły - przykład

Wyznaczyć wartość, kierunek i zwrot całkowitego momentu siły względem środka cienkiej tarczy:



$$F_1 = 20 \text{ N}$$

$$F_2 = 30 \text{ N}$$

$$F_3 = 30 \text{ N}$$

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r} \times \vec{F}_1$$

$$\vec{\tau}_2 = \vec{r} \times \vec{F}_2$$

$$\vec{\tau}_3 = \vec{r} \times \vec{F}_3$$

$$\tau_1 = rF_1 \sin 150^\circ = 5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\tau_2 = rF_2 \sin 90^\circ = 15 \text{ N} \cdot \text{m}$$

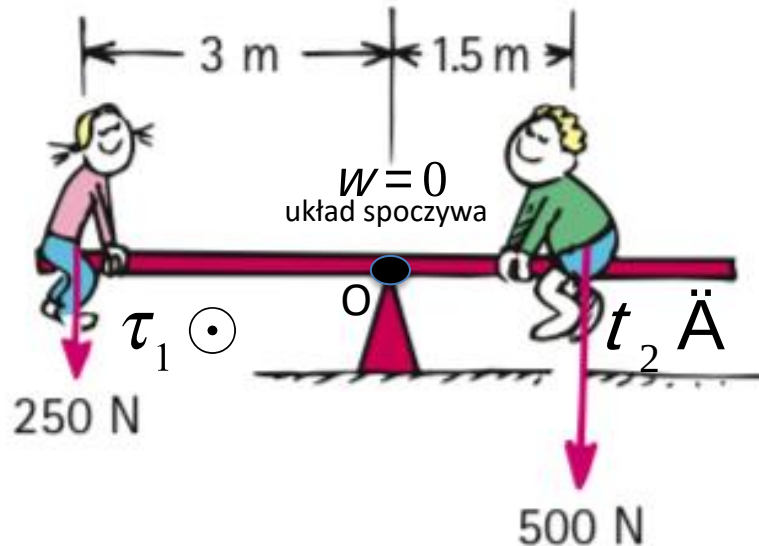
$$\tau_3 = rF_3 \sin 180^\circ = 0$$

$$t_{\text{wyp}} = t_1 - t_2 = -10 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Za „dodatni” przyjmujemy zwykle kierunek prędkości kątowej.

Moment siły - przykład

Wypadkowy momenty sił liczony względem punktu na osi obrotu:



$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1$$

$$\vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

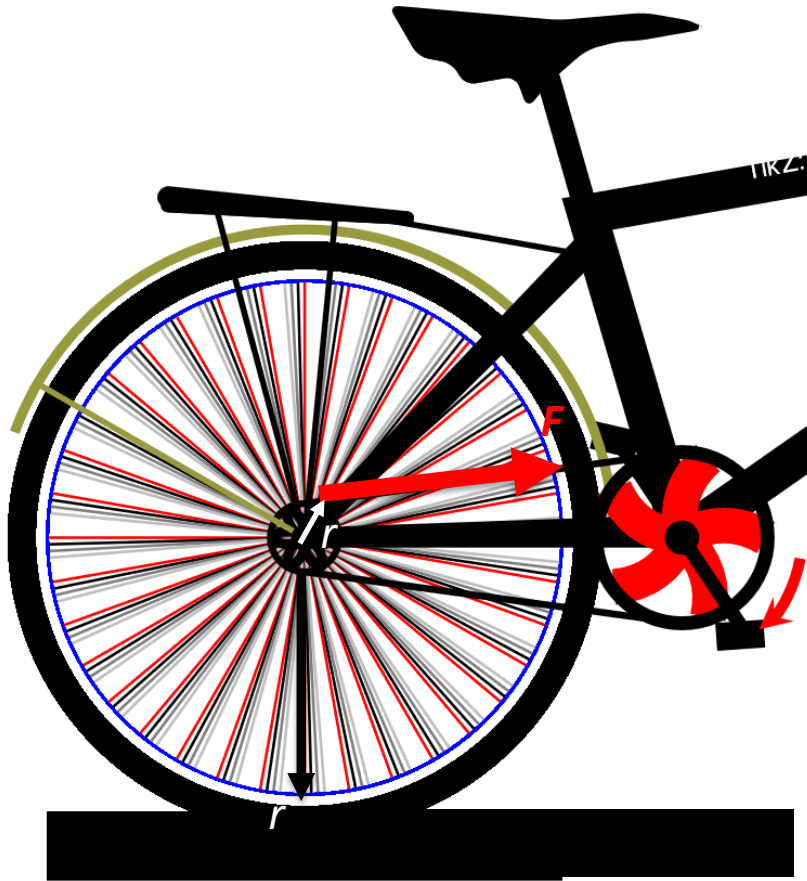
$$t_1 = F_1 r_1 = 750 \text{ N} \cdot \text{m} \quad t_2 = F_2 r_2 = -750 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$t_{\text{wyp}} = t_1 + t_2 = 0 \quad (\text{gdy brak obrotów, to wypadkowy moment siły względem osi obrotu wynosi zero})$$

Słuszne dla momentów sił względem dowolnego punktu na stałej osi obrotu.

Moment siły – przykład

 $V = \text{const}$ (ruch bez poślizgu)



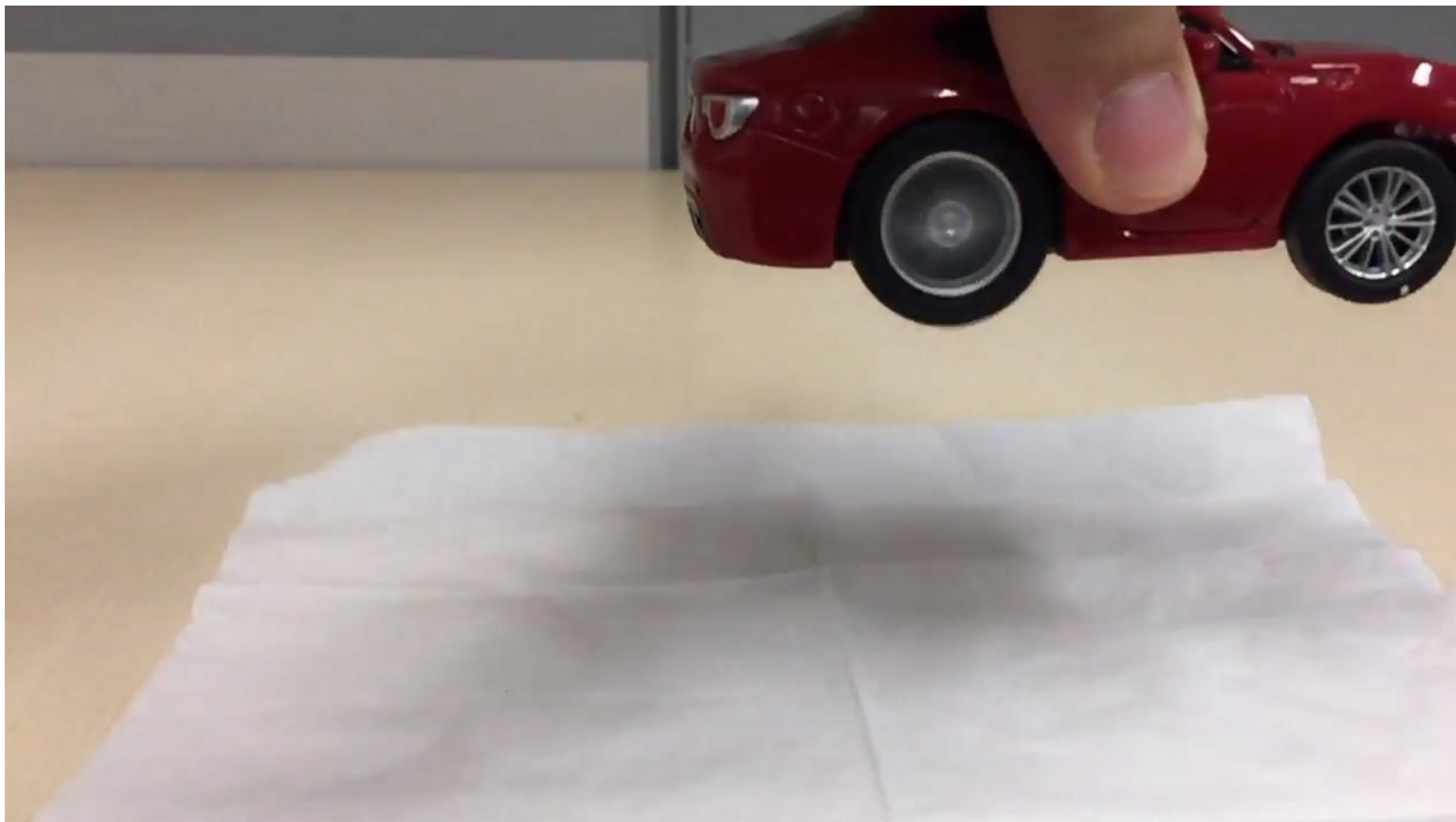
$$\vec{\tau}_F = \vec{r} \times \vec{F} \quad A$$

Aby utrzymać stałą prędkość kątową obrotów, wypadkowy moment siły musi być równy zero.

$$\vec{\tau}_{T_s} = \vec{r} \times \vec{T}_s \quad \odot$$

$$t_{\text{wyp}} = t_F - t_{T_s} = 0$$

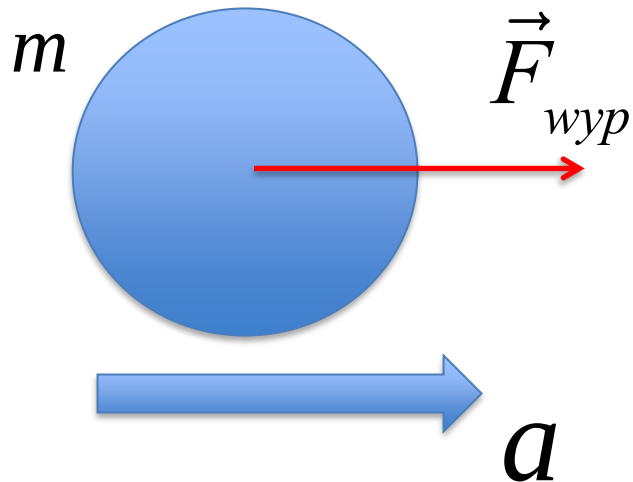
Siła grawitacji przyłożona jest do środka masy, który znajduje się na osi obrotu.
Siła reakcji na nacisk jest równoległa do r . Obydwie siły dają zerowy moment siły.



<https://www.youtube.com/watch?v=RHYHtfyamOw>

II zasada dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego

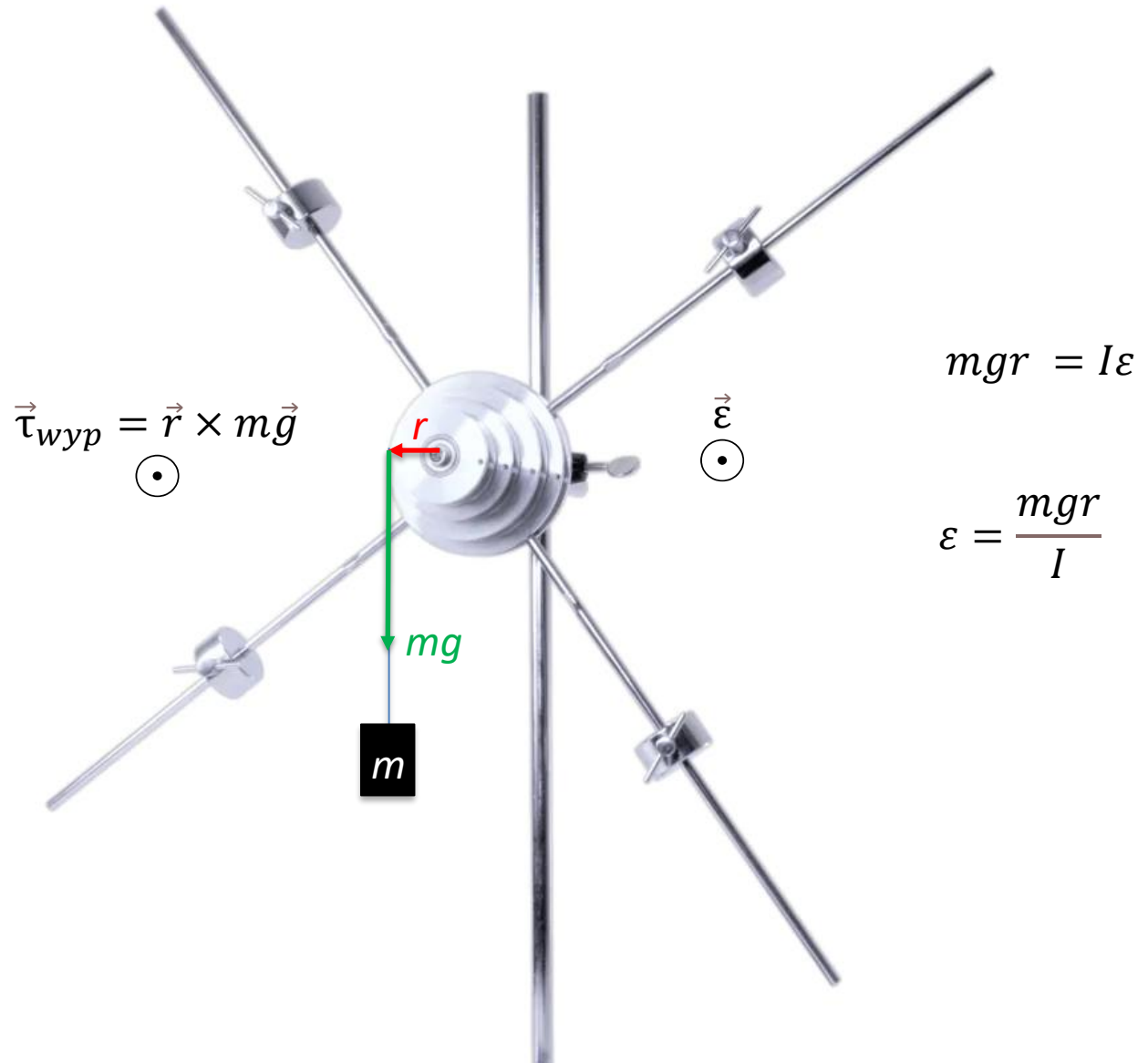
Ruch translacyjny



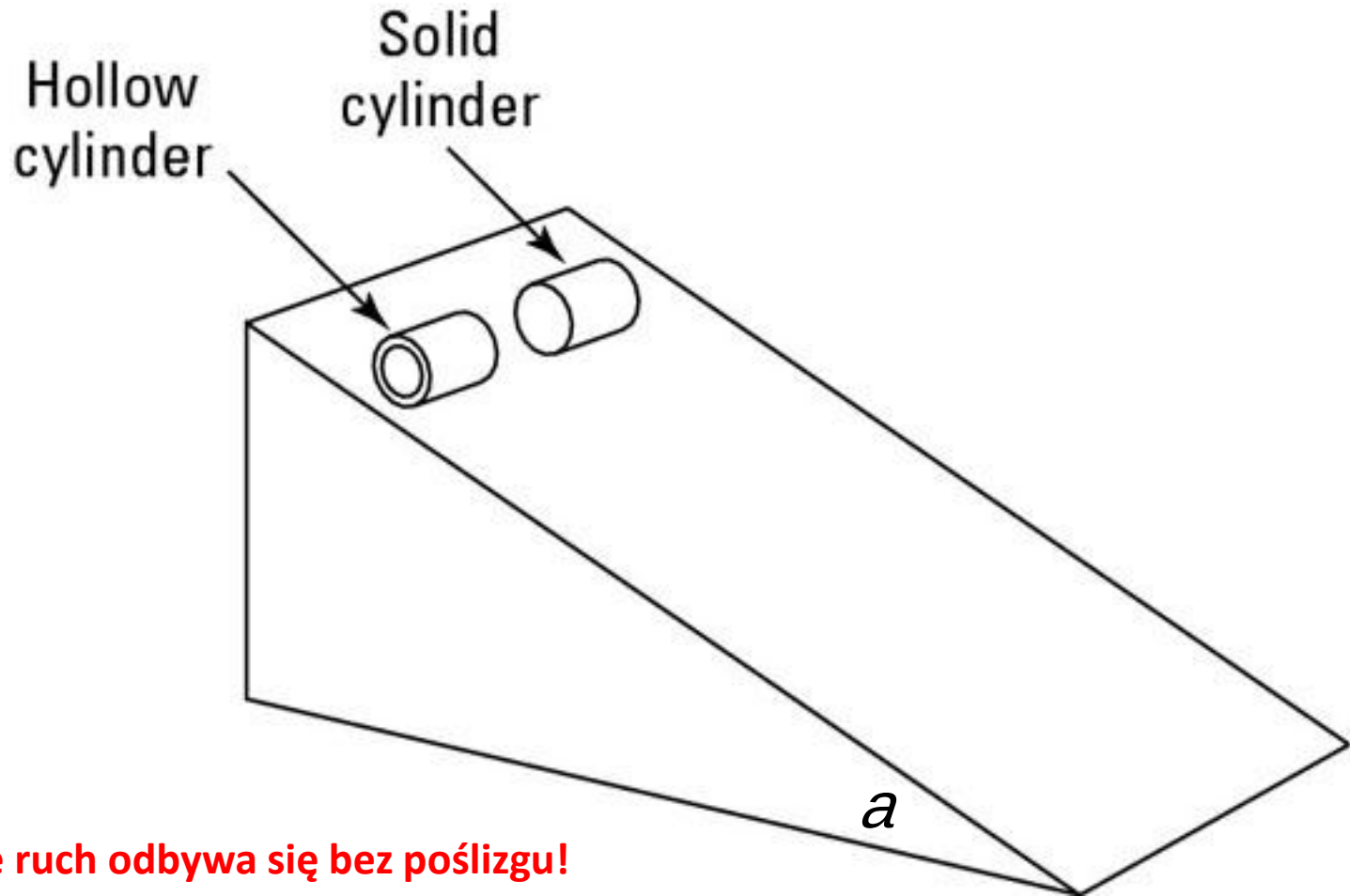
$$\vec{F}_{wyp} = m\vec{a}$$

II zasada dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego - dowód eksperymentalny

$$\vec{\tau}_{\text{wyp}} = I \vec{\varepsilon}$$



Zasady dynamiki Newtona z uwzględnieniem ruchu obrotowego - przykład, wyścig pełnego i pustego walca



Zakładamy, że ruch odbywa się bez poślizgu!

Ruch translacyjny:

$$mg \sin a - T_s = ma$$

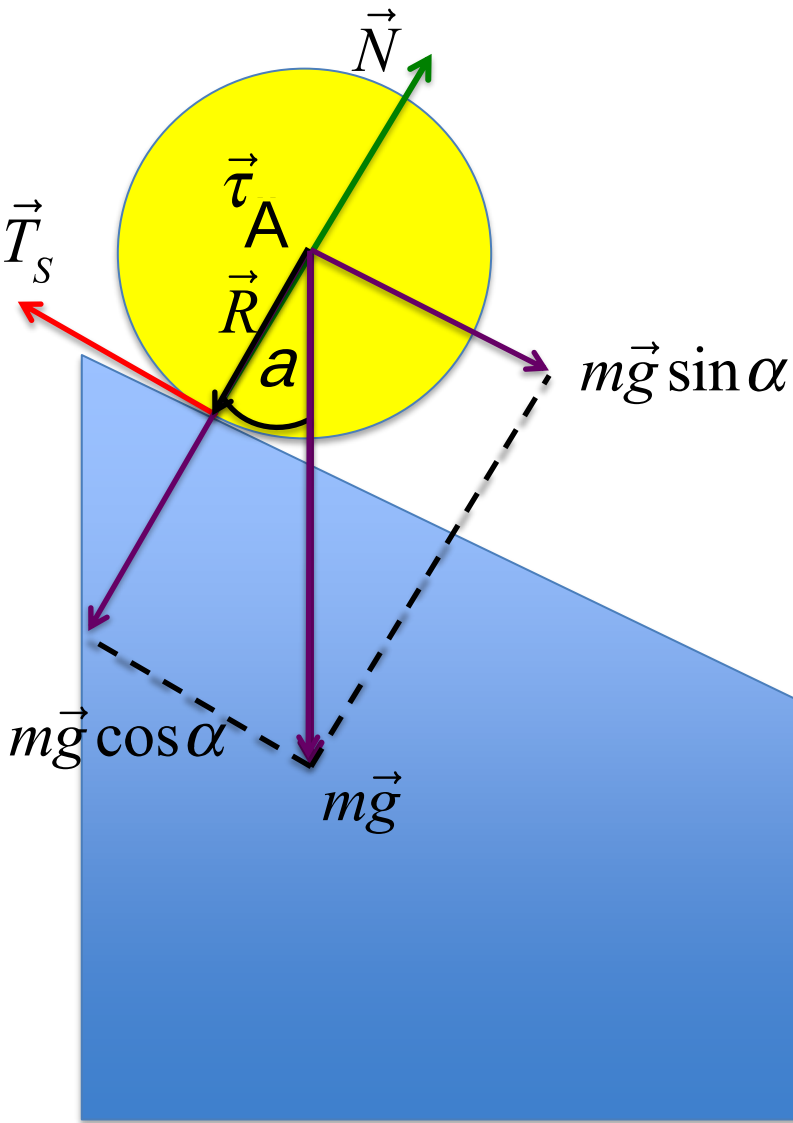
$$mg \cos a = N$$

Ruch obrotowy:

$$\vec{\tau} = \vec{R} \times \vec{T}_s$$

$$\tau = T_s R \sin 90^\circ = I \varepsilon$$

$$e = \frac{a}{R}$$



$$a = \frac{mgR^2 \sin a}{I + mR^2}$$

$$I_{\text{pełny}} = \frac{1}{2} mR^2,$$

$$I_{\text{pusty}} = mR^2$$

$$a_{\text{pełny}} = \frac{2}{3} g \sin a > a_{\text{pusty}} = \frac{1}{2} g \sin a$$

Walec pełny wygra!

(a

Wyścig pełnego i pustego walca



Bonissandis

<https://www.youtube.com/watch?v=TXQQvtfmFjc>

Wahadło fizyczne (cienka deseczka)

Wahadło fizyczne to bryła sztywna zawieszona na stałej osi poziomej w polu grawitacyjnym.

- Trzpień działa na listwę siłą, ale moment tej siły względem punktu P (oś obrotu) wynosi 0.
- Niezerowy moment siły względem punktu P pochodzi tylko od siły ciężkości, która umownie przyłożona jest do środka masy

$$\vec{\tau}_P = \vec{r} \times m\vec{g} \quad t_P = mgr \sin \varphi$$

Przybliżenie małego kąta ($\theta \ll 1$ rad): $t_P \gg mgr\varphi$

II zasada dynamiki Newtona:

$$\tau_P = -I_P \varepsilon = -I_P \dot{\omega} = -I_P \ddot{\theta}$$

Równanie oscylatora harmonicznego:

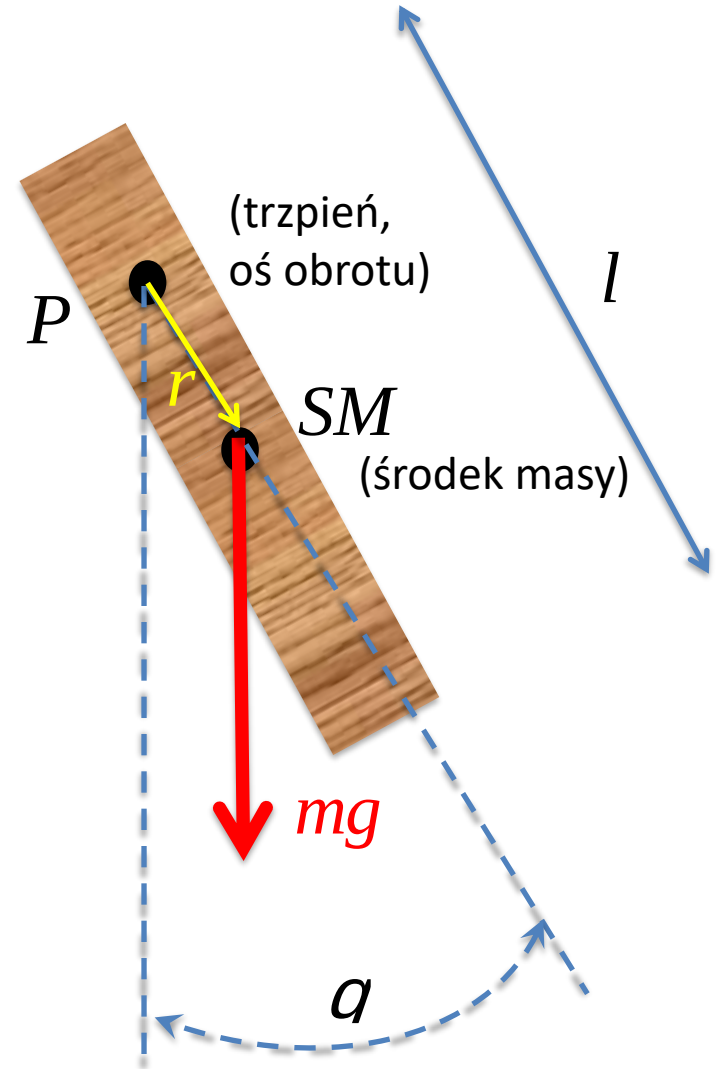
$$\ddot{\theta} + \left(\frac{mgr}{I_P} \right) \theta = 0$$

Z twierdzenia Steinera:

$$I_P = \frac{1}{12} ml^2 + mr^2$$

Okres wahań:

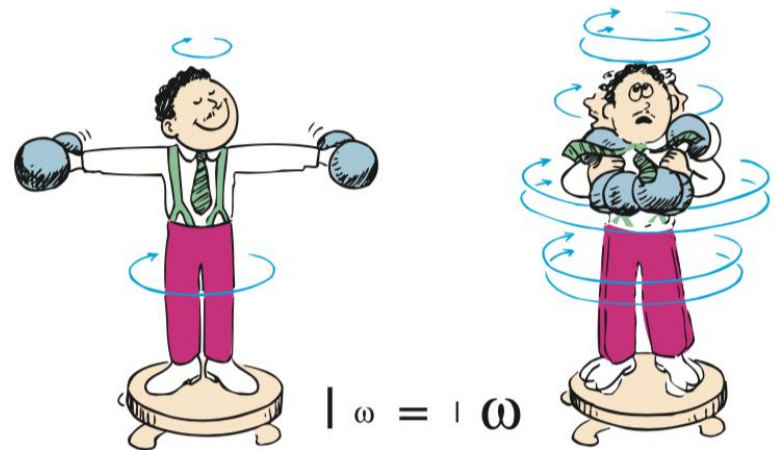
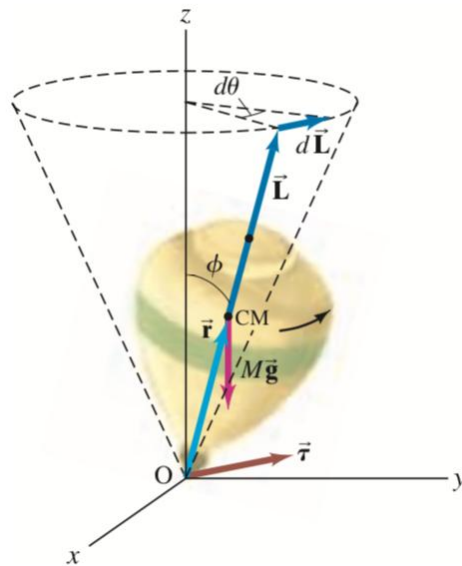
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_P}{mgr}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{12} l^2 + r^2}{gr}}$$



Ruch translacyjny i obrotowy bryły sztywnej – porównanie równań

Ruch postępowy (translacyjny)	Ruch obrotowy
• położenie, x • prędkość liniowa, $v = dx/dt$ • przyspieszenie, $a = dv/dt$ • masa, m • energia kinetyczna, $E_k = \frac{1}{2} mv^2$ • siła, $F = ma$ • pęd, $p = mv$	• kąt, θ • prędkość kątowna, $\omega = d\theta/dt$ • przyspieszenie kątowe, $\varepsilon = d\omega/dt$ • moment bezwładności, I • energia kinetyczna, $E_k = \frac{1}{2} I\omega^2$ • moment siły (względem osi obrotu) $\tau = I\varepsilon$ • xxxxxxxxxx

Moment pędu, zasada zachowania momentu pędu



Ruch translacyjny i obrotowy bryły sztywnej – porównanie równań

Ruch postępowy (translacyjny)	Ruch obrotowy
- położenie, x - prędkość liniowa, $v = dx/dt$ - przyspieszenie, $a = dv/dt$ - masa, m - energia kinetyczna, $E_k = \frac{1}{2} mv^2$ - siła, $F = ma$, $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ wyp - pęd, $p = mv$	- kąt, θ - prędkość kątowna, $\omega = d\theta/dt$ - przyspieszenie kątowe, $\varepsilon = d\omega/dt$ - moment bezwładności, I - energia kinetyczna, $E_k = \frac{1}{2} I\omega^2$ - moment siły (względem osi obrotu) $\tau = I\varepsilon$ - xxxxxxxxxx

Moment pędu cząstki – definicja

(ang. *angular momentum*)

Moment pędu **cząstki** zawsze definiujemy względem określonego punktu w przestrzeni.

Moment pędu L względem punktu O na rysunku poniżej: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

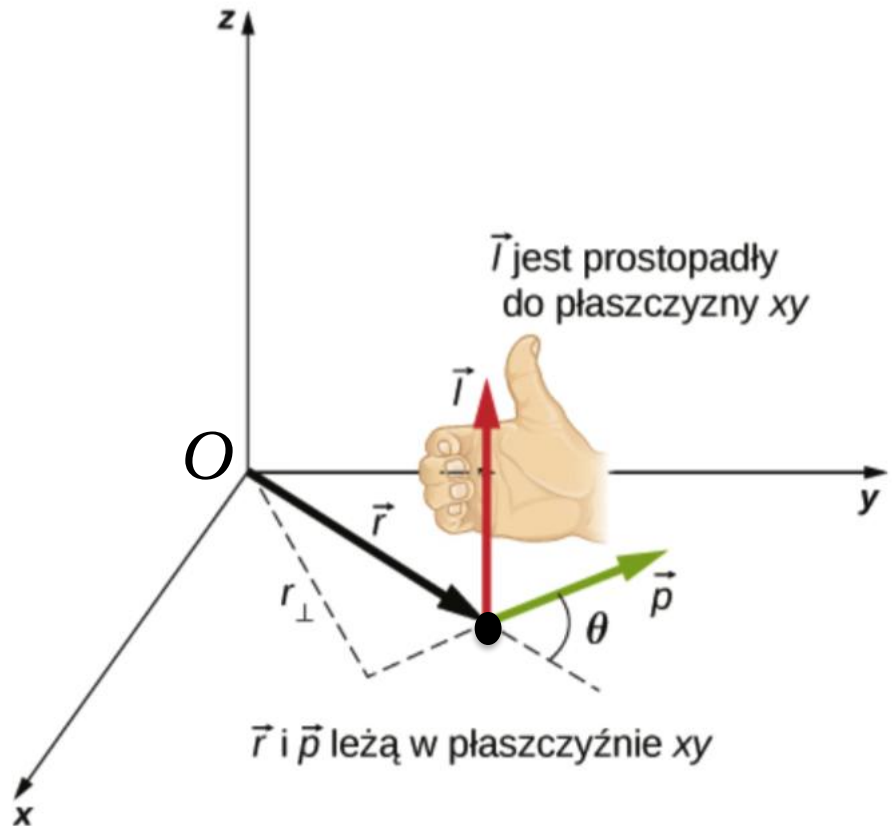
Moment pędu jest wektorem o wartości:

$$L = pr \sin \theta$$

Kierunek wektora:

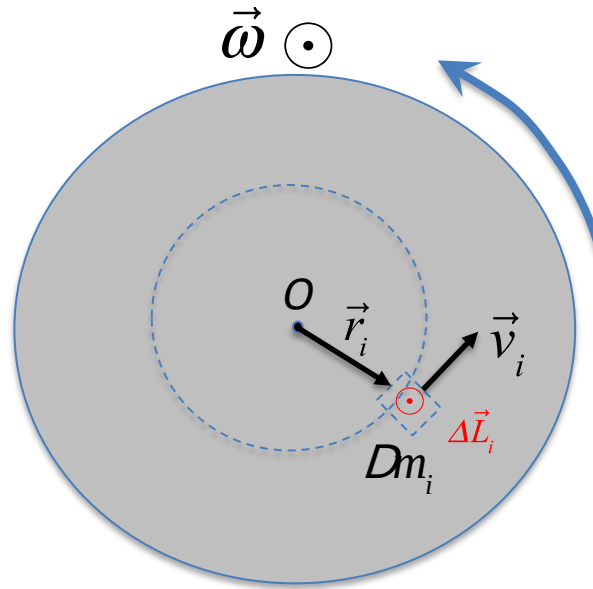
$$\vec{L} \perp \vec{r} \quad \text{oraz} \quad \vec{L} \perp \vec{p}.$$

Zwrot określamy regułą śruby prawoskrętnej.



Moment pędu rotującego płaskiego dysku (bryły sztywnej)

Moment pędu małego elementu Δm_i względem punktu O : $\Delta \vec{L}_i = \vec{r}_i \times \Delta m_i \vec{v}_i$



Całkowity moment pędu bryły: $\vec{L} \approx \sum_i \vec{r}_i \times \Delta m_i \vec{v}_i = \sum_i \Delta m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i)$ $\odot \vec{L}$

$$L \approx \sum_i \Delta m_i r_i v_i \sin 90^\circ = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \omega \xrightarrow{\Delta m_i \rightarrow 0} L = \left(\sum_i r_i^2 dm \right) \omega$$

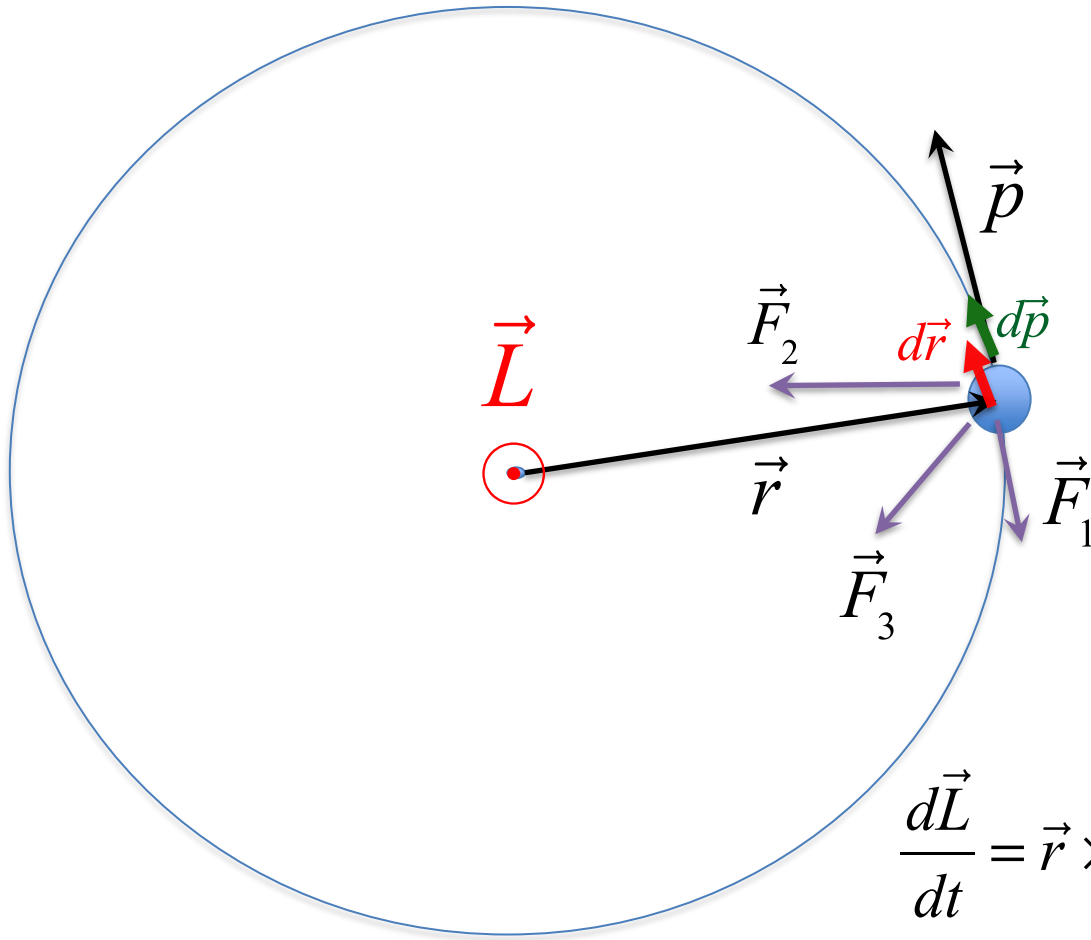
moment bezwładności
względem osi obrotu

$$L = I \omega$$

moment pędu zależy od położenia osi obrotu,
ponieważ I zależy od osi obrotu

Związek pomiędzy momentem pędu i momentem siły

(na przykładzie punktu materialnego)



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

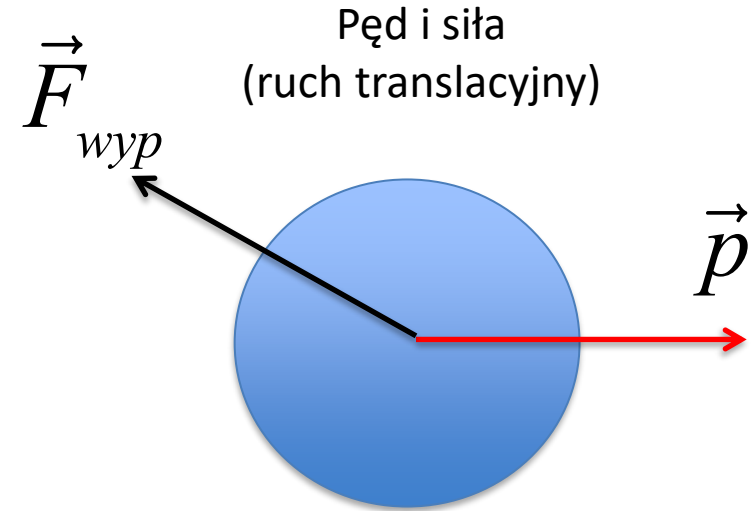
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

0

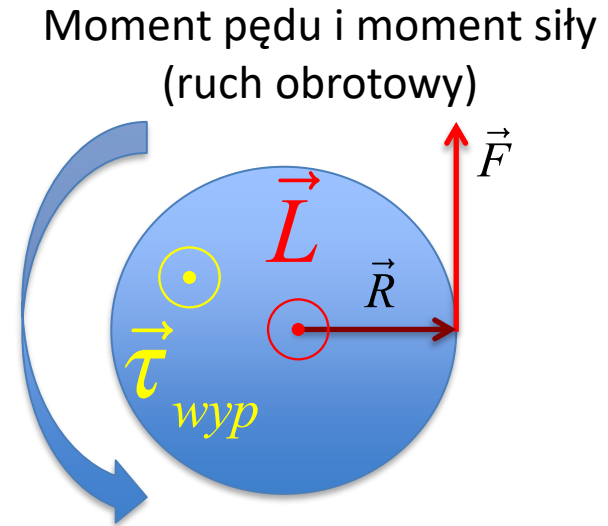
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{wyp}}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_{\text{wyp}} = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3) = \vec{\tau}_{\text{wyp}}$$

II zasada dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego bryły sztywnej (wersja z momentem pędu)



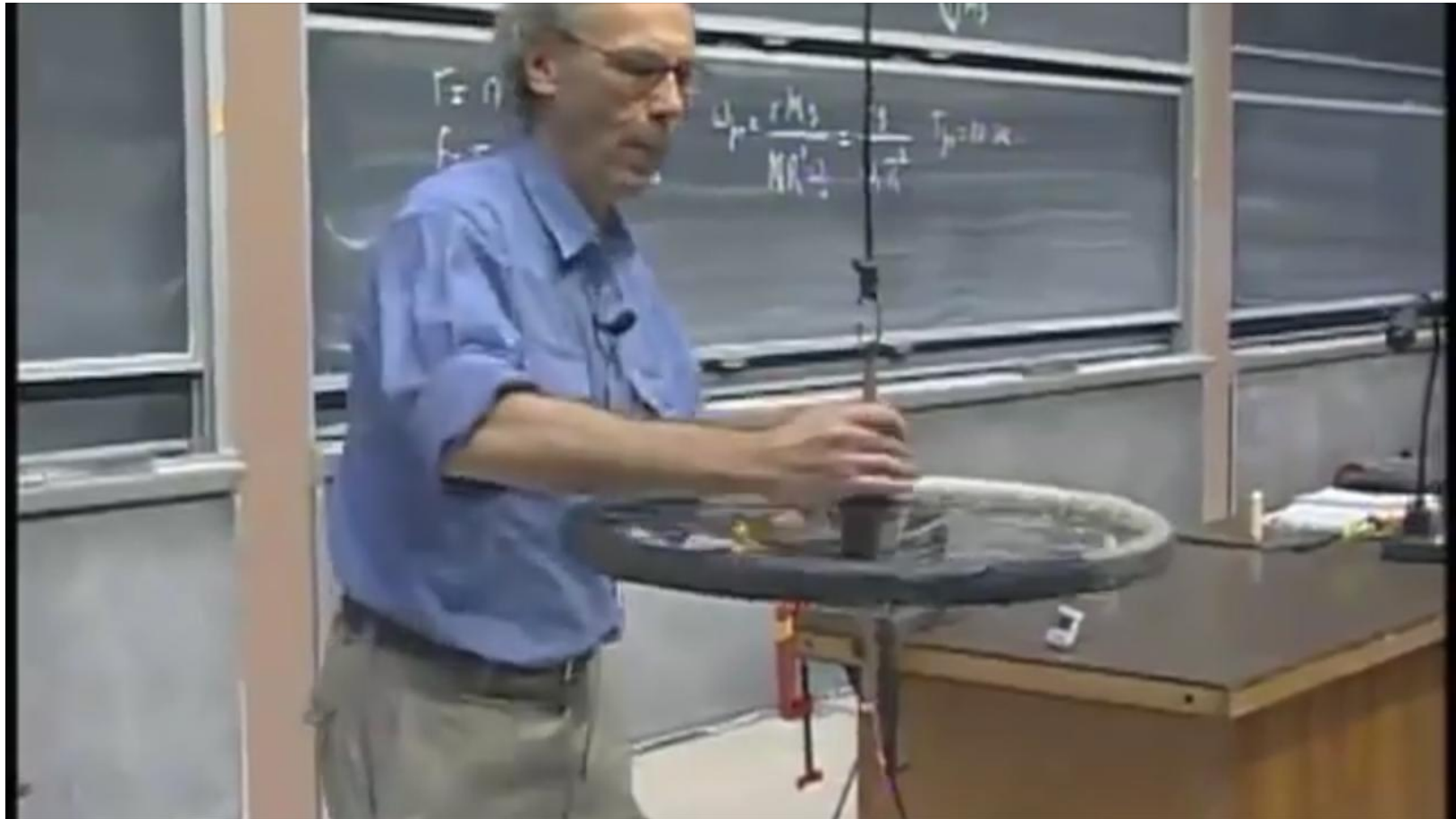
$$\vec{F}_{wyp} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$



$$\vec{\tau}_{wyp} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

L – to całkowity moment pędu bryły

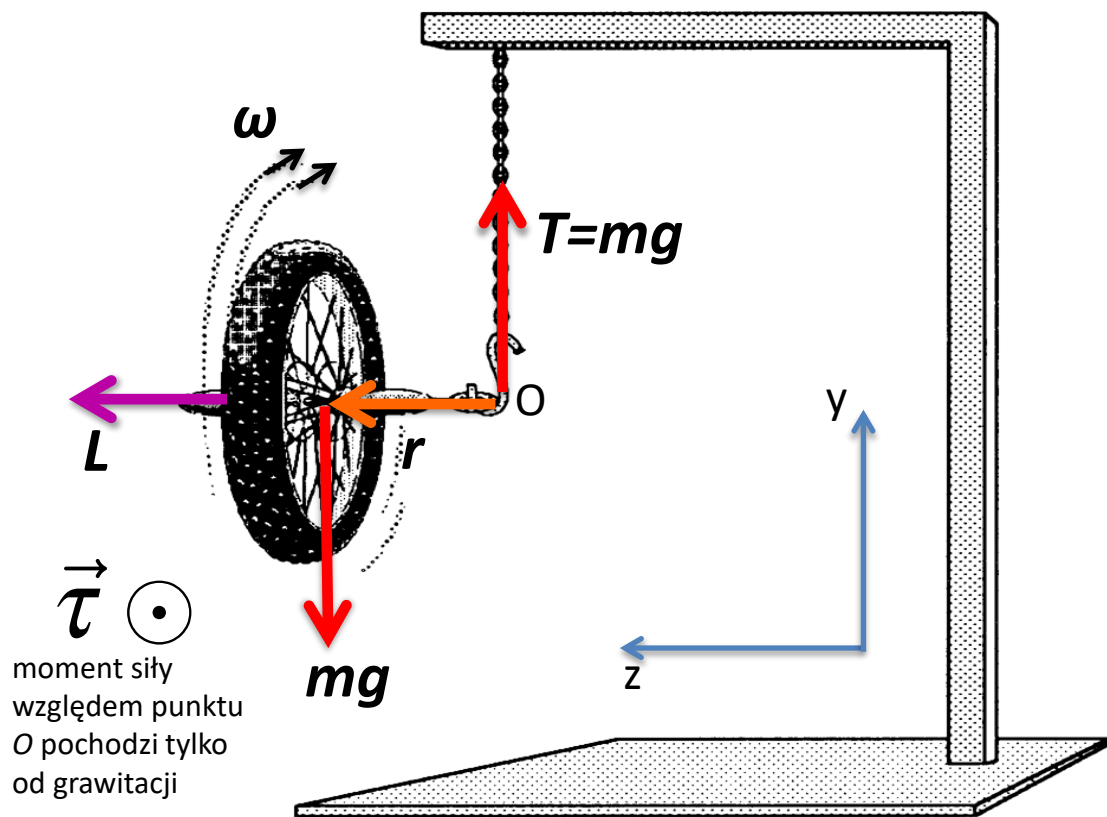
Nieintuicyjne zachowanie wirującego koła zawieszonego na pionowej lince



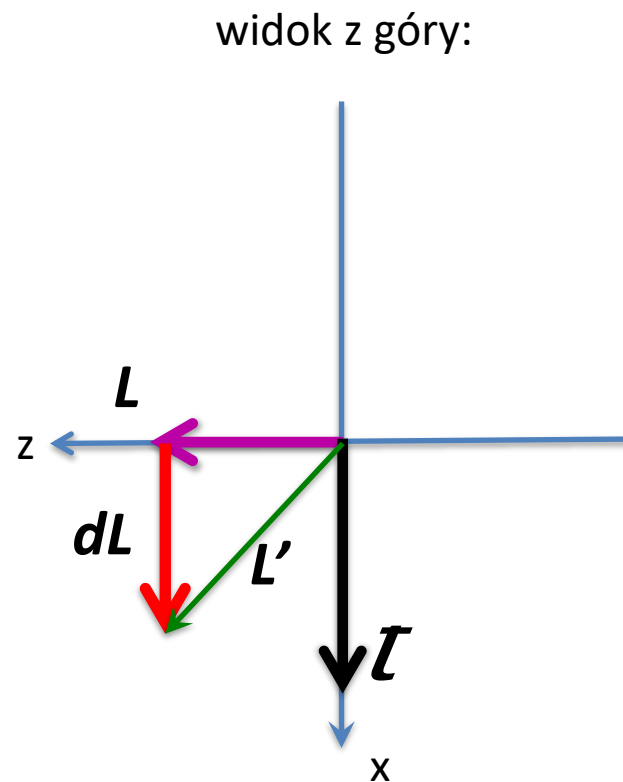
<https://www.youtube.com/watch?v=NeXIV-wMVUk>

Precesja ciał (zmiana kierunku osi obracającego się ciała) - przykłady

$$d\vec{L} = \vec{\tau} dt$$

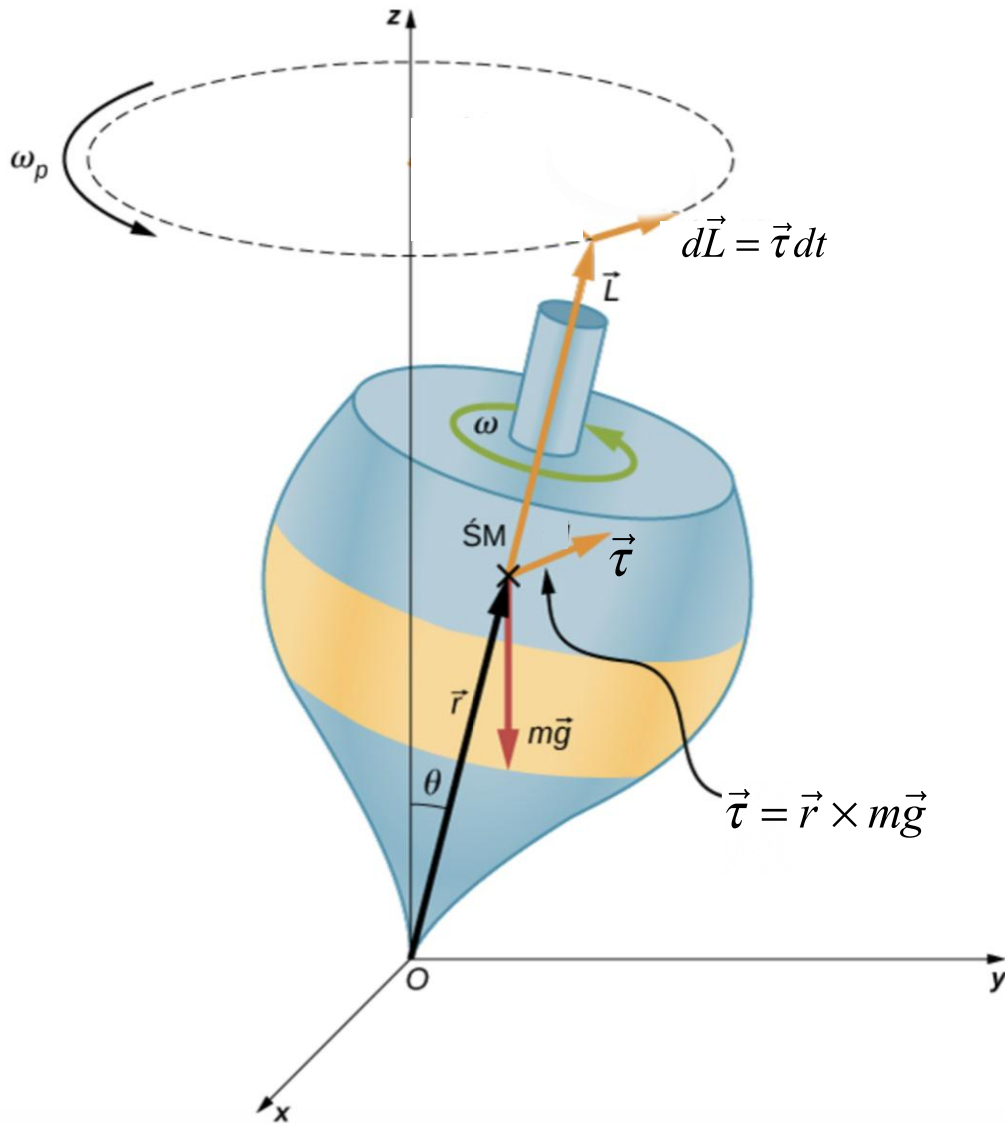


Moment pędu podąża za momentem siły!



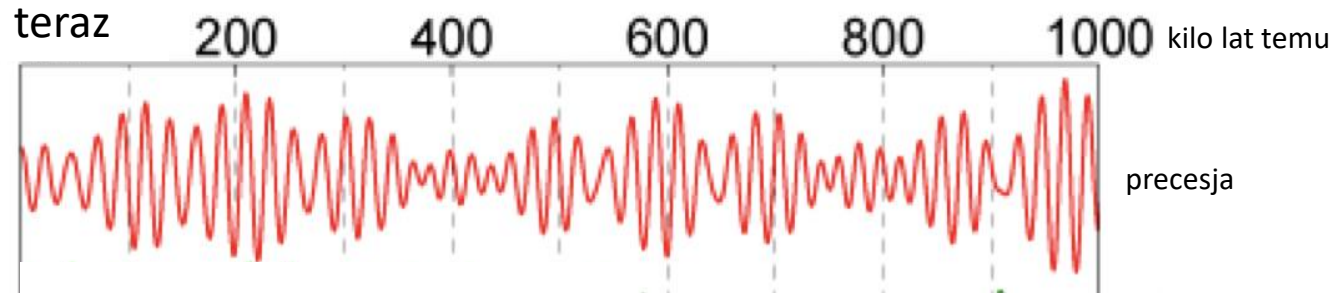
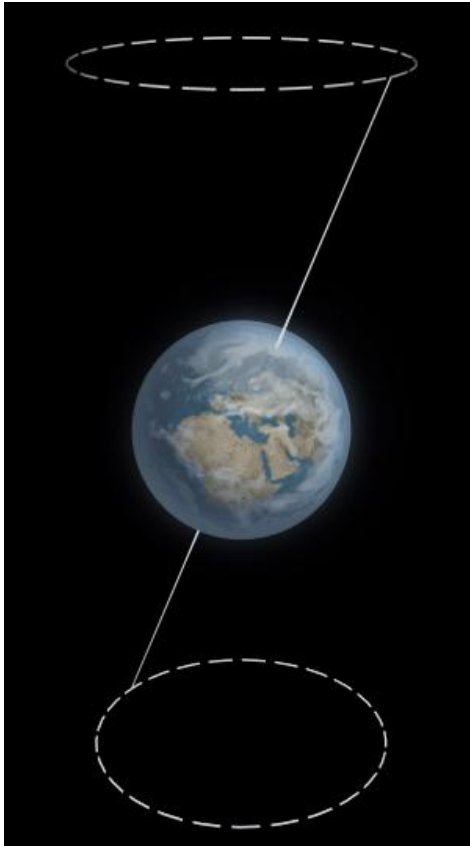
Taki ruch nazywamy precesją!

Precesja ciał (zmiana kierunku osi obracającego się ciała) – przykłady wirujący bąk (zabawka)



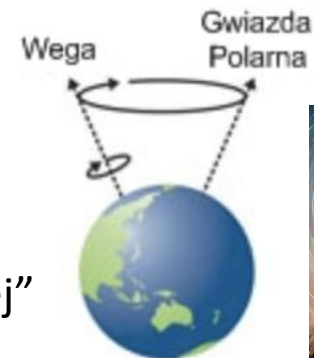
<https://www.youtube.com/watch?v=ROQzvtP1wMY>

Precesja osi ziemskiej



okres zmian = 26 tys. lat

- Przesunięcie znaków zodiaku
- Przesunięcie „gwiazdy polarnej”



Żyroskop

$$\vec{\tau}_{\text{wyp}_{zew}} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const}$$



Urządzenie utrzymujące stały kierunek osi obrotu, ponieważ wszystkie momenty sił zewnętrznych działających na obracający się układ są znacząco zniwelowane. Moment pędu jest zachowany. Warunkiem poprawnej pracy żyroskopu jest duża prędkość obrotowa i małe tarcie w łożyskach. Rozwiązanie techniczne są bardzo różne, ale wszystkie rozwiązanie oparte są o zasadę zachowania momentu pędu!

Zasada zachowania momentu pędu

$$\vec{\tau}_{\text{wyp}_{\text{zew}}} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p} = \text{const}$$

$$\vec{\tau}_{\text{wyp}_{\text{zew}}} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const}$$

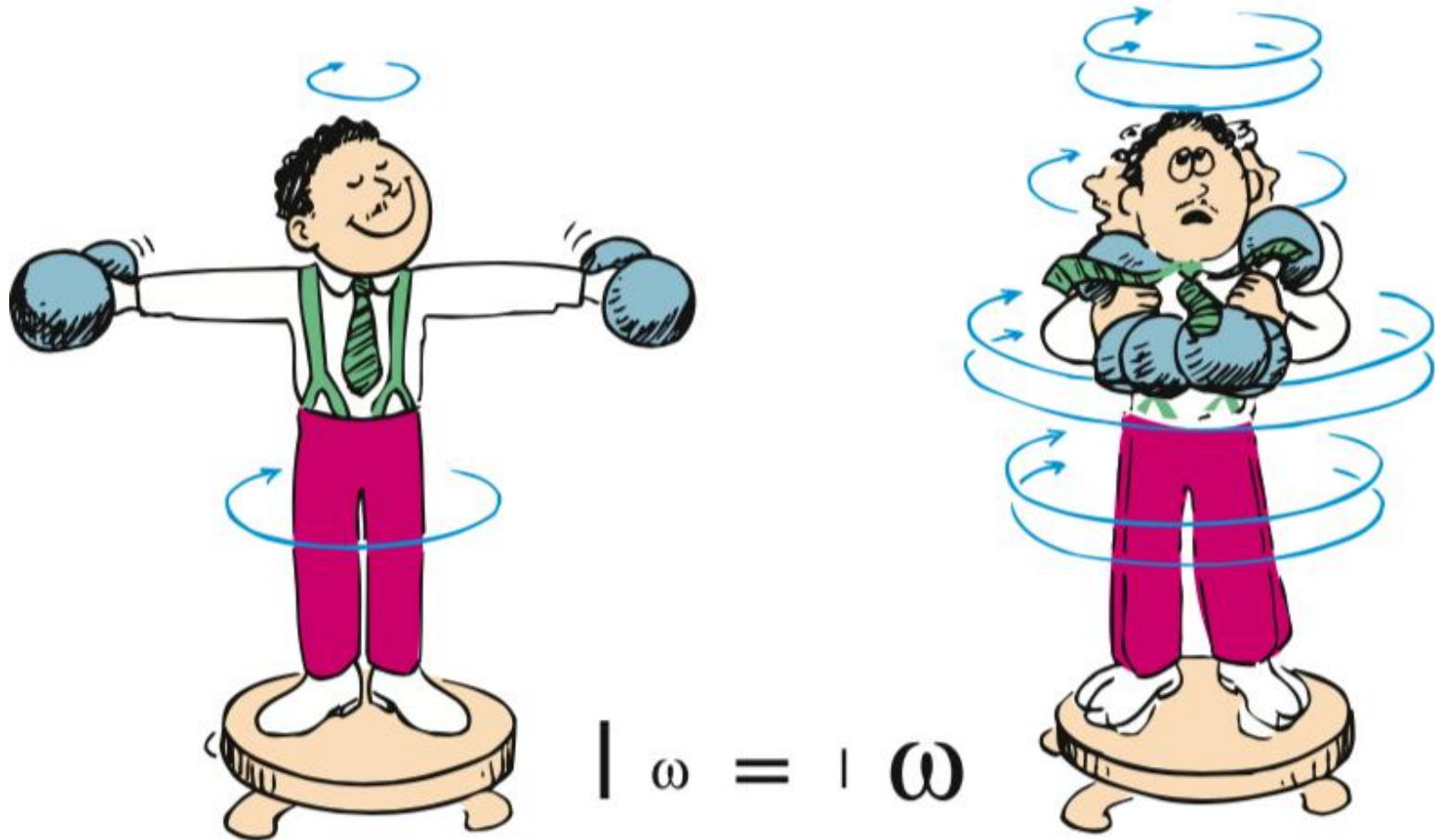
Jeżeli wypadkowy moment sił zewnętrznych działających na układ wynosi zero, to całkowity moment pędu układu jest zachowany.

Zasada zachowania momentu pędu

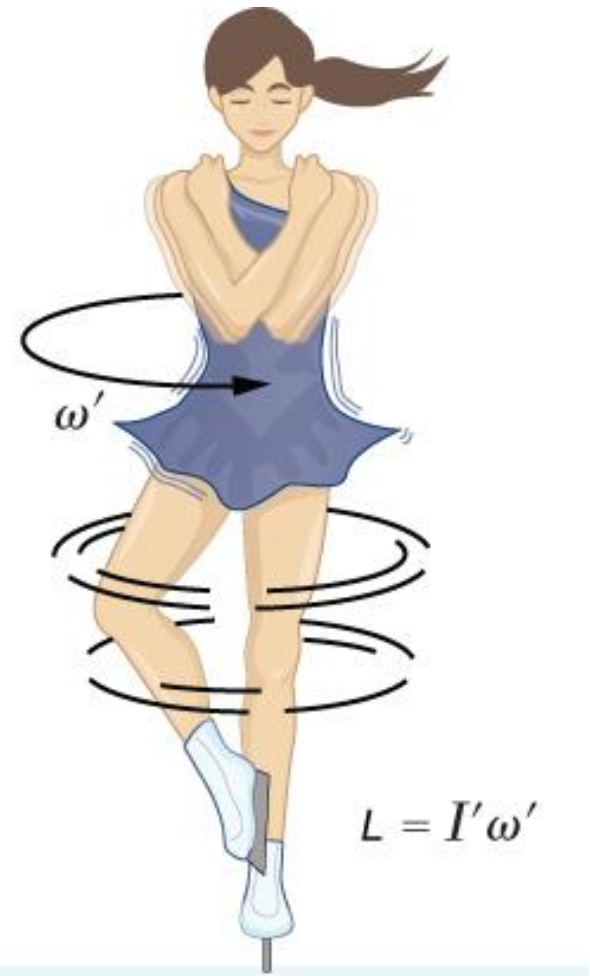
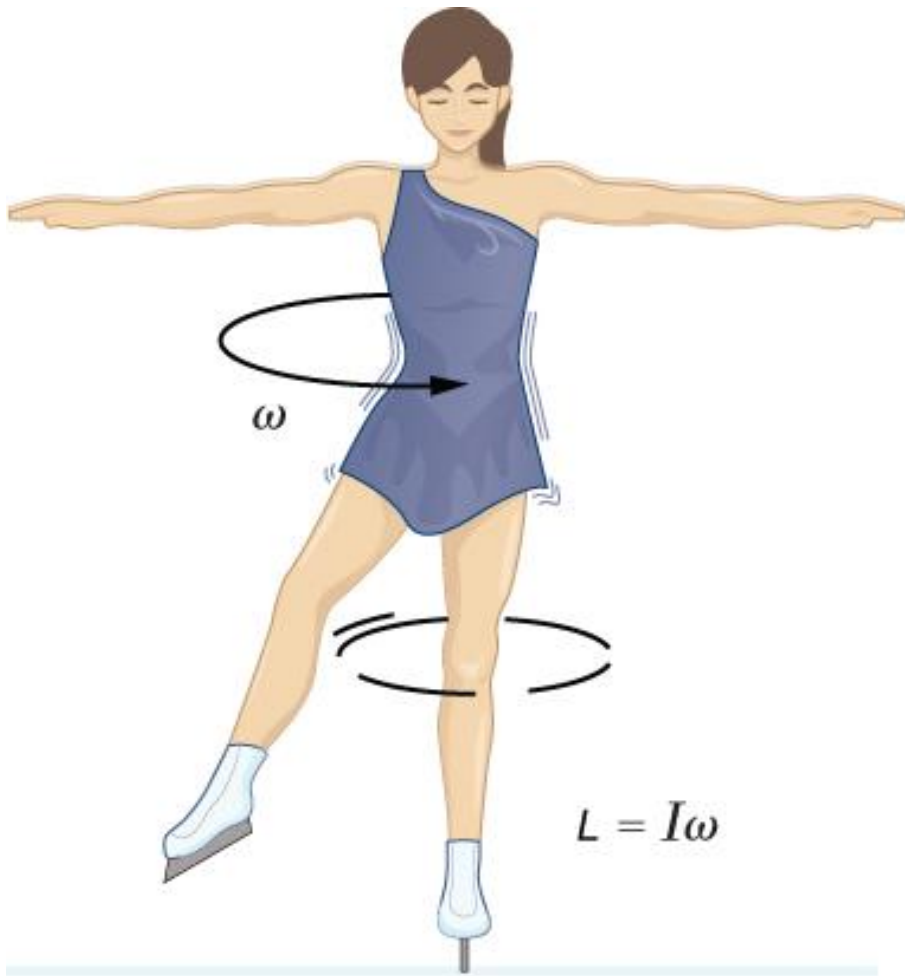


<https://www.youtube.com/watch?v=M6PuutIm5h4>

Zasada zachowania momentu pędu



Zasada zachowania momentu pędu



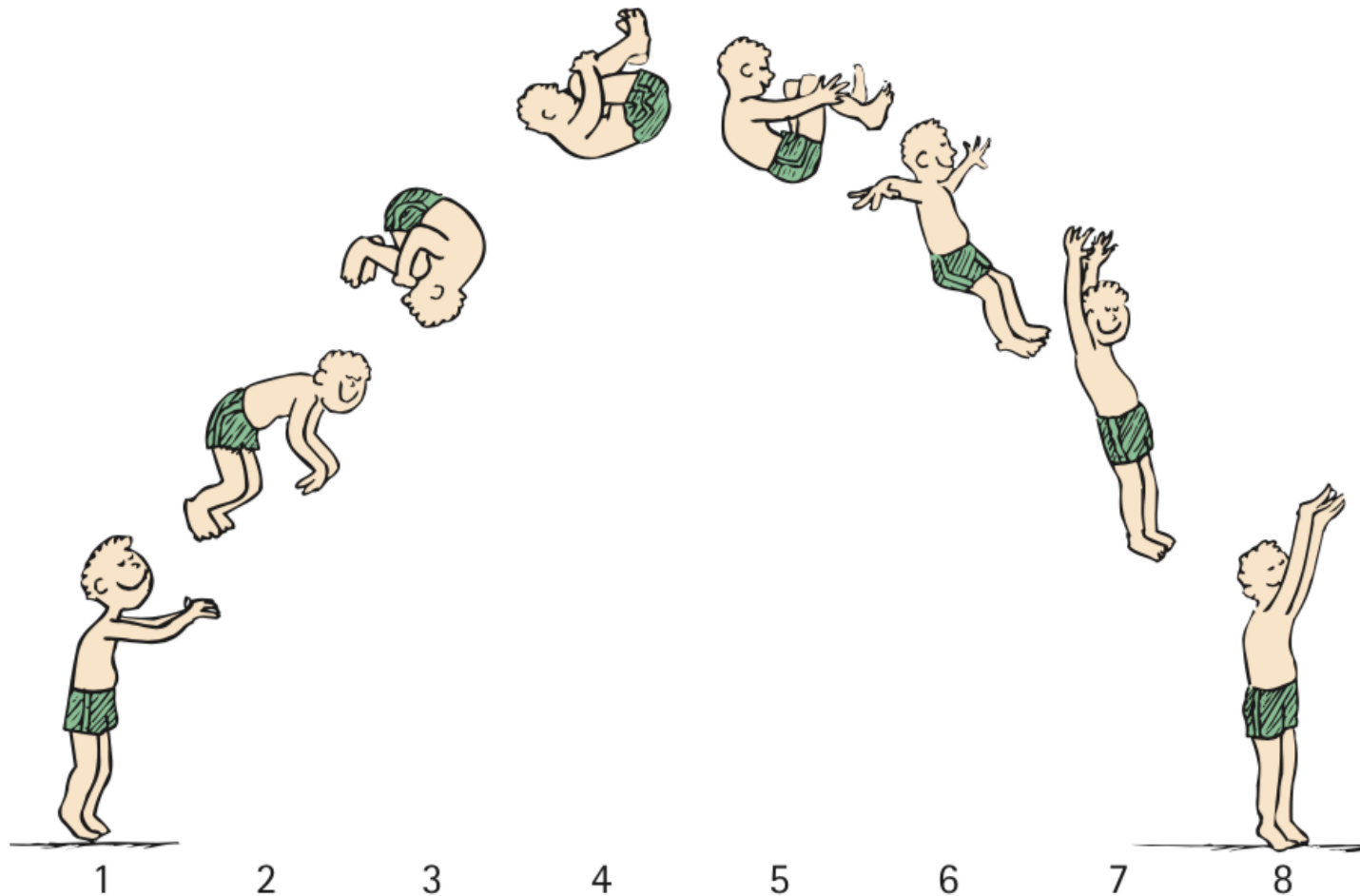
Zasada zachowania momentu pędu



<https://www.youtube.com/watch?v=FmnkQ2ytIO8>

Zasada zachowania momentu pędu

- dlaczego wzrasta prędkość kątowa obrotów skoczka?



Zasada zachowania momentu pędu

- dlaczego wzrasta prędkość kątowna obrotów skoczka do wody?



Zasada zachowania momentu pędu



<https://www.youtube.com/watch?v=vM6G-NgN0PY>

Ruch translacyjny i obrotowy bryły sztywnej – porównanie równań

Ruch postępowy (translacyjny)	Ruch obrotowy
• położenie, x • prędkość liniowa, $v = dx/dt$ • przyspieszenie, $a = dv/dt$ • masa, m • energia kinetyczna, $E_k = \frac{1}{2} mv^2$ • siła, $F = ma$ • pęd, $p = mv$	• kąt, θ • prędkość kątowna, $\omega = d\theta/dt$ • przyspieszenie kątowe, $\varepsilon = d\omega/dt$ • moment bezwładności, I • energia kinetyczna, $E_k = \frac{1}{2} I\omega^2$ • moment siły (względem osi obrotu) $\tau = I\varepsilon$ • moment pędu (wzdłuż osi obrotu) $L = I\omega$

Ćwiczenia na platformie ZPE

- Co to jest środek masy? (2,3,4)
- Masa i moment bezwładności (1-8)
- Opis ruchu bryły sztywnej (2-8)
- Jak definiuje się moment siły? (2-5)
- Zasady dynamiki ruchu obrotowego (1-3,6,7)
- Energia kinetyczna bryły sztywnej (1-4)
- Moment pędu (1-3)

Dziękuję za uwagę! 😊

Następny wykład w piątek
9.05.2025