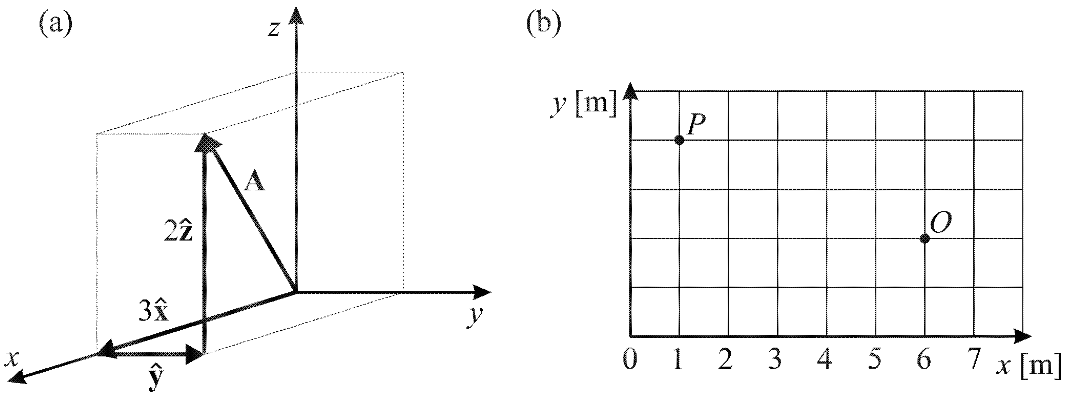
Fizyka ogólna 1. Mechanika

1 Wektory i składanie prędkości

Zad. 1.1 Na Rys. 1a dany jest wektor $\mathbf{A} = 3\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{z}}$.

(a) Proszę znaleźć długość wektora $\mathbf{A}$.
(b) Ile wynosi długość rzutu wektora $\mathbf{A}$ na płaszczyznę xy?
(c) Proszę znaleźć wektor $\mathbf{B}$ leżący w drugiej ćwiartce płaszczyzny xy o długości $\sqrt{10}$ prostopadły do wektora $\mathbf{A}$.
(d) Proszę znaleźć wektor jednostkowy $\hat{\mathbf{B}}$.
(e) Proszę znaleźć iloczyn skalarny wektora $\mathbf{A}$ przez wektor $\mathbf{C} = 4\hat{\mathbf{x}}$.
(f) Proszę znaleźć postać $\mathbf{A}$ i $\mathbf{C}$ w układzie odniesienia otrzymanym z poprzedniego układu przez obrót o $\pi/2$ w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, patrząc wzdłuż osi z.
(g) Proszę znaleźć iloczyn skalarny $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ w nowym układzie odniesienia.
(h) Proszę znaleźć iloczyn wektorowy $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ w starym i nowym układzie odniesienia.
(i) Proszę znaleźć wektor $\mathbf{A} - \mathbf{C}$.

Odp. (a) $A = \sqrt{14}$, (b) $R = \sqrt{10}$, (c) $\mathbf{B} = -\hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}}$, (d) $\hat{\mathbf{B}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}\hat{\mathbf{x}} + \frac{3\sqrt{10}}{10}\hat{\mathbf{y}}$, (e) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = 12$, (f) $\mathbf{A} = -\hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{z}}$, $\mathbf{C} = 4\hat{\mathbf{y}}$, (g) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$, (h) w starym układzie $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -6\hat{\mathbf{x}} - 2\hat{\mathbf{y}} + 10\hat{\mathbf{z}}$, w nowym układzie $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 2\hat{\mathbf{x}} - 6\hat{\mathbf{y}} + 10\hat{\mathbf{z}}$, (i) $\mathbf{A} - \mathbf{C} = -\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{z}}$.



Rys. 1: Rysunek do: (a) **Zad. 1.1** i (b) do **Zad. 1.2**.

Zad. 1.2 Na Rys. 1b zaznaczono dwa punkty O i P. Poprowadzić strzałkę od O do P umieszczając strzałkę na końcu. (a) Znaleźć składowe x i y wektora w metrach. (b) Wyrysować równolegle do tych osi drugi układ przechodzący przez punkt O; jakie są nowe składowe x' i y'? (c) Obrócić drugi układ współrzędnych o 30° w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (patrzymy z góry) i znaleźć składowe x'' oraz y''.
Odp. (a) $\overrightarrow{OP} = (-5, 2)$ m, (b) współrzędne punktów w drugim układzie wynoszą odpowiednio: $O(0, 0)$, $P(-5, 2)$, (c) $\overrightarrow{OP} = (\frac{2-5\sqrt{3}}{2}, \frac{5+2\sqrt{3}}{2})$ m.

Zad. 1.3 Układ współrzędnych zdefiniowany został w taki sposób, że oś $\hat{\mathbf{x}}$ ma kierunek na wschód, oś $\hat{\mathbf{y}}$ kierunek na północ. Niech wektor $\mathbf{A}$ ma długość 2 m i tworzy kąt 60° (na wschód) z kierunkiem na północ, natomiast wektor $\mathbf{B}$ ma długość 4 m i tworzy kąt 120° (na wschód) z kierunkiem na północ. Znaleźć współrzędne wektora $2\mathbf{A} - \mathbf{B}$.
Odp. $2\mathbf{A} - \mathbf{B} = 4\hat{\mathbf{y}}$ m.

Zad. 1.4 Dane są dwa wektory $\mathbf{A} = 3\hat{\mathbf{x}} + 4\hat{\mathbf{y}} - 5\hat{\mathbf{z}}$ oraz $\mathbf{B} = -\hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}} + 5\hat{\mathbf{z}}$. Obliczyć:

(a) Długość każdego wektora.
(b) Iloczyn skalarny $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.
(c) Kąt zawarty między nimi.
(d) Cosinusy kierunkowe każdego wektora.
(e) Sumę i różnicę wektorów $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ oraz $\mathbf{A} - \mathbf{B}$.
(f) Iloczyn wektorowy $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

Odp. (a) $A = 5\sqrt{2}$, $B = \sqrt{35}$, (b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = -16$, (c) $\cos(\measuredangle(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = -0,3825$, $\measuredangle(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 112,5°$, (d) $\cos(\measuredangle(\mathbf{A}, \hat{\mathbf{x}})) = \frac{3\sqrt{2}}{10}$, $\cos(\measuredangle(\mathbf{A}, \hat{\mathbf{y}})) = \frac{2\sqrt{2}}{5}$, $\cos(\measuredangle(\mathbf{A}, \hat{\mathbf{z}})) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(\measuredangle(\mathbf{B}, \hat{\mathbf{x}})) = -\frac{\sqrt{35}}{35}$, $\cos(\measuredangle(\mathbf{B}, \hat{\mathbf{y}})) = \frac{3\sqrt{35}}{35}$, $\cos(\measuredangle(\mathbf{B}, \hat{\mathbf{z}})) = \frac{5\sqrt{35}}{35}$, (e) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = 2\hat{\mathbf{x}} + 7\hat{\mathbf{y}}$, $\mathbf{A} - \mathbf{B} = 4\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} - 10\hat{\mathbf{z}}$, (f) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 35\hat{\mathbf{x}} - 10\hat{\mathbf{y}} + 13\hat{\mathbf{z}}$.

Zad. 1.5 Dane są dwa wektory takie, że $\mathbf{A} + \mathbf{B} = 11\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}} + 5\hat{\mathbf{z}}$ oraz $\mathbf{A} - \mathbf{B} = -5\hat{\mathbf{x}} + 11\hat{\mathbf{y}} + 9\hat{\mathbf{z}}$.

(a) Znaleźć $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$.
(b) Znaleźć kąt zawarty między $\mathbf{A}$ i $\mathbf{A} + \mathbf{B}$.

Odp. (a) $\mathbf{A} = 3\hat{\mathbf{x}} + 5\hat{\mathbf{y}} + 7\hat{\mathbf{z}}$, $\mathbf{B} = 8\hat{\mathbf{x}} - 6\hat{\mathbf{y}} - 2\hat{\mathbf{z}}$, (b) $\cos(\measuredangle(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = 0,57035$, $\varphi \approx 55°$.

Zad. 1.6 Pilot samolotu chce osiągnąć punkt 200 km na wschód od obecnego położenia. Wiatr wieje z prędkością 30 km/h z północnego wschodu. Obliczyć wektor jego prędkości w stosunku do poruszającej się masy powietrza, jeżeli według rozkładu lotu miał przybyć do miejsca przeznaczenia po 40 min.
Odp. $\mathbf{v} = (321\hat{\mathbf{x}} + 21\hat{\mathbf{y}})$ km/h, $\hat{\mathbf{x}}$ ma kierunek na wschód, $\hat{\mathbf{y}}$ ma kierunek na północ.

Zad. 1.7 Dwie cząstki zostały wysłane z jednego wspólnego źródła i po pewnym czasie przemieszczenia ich wynoszą $\mathbf{r}_1 = 4\hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}} + 8\hat{\mathbf{z}}$, $\mathbf{r}_2 = 2\hat{\mathbf{x}} + 10\hat{\mathbf{y}} + 5\hat{\mathbf{z}}$.

(a) Proszę narysować położenia cząstek i napisać wyrażenie na przemieszczenie cząstki 2 względem cząstki 1, tj. $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.
(b) Proszę znaleźć długość każdego z wektorów.
(c) Proszę obliczyć kąty między wszystkimi możliwymi parami tych wektorów.
(d) Proszę obliczyć rzut $\mathbf{r}_{12}$ na $\mathbf{r}_2$.
(e) Proszę obliczyć iloczyn wektorowy $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$.

Odp. (a) $\mathbf{r}_{12} = -2\hat{\mathbf{x}} + 7\hat{\mathbf{y}} - 3\hat{\mathbf{z}}$, (b) $r_1 = \sqrt{89} = 9,43$, $r_2 = \sqrt{129} = 11,36$, $r_{12} = \sqrt{62} = 7,87$, (c) $\cos(\measuredangle(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)) = 0,728$, $\measuredangle(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 43°$, $\cos(\measuredangle(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_{12})) = -0,148$, $\measuredangle(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 98°$, $\measuredangle(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_{12}) = 55°$, (d) $\mathbf{r}_r = 0,4\mathbf{r}_2$, (e) $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = -65\hat{\mathbf{x}} - 4\hat{\mathbf{y}} + 34\hat{\mathbf{z}}$.

Zad. 1.8 Dwie cząstki 1 i 2 poruszają się wzdłuż osi x i y z prędkościami $\mathbf{v}_1 = 2\hat{\mathbf{x}}$ cm/s i $\mathbf{v}_2 = 3\hat{\mathbf{y}}$ cm/s. W chwili $t = 0$ s są one w punktach o współrzędnych: $x_1 = -3$ cm, $y_1 = 0$ cm, $x_2 = 0$ cm, $y_2 = -3$ cm.

(a) Znaleźć wektor $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, który określi położenie cząstki 2 względem 1 w funkcji czasu.
(b) Kiedy i gdzie obie cząstki będą najbliżej siebie?

Odp. (a) $\mathbf{r} = (3 - 2t)\hat{\mathbf{x}} + (3t - 3)\hat{\mathbf{y}}$ cm, (b) cząstki będą najbliżej względem siebie w chwili $t = 1,15$ s, co odpowiada położeniu cząstki 1: $\mathbf{r}_1 = -0,7\hat{\mathbf{x}}$ cm, i cząstki 2: $\mathbf{r}_2 = 0,5\hat{\mathbf{y}}$ cm.

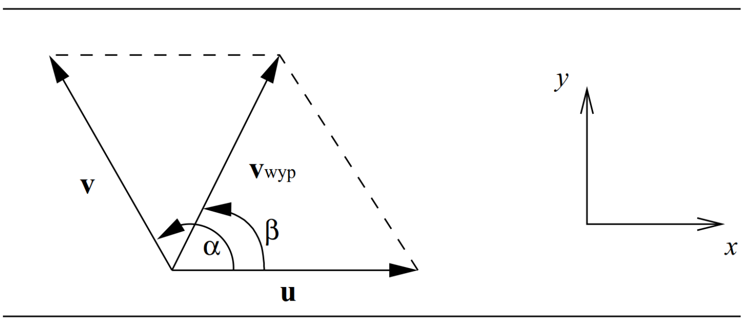
Zad. 1.9 Samochód jechał z miasta A na wschód w czasie $t_1 = 2$ h ze stałą prędkością $v_1 = 60$ km/h. Następnie skręcił na południe i po $t = 3$ h od rozpoczęcia ruchu (z punktu A) przybył do miasta B. Z jaką prędkością jechał samochód na południe, jeśli wiadomo, że najkrótsza droga (odległość) między tymi miastami jest równa $s = 150$ km?
Odp. $v_2 = 90$ km/h.

Zad. 1.10 Dwa okręty wyruszyły jednocześnie z tego samego miejsca w drogę w kierunkach do siebie prostopadłych, jeden z prędkością $v_1 = 30$ km/h, drugi z prędkością $v_2 = 40$ km/h. Obliczyć prędkość wzajemnego oddalania się okrętów oraz ich odległość po upływie 20 min.

Zad. 1.11 Łódź płynie z prędkością 2 m/s względem wody prostopadle do prądu rzeki. Prędkość prądu rzeki wynosi 1 m/s. Znaleźć całkowitą prędkość v łodzi oraz kierunek tego wektora względem brzegów rzeki.
Odp. $v = \sqrt{5}$ m/s. Wektor prędkości tworzy z brzegiem, od którego łódź się oddala kąt $\alpha = 63°30'$.

Zad. 1.12 Dwa samoloty startują jednocześnie z tego samego miejsca w dwóch prostopadłych do siebie kierunkach. Prędkość pierwszego wynosi $v_1 = 300$ km/h, drugiego zaś $v_2 = 400$ km/h. Jak zwiększa się odległość pomiędzy samolotami? Jaka jest odległość s pomiędzy samolotami, kiedy pierwszy z nich przemierzył drogę 900 km?
Odp. Odległość pomiędzy samolotami zwiększa się o 500 km w ciągu godziny. $s = 1500$ km.

Zad. 1.13 Łódź porusza się po rzece z prędkością $\mathbf{v}$ względem wody, pod kątem α do prądu, którego prędkość wynosi $\mathbf{u}$ (Rys. 2). Znaleźć prędkość łodzi względem brzegu.
Odp. $v_{wyp} = \sqrt{v^2 + u^2 + 2vu\cos\alpha}$, $\sin\beta = \frac{v\sin\alpha}{\sqrt{v^2+u^2+2vu\cos\alpha}}$.



Rys. 2: Rysunek do **Zad. 1.13**.

Zad. 1.14 Przystanie przeprawy promowej znajdują się naprzeciw siebie po obu stronach rzeki płynącej z prędkością $0,5$ m/s. Jaki kurs powinien obrać przewoźnik, żeby przepłynąć rzekę po linii prostej od jednej przystani do drugiej. Z jaką prędkością v będzie poruszać się prom w poprzek rzeki. Prom porusza się z prędkością 1 m/s względem rzeki.
Odp. Obiera kurs w górę rzeki tworzący kąt 30° z prostą łączącą przystanie, $v = 0,87$ m/s.

Zad. 1.15 Okręt płynie na zachód z prędkością $3,66$ m/s. Z południowego zachodu wieje wiatr z prędkością $7,07$ m/s. Jaką prędkość wiatru v zarejestrują przyrządy umieszczone na okręcie? Jaki wskażą kierunek wiatru względem kursu okrętu.
Odp. $v = 10$ m/s, kąt 150° względem kursu okrętu.

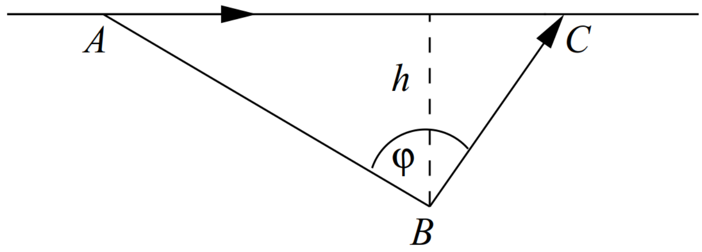
Zad. 1.16 Na wózku poruszającym się ze stałą prędkością po poziomej powierzchni umieszczono rurkę. Pod jakim kątem względem pionu należy zorientować rurkę, aby krople padającego pionowo deszczu przelatywały przez rurkę nie dotykając jej wewnętrznych ścianek? Przyjąć, że prędkość kropel deszczu jest stała.
Odp. Rurka powinna być odchylona od pionu w kierunku ruchu wózka o kąt $\varphi = \arctan(v_w/v_k)$.

Zad. 1.17 Na kartce papieru zaznaczono kąt prosty. Prostopadle do dwusiecznej kąta przesuwany jest z prędkością 10 cm/s przymiar. Jego końce przecinają ramiona kąta. Z jaką prędkością poruszają się punkty przecięcia ramion z przymiarem?
Odp. $14,1$ cm/s.

Zad. 1.18 Sterowiec ma dotrzeć do celu oddalonego o 36 km na północ. W czasie lotu wieje wiatr z północnego zachodu pod kątem 30° na południe od równoleżnika z prędkością 5 m/s. Sterowiec jest w stanie lecieć z prędkością $8,66$ m/s. Jaki kierunek lotu powinien obrać sterowiec aby dotrzeć do celu? Po jakim czasie pokona zadaną trasę? Ile czasu będzie trwała droga powrotna?
Odp. 30° na zachód od linii północ-południe, $v_{wyp} = 5$ m/s, $t_1 = 2$ h, drogę powrotną pokona w czasie $t_2 = 1$ h.

Zad. 1.19 Dwa okręty poruszają się w przeciwnych kierunkach z prędkościami v_1 oraz v_2. Pod jakim kątem do obranego kursu należało z jednego z okrętów wystrzelić pocisk, by dotarł do drugiego z nich, jeśli wystrzał nastąpi w chwili, gdy okręty znajdują się na prostej prostopadłej do kierunku ruchu obu okrętów? Prędkość pocisku jest stała i wynosi v_0.
Odp. Pod kątem $\varphi = \arccos\left[(v_1 + v_2)/v_0\right]$.

Zad. 1.20 Człowiek znajduje się w odległości $h = 50$ m od prostej drogi, po której nadjeżdża autobus z prędkością $v_1 = 10$ m/s (Rys. 3). W jakim kierunku powinien biec człowiek, aby dogonić autobus, jeżeli autobus znajduje się w odległości $l = |AB| = 200$ m od człowieka i jeżeli człowiek może biec z prędkością $v_2 = 3$ m/s? W jakim kierunku powinien biec, by znaleźć się na drodze z maksymalnym wyprzedzeniem względem autobusu? Jaka jest najmniejsza prędkość, z którą powinien biec człowiek, aby dogonić autobus?
Odp. $\sin\varphi \geq \frac{hv_1}{lv_2} \approx 0,833$, skąd $56^\circ 24' \geq \varphi \geq 123^\circ 36'$, $v_{2min} = \frac{hv_1}{l} = 2,5$ m/s.



Rys. 3: Rysunek do **Zad. 1.20**.

2 Ruch jednowymiarowy

Zad. 2.1 Samochód po ruszeniu z miejsca przebywa drogę $s = 100$ m w czasie $t = 10$ s. Ile wynosi jego stałe przyspieszenie a? Ile wynosi jego prędkość końcowa v_k?
Odp. $a = 2$ m/s^2, $v_k = 20$ m/s.

Zad. 2.2 Kula przebija deskę o grubości $d = 2$ cm. Prędkość kuli do chwili uderzenia wynosi $v_0 = 500$ m/s, a po wylocie $v_1 = 100$ m/s. Ile wynosi opóźnienie kuli podczas przebijania drewna i jak długo trwa ten ruch? Ruch kuli w drewnie traktujemy jako jednostajnie opóźniony.
Odp. $a = -6 \times 10^6$ m/s^2, $t \approx 0,66 \times 10^{-4}$ s.

Zad. 2.3 Kula leci z prędkością 400 m/s, uderza w nasyp gruntowy i przenika na grunt na głębokość 36 cm. Ile czasu trwa ruch kuli w nasypie i jakie jest przyspieszenie a? Ile wynosi prędkość kuli v_1 na głębokości 18 cm? Na jakiej głębokości s_2 prędkość kuli zmniejszy się trzykrotnie?
Odp. $t = 1,8 \times 10^{-3}$ s, $a = -\frac{2}{9} \times 10^6$ m/s^2, $v_1 \approx 282$ m/s, $s_2 = 32$ cm.

Zad. 2.4 Samochód rusza z miejsca w momencie zmiany świateł na zielone z przyspieszeniem $a = 2$ m/s^2. Ciężarówka porusza się ze stałą prędkością $v = 20$ m/s w tym samym kierunku wyprzedza samochód w momencie, gdy ten rusza. Po jakim czasie t samochód dogoni ciężarówkę? W jakiej odległości s od przejścia ze światłami to nastąpi? Jaką prędkość v_1 ma samochód w tym momencie?
Odp. $t = 2v/a = 20$ s, $s = 2v^2/a = 400$ m, $v_1 = at = 40$ m/s.

Zad. 2.5 Ciało przebyło jedną czwartą drogi ze stałą prędkością $v_1 = 2$ m/s, następnie trzecią część pozostałej drogi - ze stałą prędkością $v_2 = 1$ m/s, a końcowy odcinek drogi ze stałym przyspieszeniem uzyskawszy prędkość końcową $v_3 = 7$ m/s. Oblicz średnią prędkość v_{sr} dla całego ruchu. Oblicz także przebytą przez ciało drogę s, jeżeli wiadomo, że na ostatnim odcinku przyspieszenie było równe $a = 1$ m/s^2.
Odp. $v_{sr} = 2$ m/s, $s = 48$ m.

Zad. 2.6 W czasie $t_1 = 2$ s ciało przemieszczało się ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem $a_1 = 2$ m/s^2, a następnie - jednostajnie opóźnionym z przyspieszeniem $|a_2| = 0,5$ m/s^2. Znaleźć całkowity czas ruchu t_c, jaki upłynął do chwili zatrzymania się ciała, przebytą przez nie w tym czasie drogę s i średnią prędkość v_{sr} dla czasu t_c. Znajdź średnie przyspieszenie a_{sr} w przedziale czasu od $t = t_0$ do $t = t_c/2$.
Odp. $t_c = (1 + a_1/|a_2|)t_1 = 10$ s, $s = 20$ m, $v_{sr} = 2$ m/s, $a_{sr} = 0,5$ m/s^2.

Zad. 2.7 Ciało porusza się ze stałym przyspieszeniem. Jego prędkość w chwili $t_1 = 5$ s jest równa $v_1 = 3$ m/s, a w chwili $t_2 = 6$ s jest równa zeru. Oblicz prędkość v_0 ciała w chwili $t = 0$ i drogę s przebytą przez ciało w czasie od $t = 0$ do $t = t_2$.
Odp. $v = 18$ m/s, $s = 54$ m.

Zad. 2.8 Sprinter może biec z prędkością $v_s = 36$ km/h. Zakładając, że jego przyspieszenie a jest stałe, i że osiąga on tę prędkość w ciągu $t_1 = 2$ s obliczyć, jaki dystans przebędzie on w ciągu $t_2 = 10$ s. Uwaga. Rozwiązać to zadanie dwiema metodami: wykonując odpowiednie obliczenia oraz sprawdzając wykres funkcji $v = v(t)$ i znajdując pole pod otrzymaną krzywą.
Odp. $s = 90$ m.

Zad. 2.9 Ciało, które porusza się ruchem jednostajnie opóźnionym, przebywa w czasie $t = 8$ s drogę $s = 180$ m i ma na końcu tego odcinka drogi prędkość $v_k = 5$ m/s. Wyznaczyć prędkość początkową v_0 i przyspieszenie ruchu ciała.
Odp. $v_0 = 40$ m/s, $a = -4,37$ m/s^2.

Zad. 2.10 Od jadącego pociągu odczepił się ostatni wagon. Pociąg nadal jedzie z tą samą prędkością. Jaka jest względna droga s/s_1 przebyta przez pociąg i wagon do chwili zatrzymania się wagonu? Zakładamy, że wagon porusza się ruchem jednostajnie opóźnionym.
Odp. $s/s_1 = 2$.

Zad. 2.11 Ciało poruszające się ze stałym przyspieszeniem przebywa kolejno dwa jednakowe odcinki drogi $s = 10$ m. Znaleźć przyspieszenie ciała a oraz jego prędkość v_0 na początku pierwszego odcinka, jeżeli pierwszy odcinek ciało przebywa w czasie $t_1 = 1,06$ s, a drugi - w czasie $t_2 = 2,2$ s?
Odp. $a = -3$ m/s^2, $v_0 \approx 11$ m/s.

Zad. 2.12 Ciało poruszające się ruchem jednostajnie przyspieszonym, w czwartej sekundzie od początku ruchu przebywa drogę równą $s = 35$ m. Z jakim przyspieszeniem porusza się ciało? Wyznaczyć prędkość ciała w końcu czwartej i dziesiątej sekundy ruchu. Jaką drogę przebywa ciało w ciągu dwóch i pięciu sekund? Jaką drogę przebędzie ciało w ciągu drugiej i trzeciej sekundy?
Odp. $a = 10$ m/s^2, $v_4 = 40$ m/s, $v_{10} = 100$ m/s, $s_2 = 20$ m, $s_5 = 125$ m, $s_2 - s_1 = 15$ m, $s_3 - s_2 = 25$ m.

Zad. 2.13 Elektron poruszający się z prędkością $4,0 \times 10^6$ m/s w prawo wpada w przestrzeń pomiędzy dwiema pionowymi, równoległymi, naładowanymi elektrycznie płytkami metalowymi odległymi od siebie o $d = 2$ cm. W obszarze tym elektron porusza się ze stałym przyspieszeniem $a = 7,9 \times 10^{14}$ m/s^2 skierowanym w prawo. Z jaką prędkością elektron uderzy w prawą płytkę? Ile czasu upłynie do momentu uderzenia? Załóżmy teraz, że zmieniono bieguny baterii, do której podłączone są płytki. Elektron ponownie wpada w obszar między nimi z lewej strony z tą samą prędkością co uprzednio. Jego stałe przyspieszenie jest równe $7,9 \times 10^{14}$ m/s^2. Na jaką odległość od lewej płytki odleci elektron zanim zostanie zawrócony? Po jakim czasie elektron powróci do lewej płytki? Naszkicuj zależność położenia x elektronu od czasu dla obu przypadków.

Zad. 2.14 Ciało puszczono swobodnie w próżni z wysokości h. Naszkicować zależność h od czasu t. Znaleźć średnią prędkość ciała podczas spadania. Dla uproszczenia przyjąć $g = 10$ m/s^2.

Zad. 2.15 Ciało zostało wyrzucone pionowo w górę z prędkością początkową $v_0 = 30$ m/s. Na jaką wysokość wzniesie się ono po czasie $t_1 = 4$ s? Jaka będzie jego prędkość w tym momencie? Jaką maksymalną wysokość osiągnie? Po jakim czasie t_2 od rozpoczęcia ruchu powróci na ziemię? Z jaką prędkością uderzy o ziemię? Narysować zależność położenia y, drogi s oraz prędkości v_y od czasu. Dla uproszczenia przyjąć wartość przyspieszenia ziemskiego $g = 10$ m/s^2.
Odp. $h(t_1 = 4 \text{ s}) = 40$ m, $v(t_1 = 4 \text{ s}) = -10$ m/s, $h_{max} = 45$ m, $t_2 = 6$ s, $v_k = -30$ m/s

Zad. 2.16 Ciało spadające swobodnie bez prędkości początkowej przebyło w ciągu ostatniej sekundy ruchu 3/4 całej drogi. Ile czasu spadało ciało?
Odp. $t = 2t_1 = 2$ s.

Zad. 2.17 Ciało zostało rzucone pionowo do góry z wysokości H z prędkością początkową v_0. Jednocześnie z powierzchni Ziemi rzucono do góry drugie ciało z prędkością początkową v_0'. Po jakim czasie oba ciała spotkają się?
Odp. $t = H/(v_0' - v_0)$.

Zad. 2.18 Kamień spada z wieży. W chwili, gdy przebył on drogę równą l, z punktu położonego o wysokość h poniżej wierzchołka wieży zaczął spadać drugi kamień. Oba kamienie docierają do Ziemi w tym samym momencie. Wykazać, że wysokość wieży jest równa $H = \frac{(l+h)^2}{4l}$.

Zad. 2.19 Ciało spada swobodnie z wysokości $h = 10$ m. W tej samej chwili drugi kamień rzucono z wysokości $H = 20$ m pionowo w dół. Oba kamienie dotarły jednocześnie na Ziemię. Wyznaczyć prędkość początkową v_0 drugiego kamienia.
Odp. $v_0 = 7$ m/s.

Zad. 2.20 Dwa ciała zostały rzucone pionowo do góry z jednego punktu z tą samą prędkością początkową $v_0 = 30$ m/s w odstępie czasu $\Delta t = 0,5$ s. Po jakim czasie (licząc od chwili wyrzucenia pierwszego ciała) i na jakiej wysokości spotkają się? Przyjąć $g = 10$ m/s^2
Odp. $t = 3,25$ s, $h \approx 44,7$ m.

Zad. 2.21 Dwa kamienie spadają do szybu. Drugi kamień zaczął spadać o 1 s później niż pierwszy. Wyznaczyć ruch jednego kamienia względem drugiego.
Odp. Względne przyspieszenie jest równe zeru, względny ruch kamieni jest jednostajny, z prędkością liczbową równą g.

Zad. 2.22 Z wieży rzucono jednocześnie dwa ciała z jednakową prędkością początkową v_0 - jedno pionowo do góry, drugie, pionowo w dół. Jak z upływem czasu zmienia się odległość między tymi ciałami?
Odp. $s = 2v_0t$.

Zad. 2.23 Cząstka porusza się wzdłuż osi x w taki sposób, że jej położenie jako funkcję czasu opisuje formuła $x(t) = 3 - 4t^2$ [m]. Obliczyć prędkość i przyspieszenie tej cząstki w chwilach $t = 3$ s oraz $t = 5$ s.
Odp. $v(t = 3s) = -24$ m/s, $v(t = 5s) = -40$ m/s, $a(t = 3s) = a(t = 5s) = -8$ m/s^2.

Zad. 2.24 Położenie cząstki na osi x opisuje funkcja $x(t) = 3t + 5t^3$ (x w metrach, t w sekundach). Jakie są wymiary stałych występujących w tym wzorze? Obliczyć przybliżoną wartość prędkości chwilowej cząstki w chwili $t = 5$ s obliczając jej prędkość średnią pomiędzy $t = 4$ i 5 s. Obliczyć dokładną wartość prędkości chwilowej w chwili $t = 5$ s.
Odp. $[3] =$ m/s, $[5] =$ m/s^3, $v_{sr} = 308$ m/s, $v(t = 5\text{ s}) = 378$ m/s.

Zad. 2.25 Podane niżej wzory opisują położenie x cząstki w funkcji czasu t (A, B, C - stałe): (a) $x(t) = At^3$, (b) $x(t) = A\cos Bt$, (c) $x(t) = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$. Obliczyć prędkość i przyspieszenie cząstki jako funkcje czasu. Przedyskutować wymiary stałych występujących we wzorach.
Odp. (a) $v(t) = 3At^2$, $a(t) = 6At$, (b) $v(t) = -AB\sin Bt$, $a(t) = -AB^2\sin Bt$, (c) $v(t) = B + 2Ct + 3Dt^2$, $a(t) = 2C + 6Dt$.

Zad. 2.26 W czasie jazdy próbnej prototyp samochodu poruszał się w taki sposób, że pomiędzy startem a 18 sekundą ruchu jego położenie na torze można było opisać w przybliżeniu formułą $s = 5t^2 + \frac{1}{3t^3} - \frac{1}{50t^4}$ (t w sekundach, s w metrach). Ile wynosiła maksymalna prędkość oraz maksymalne przyspieszenie i kiedy samochód je osiągnął?

Zad. 2.27 Odległość do najbliższej gwiazdy, *Proxima Centauri*, jest równa 4,22 lat świetlnych. Obliczyć czas podróży z Ziemi na tę gwiazdę, gdyby pojazd kosmiczny poruszał się w sposób następujący: po stracie z Ziemi pojazd porusza się z przyspieszeniem $0,01g$ do momentu osiągnięcia prędkości równej 0,1 prędkości światła, następnie podróżuje z tą prędkością ruchem jednostajnym, a w końcu ruchem jednostajnie opóźnionym z opóźnieniem $0,01g$ tak, by osiąść na powierzchni gwiazdy z prędkością równą zeru.

Zad. 2.28 Kometa porusza się ku Słońcu po linii prostej z prędkością daną wzorem $v = -\sqrt{c + \frac{b}{x}}$, gdzie x jest położeniem komety mierzonym od środka Słońca (c i b stałe). Obliczyć przyspieszenie $a(x)$ komety.
Wskazówka: Zauważyć, że w treści zadania prędkość jest złożoną funkcją czasu $v = v(x(t))$ i wykorzystać ten fakt do obliczenia $a = \frac{dv}{dt}$.
Odp. $a = -\frac{b}{2x^2}$.

Zad. 2.29 Położenie cząstki poruszającej się wzdłuż osi x opisuje funkcja czasu $x(t) = At^2 - Bt^4$ m. Cząstka rozpoczęła ruch w chwili $t_0 = 0$ s z przyspieszeniem początkowym $a_0 = 4$ m/s^2, a w chwili $t_1 = 1$ s jej przyspieszenie było równe $a_1 = -8$ m/s^2. Obliczyć wartość stałych A i B. Jaki jest wymiar każdej z nich? Obliczyć prędkość średnią cząstki w ciągu pierwszej sekundy ruchu, tzn. między t_0 oraz t_1. Obliczyć przyspieszenie średnie cząstki w ciągu drugiej sekundy ruchu, tzn. między t_1 oraz t_2. Obliczyć całkowitą drogę przebytą przez cząstkę w ciągu pierwszych trzech sekund ruchu, tzn. od chwili t_0 do $t_3 = 3$ s.
Odp. $A = 2$ m/s^2, $B = 1$ m/s^4, $v_{sr}(t_1 - t_0) = 1$ m/s, $a_{sr}(t_2 - t_1) = -24$ m/s^2, $s = 65$ m.

Zad. 2.30 Prędkość i położenie cząstki związane są formułą $v = A/x$, gdzie $A =$ const. Wyznaczyć tę stałą oraz prędkość cząstki w chwili $t = 4$ s, jeżeli w chwili $t = 0$ s $v_0 = 0,6$ m/s oraz $x_0 = 5$ m.
Odp. $v(t) = \frac{A}{\sqrt{2At + x_0^2}}$, $A = 3$ m^2/s, $v(t = 4\text{ s}) = 3/7$ m/s.

Zad. 2.31 Ciało porusza się z przyspieszeniem $a = -bv$, $b =$ const. W chwili $t = 0$ s ciało znajdowało się w położeniu $x = 0$ m i poruszało się z prędkością v_0. Proszę wyznaczyć równania opisujące prędkość i położenie ciała w funkcji czasu. Proszę wyznaczyć wartość stałej b, jeśli prędkość w chwili $t = 10$ s wynosiła $v = v_0/e$.
Odp. $v(t) = v_0e^{-bt}$, $x(t) = \frac{v_0}{b}\left(1 - e^{-bt}\right)$, $b = \frac{1}{10}$

Zad. 2.32 Przyspieszenie punktu materialnego poruszającego się po linii prostej wynosi $a = k^2e^{-kt}$. Obliczyć $v(t)$, oraz $x(t)$ jeżeli w chwili $t = 0$ s $v = v_00$ m/s oraz $x = 0$ m. $k =$ const.

Zad. 2.33 Przyspieszenie punktu materialnego poruszającego się po linii prostej wynosi $A\omega^2\sin\omega t$. Obliczyć $v(t)$, oraz $x(t)$ jeżeli w chwili $t = 0$ s $v = 0$ m/s oraz $x = x_0$. $\omega =$ const, $A =$ const.

Zad. 2.34 Prędkość cząstki w ruchu prostoliniowym dana jest formułą $v = 100 - t^2$ m/s. W chwili $t = 2$ s jej położenie liczone od pewnego punktu wynosi $x_0 = 200$ m. Jakie jest położenie i przyspieszenie cząstki w chwili $t = 5$ s?
Odp. $a(t) = -2$ m/s^2, $x(t) = 100t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{8}{3}$ m, $a(t = 5\text{ s}) = -10$ m/s^2, $x(t = 5\text{ s}) = 461$ m

Zad. 2.35 W trakcie prób samochód porusza się w przedziale czasu od $t = 2$ s do $t = 5$ s z przyspieszeniem $a = 2t$ m/s^2. W chwili $t = 2$ s jego prędkość jest równa 150 km/h. Jaka jest jego prędkość w chwili $t = 4$ s? Jaką drogę przebywa w przedziale czasu od $t = 2$ s do $t = 5$ s?

Zad. 2.36 Cząstka spoczywająca w chwili początkowej $t = 0$ w początku układu współrzędnych zaczyna poruszać się ruchem prostoliniowym z prędkością, która zależy od czasu w sposób następujący: $v(t) = 4$ m/s dla $0 \le t < 5$ s, $v(t) = [20 - 2(t - 5)]$ m/s dla $5 \le t < 10$ s, $v(t) = 10$ m/s dla $t \ge 10$ s. Obliczyć przyspieszenie cząstki jako funkcję czasu. Znaleźć położenie cząstki w chwilach $t = 3$, 8 oraz 13 s.

Zad. 2.37 Pokazać, że jeżeli przyspieszenie jest daną funkcją prędkości $a = a(v)$, to:

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{a(v)} = \int_{t_0}^{t} dt; \qquad \int_{v_0}^{v} \frac{v dv}{a(v)} = \int_{x_0}^{x} dx$$

Zad. 2.38 Pokazać, że jeżeli przyspieszenie jest daną funkcją położenia $a = a(x)$, to:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{v(x)} = \int_{t_0}^{t} dt; \qquad \int_{v_0}^{v} v dv = \int_{x_0}^{x} a(x) dx$$

Zad. 2.39 Przyspieszenie punktu materialnego jest dane wzorem $a = 3x$ m/s^2, gdzie x oznacza położenie punktu. Obliczyć prędkość punktu gdy znajduje się on w położeniu $x = 3$ m, jeżeli w chwili $t = 0$ s $v_0 = 4$ m/s oraz $x_0 = 0$ m.

Zad. 2.40 Przyspieszenie grawitacyjne Ziemi jest skierowane ku jej środkowi, a wartość jego dana jest wzorem $a = \frac{gR^2}{r^2}$, w którym R oznacza promień Ziemi, r odległość od jej środka, g przyspieszenie na powierzchni Ziemi. Jaką prędkość v_0 w kierunku od środka Ziemi należy nadać pojazdowi kosmicznemu znajdującemu się w punkcie $r - r_0$, aby przenieść go do punktu $r = h$? Obliczyć tę prędkość dla $r_0 = R$ oraz $h \to \infty$. Jak można zinterpretować ten wynik?

Zad. 2.41 Prędkość i położenie cząstki związane są formułą $v^2 = A/x$ m^2/s^2, gdzie $A = \text{const}$. Wyznaczyć tę stałą oraz prędkość cząstki w chwili $t = 2$ s, jeżeli w chwili $t = 0$ $v_0 = 5$ m/s oraz $x_0 = 5$ m.
Odp. $v(t) = \sqrt{A}\left(\frac{3}{2}\sqrt{A}t + x_0^{3/2}\right)^{-1/3}$, $A = 125$ m^3/s^2, $v(t = 2\text{ s}) = 500^{1/3}$ m/s.

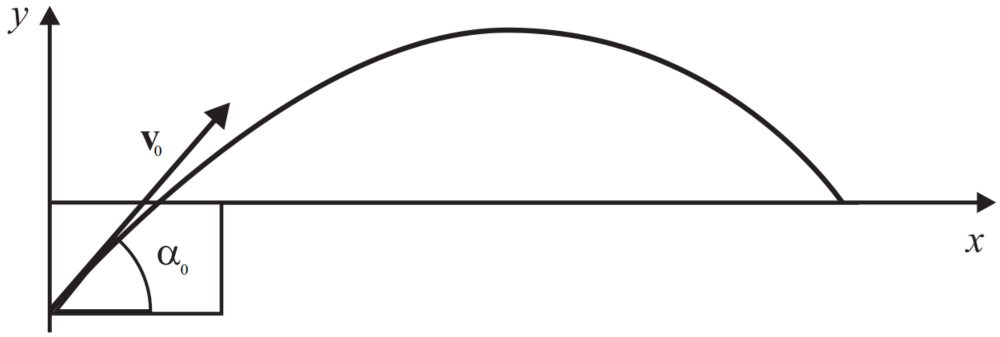
Zad. 2.42 Po włączeniu hamulców pojazd porusza się z opóźnieniem $a = 0,002v^2$ m/s^2 (v oznacza prędkość pojazdu). Wciągu jakiego czasu prędkość pojazdu zmaleje od 180 km/h do 10 m/s i jaki dystans przebędzie pojazd w tym czasie?

Zad. 2.43 Do tunelu przewierconego przez kulę ziemską i przechodzącego przez jej środek wrzucono kamień. Przyspieszenie grawitacyjne wewnątrz Ziemi jest dane wzorem $a = -\frac{gr}{R}$, gdzie r jest odległością mierzoną od środka Ziemi, R - promieniem Ziemi, g - przyspieszeniem grawitacyjnym na jej powierzchni. Pomijając wszelkie ewentualne opory występujące podczas ruchu, obliczyć prędkość ciała, gdy doleci ono do środka Ziemi.

Zad. 2.44 Metalowa kulka upuszczona na powierzchni oceanu dociera do jego dna po 64 minutach. Zakładając, że przyspieszenie kulki w wodzie opisuje w przybliżeniu formuła $a = 0,9g - 3v$ m/s^2 obliczyć głębokość oceanu.

3 Ruch w dwóch i trzech wymiarach

Zad. 3.1 Z dołu o głębokości h wyrzucono kamień pod kątem α_0 do poziomu, nadając mu prędkość v_0. Znaleźć zależność przyspieszenia $\mathbf{a}(t)$, prędkości $\mathbf{v}(t)$ oraz położenia $\mathbf{r}(t)$ w układzie współrzędnych przedstawionym na Rys. 4.
Odp. $\mathbf{a}(t) = -g\hat{\mathbf{y}}$, $\mathbf{v}(t) = v_0 \cos\alpha_0 \hat{\mathbf{x}} + (v_0 \sin\alpha_0 - gt)\hat{\mathbf{y}}$, $\mathbf{r}(t) = v_0 t \cos\alpha_0 \hat{\mathbf{x}} + (-h + v_0 t \sin\alpha_0 - \frac{gt}{2})\hat{\mathbf{y}}$.



Rys. 4: Rysunek do **Zad. 3.1**.

Zad. 3.2 Ciało zostało wyrzucone pod kątem α_0 do poziomu z prędkością początkową v_0 z punktu o współrzędnych (x_0, y_0). Znaleźć równanie toru $y = y(x)$.

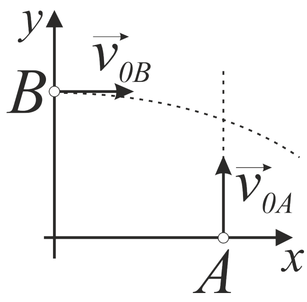
Zad. 3.3 Ciało zostało rzucone z prędkością v_0 pod kątem α_0 do poziomu. Znaleźć y_{max} - największą wysokość, na jaką wzniosło się ciało i x_{max} - zasięg rzutu. Proszę znaleźć maksymalną wysokość na dwa sposoby: (a) znajdując wierzchołek paraboli, (b) wykorzystując zasadę zachowania energii w ruchu w kierunku pionowym.

Zad. 3.4 Dwa ciała A i B spadają z wysokości H bez prędkości początkowej. Ciało B natrafia na swej drodze na umocowaną platformę, nachyloną pod kątem 45° do poziomu. W wyniku sprężystego odbicia od platformy kierunek prędkości ciała staje się poziomy. Miejsce uderzenia w platformę znajduje się na wysokości h. Porównaj czasy spadania T_A oraz T_B wymienionych ciał. Na jakiej wysokości należy umieścić platformę, aby najbardziej efektywnie spowalniała spadanie ciała?
Odp. $T_A = \sqrt{\frac{2H}{g}}$, $T_B = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} + \sqrt{\frac{2h}{g}}$, $h = \frac{1}{2}H$.

Zad. 3.5 Ciało spada z wysokości H bez prędkości początkowej. Na wysokości h uderza sprężyście umocowaną platformę, ustawioną pod kątem $\alpha = 30°$ do poziomu. Znajdź czas T spadania i zasięg lotu.
Odp. $T = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2(H-h}{g}} + \sqrt{\frac{H+3h}{2g}}$.

Zad. 3.6 Ciało A rzucono pionowo do góry z prędkością $v_{0A} = 20$ m/s (Rys. 5). Na jakiej wysokości H wyrzucono w kierunku poziomym ciało B z prędkością $v_{0B} = 4$ m/s jednocześnie z ciałem A, jeżeli ciała zderzyły się w locie? Odległość mierzona wzdłuż prostej poziomej między położeniami początkowymi ciał jest równa $l = 4$ m. Znaleźć także czas T ruchu ciał do momentu zderzenia oraz prędkość każdego z nich w chwili zderzenia.
Odp. $H = \frac{v_{0A}}{v_{0B}} l = 20$ m, $T = \frac{l}{v_{0B}} = 1$ s, $v_A = |v_{0A} - gT| \approx 10$ m/s, $v_B = \sqrt{v_{0B}^2 + (gT)^2} \approx 10,6$ m/s.

Zad. 3.7 Z punktów A i B, znajdujących się na wysokościach odpowiednio $h_A = 2$ m oraz $h_B = 6$ m, jednocześnie rzucono naprzeciwko siebie dwa ciała: jedno poziomo z prędkością $v_{0A} = 8$ m/s, drugie ku dołowi pod kątem $\alpha = 45°$ do poziomu z taką prędkością początkową, aby obydwa ciała zderzyły się w locie. Odległość pomiędzy punktami A i B mierzona wzdłuż prostej poziomej jest równa $l = 8$ m. Obliczyć prędkość początkową v_{0B} ciała rzuconego pod kątem α do poziomu, czas T ruchu ciał do chwili zderzenia, prędkości v_A i v_B obu ciał w chwili zderzenia, współrzędne (x, y) punktu zderzenia w układzie współrzędnych o początku umieszczonym na wysokości „zerowej” pod punktem A. Tory ciał leżą w jednej płaszczyźnie.
Odp. $v_{0B} = \sqrt{2} v_{0A} \frac{h_B - h_a}{l - h_B + h_A} = 11,3$ m/s, $T = \frac{l - h_B + h_A}{v_{0A}} = 0,5$ s, $v_A = \sqrt{v_{0A}^2 + (gT)^2} = 9,4$ m/s, $v_B = \sqrt{\frac{1}{2} v_{0B}^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} v_{0B} + gT\right)^2} = 15,2$ m/s, $x = v_{0A} T = 4$ m, $y = h_A - \frac{1}{2} g T^2 = 0,8$ m.



Rys. 5: Rysunek do **Zad. 3.6**.

Zad. 3.8 Z jednego punktu rzucono pod kątami α_1 oraz α_2 do poziomu dwa ciała z początkowymi prędkościami odpowiednio v_1 oraz v_2. Znaleźć zależność wzajemnej odległości l obu ciał w funkcji czasu t. Rozpatrzeć dwie sytuacje: (a) tory ciał leżą w jednej płaszczyźnie, przy czym ciała rzucono w przeciwne strony; (b) tory ciał leżą w płaszczyznach wzajemnie prostopadłych.
Odp. (a) $l = t\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos(\alpha_1 + \alpha_2)}$, (b) $l = t\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\sin\alpha_1\sin\alpha_2}$

Zad. 3.9 Chłopiec o wzroście $h = 1,5$ m, stojąc w odległości $d = 15$ m od płotu o wysokości $H = 5$ m, rzucił kamień pod kątem $\alpha = 45°$ do poziomu. Z jaką minimalną prędkością v_0 powinien rzucić kamień, aby przeleciał przez płot?
Odp. $v_0 = \frac{d}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2(d\tan\alpha - H + h)}} \approx 13,8$ m/s.

Zad. 3.10 Z wieży o wysokości $H = 3,48$ m pod kątem $\alpha_1 = 30°$ do poziomu rzucono ku dołowi kamień z prędkością v_1. Jednocześnie z powierzchni Ziemi pod kątem $\alpha_2 = 30°$ do poziomu rzucono w stronę pierwszego drugi kamień z prędkością v_2. W jakiej odległości d od podstawy wieży znajduje się miejsce wyrzucenia drugiego kamienia, jeżeli obydwa kamienie zderzyły się w powietrzu?

Zad. 3.11 Piłkę rzucono pod kątem $\alpha = 30°$ do poziomu z prędkością początkową $v_0 = 14$ m/s. W odległości $d = 11$ m od punktu wyrzucenia piłka sprężyście uderzyła w pionową ścianę. W jakiej odległości s od ściany piłka upadnie na ziemię?
Odp. $s = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha \approx 6$ m.

Zad. 3.12 Ciało wyrzucono z wysokości $H = 19,6$ m poziomo z prędkością $v_0 = 10$ m/s. Ciało sprężyście uderzyło w ziemię, a następnie w pionową ścianę znajdującą się w odległości $d = 40$ m od miejsca wyrzucenia, mierzonej w kierunku poziomym. Obliczyć maksymalną wysokość h, na którą wzniesie się ciało po uderzeniu w ścianę. W jakiej odległości s od ściany ciało upadnie na ziemię?
Odp. $h = H = 19,6$ m, $s = 3v_0\sqrt{\frac{2H}{g}} - d = 20$ m.

Zad. 3.13 Bombowiec nurkuje po prostej pod kątem α do poziomu z prędkością v_0. Jeżeli pilot chce zrzucić bombę na wysokości H i trafić dokładnie w cel, to w jakiej odległości od celu (s) powinien to zrobić?
Odp. $s = \frac{v_0\cos\alpha\sqrt{v_0^2\sin^2\alpha + 2gH} - v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}$

Zad. 3.14 Z jaką prędkością początkową v_0 powinna zostać wystrzelona rakieta sygnalizacyjna z rakietnicy ustawionej pod kątem 45° do horyzontu, aby eksplodowała w najwyższym punkcie toru ruchu, jeżeli czas spalania zapłonu wynosi $t_0 = 6$ s.
Odp. $v_0 = \frac{gt_0}{\sin\alpha} = 83$ m/s.

Zad. 3.15 Na jaką maksymalną odległość d można rzucić piłkę w sali gimnastycznej o wysokości 8 m, jeżeli piłka ma prędkość początkową $v_0 = 20$ m/s. Jaki kąt α powinien w tym przypadku tworzyć wektor prędkości początkowej z poziomem? Założyć, że wysokość początkowa toru ruchu jest zaniedbywalnie mała w porównaniu z wysokością sali. Piłka w ruchu nie może dotknąć sufitu.
Odp. $d = 40$ m, $\alpha = 38°40'$.

Zad. 3.16 Na wzgórzu znajduje się cel widoczny pod kątem $\alpha = 10°$ powyżej poziomu z miejsca stacjonowania baterii artylerii. Odległość w kierunku poziomym od baterii do celu wynosi $d = 2$ km. Do celu żołnierze strzelają przy kącie podniesienia lufy $\beta = 30°$. Wyznaczyć prędkość początkową v_0 pocisku trafiającego w cel.
Odp. $v_0 = \sqrt{\frac{dg\cos\alpha}{2\cos\beta\sin(\beta - \alpha)}} \approx 180$ m/s.

Zad. 3.17 Kamień rzucono poziomo z wierzchołka góry nachylonej pod kątem α do poziomu. Wyznaczyć jaka była prędkość początkowa kamienia, jeżeli spada on na zbocze góry w odległości d od wierzchołka.
Odp. $v_0 = \sqrt{\frac{gd\cos^2\alpha}{2\sin\alpha}}$.

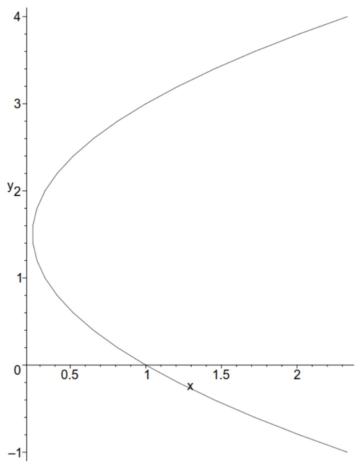
Zad. 3.18 Z równi pochyłej nachylonej pod kątem β do poziomu rzucono kamień z prędkością początkową v_0 prostopadle do równi. W jakiej odległości od punktu wyrzucenia upadnie ten kamień na równię?
Odp. $d = 2v_0^2\frac{\sin\beta}{g\cos^2\beta}$.

Zad. 3.19 Położenie cząstki obserwowanej z pewnego układu współrzędnych opisuje wektor $\mathbf{r}(t) = (t^2+5)\hat{\mathbf{x}} + 2t^3\hat{\mathbf{z}}$, gdzie czas liczony jest w sekundach, położenie - w metrach. Jakie jest jej przyspieszenie w chwili, gdy porusza się ona równolegle do wektora $\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{z}}$?

Zad. 3.20 Ruch punktu materialnego w pewnym układzie współrzędnych opisuje wektor wodzący $\mathbf{r}(t) = (t^2-4t)\hat{\mathbf{x}} + (t^3-12t-5)\hat{\mathbf{y}} + (2t^2-8t+1)\hat{\mathbf{z}}$, gdzie czas mierzony jest w sekundach, położenie w metrach. Obliczyć położenie $\mathbf{r}$ i przyspieszenie $\mathbf{a}$ punktu w chwili t, dla której prędkość punktu jest równa zeru.

Zad. 3.21 Położenie cząsteczki w pewnym układzie współrzędnych opisuje wektor $\mathbf{r}(t) = (t^2-1, -t^4+2t^2)$, gdzie czas mierzony jest w sekundach, położenie w metrach. Znaleźć równanie toru ruchu cząsteczki oraz wektor prędkości i przyspieszenia w punktach $(0,1), (-1,0)$ oraz $(1,0)$ m.
Odp. $y = x^2+1$ m, dla $\mathbf{r} = (0,1)$ m: $\mathbf{v} = (2,0)$ m/s, $\mathbf{a} = (2,-8)$ m/s^2, dla $\mathbf{r} = (-1,0)$ m: $\mathbf{v} = (0,0)$ m/s, $\mathbf{a} = (2,4)$ m/s^2, dla $\mathbf{r} = (1,0)$ m: $\mathbf{v} = (2\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$ m/s, $\mathbf{a} = (2,-20)$ m/s^2.

Zad. 3.22 Współrzędne punktu materialnego w pewnym układzie współrzędnych opisywane są przez wektor $\mathbf{r}(t) = (\frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{2}t^2 + 1, \frac{1}{2}t^2)$, gdzie czas mierzony jest w sekundach, położenie w metrach. Znaleźć równanie toru ruchu punktu. W jakiej chwili t przyspieszenie osiągnie minimalną wartość? Czy wektor przyspieszenia będzie w tym momencie styczny do toru ruchu i wektora prędkości?
Odp. Tor ruchu będzie parabolą, o równaniu $x = \frac{1}{3}y^2 - y + 1$ (Rys. 6), $t = \pm 1$ s, $a = 1$ m/s^2, $\mathbf{a} = (0,1)$ m/s^2, $\mathbf{v} = (\frac{2}{3}, -1)$ m/s oraz $(-\frac{2}{3}, 1)$ m/s, zatem kierunki wektorów prędkości i przyspieszenia są różne, wektor prędkości jest zawsze styczny do toru ruchu.



Rys. 6: Rysunek do **Zad. 3.22**. Parabola o równaniu $x = \frac{1}{3}y^2 - y + 1$.

Zad. 3.23 Wektor opisujący w pewnym układzie współrzędnych położenie poruszającej się cząstki zależy od czasu w sposób następujący: $\mathbf{r}(t) = 2t^2\hat{\mathbf{y}} + (4t^4+2)\hat{\mathbf{z}}$. Napisać równanie przedstawiające tor cząstki we współrzędnych kartezjańskich. Jaką krzywą opisuje to równanie?

Zad. 3.24 Znaleźć związek między składowymi v_x i v_y prędkości cząstki poruszającej się po torze opisanym równaniem $y = Ax^2$, gdzie A jest stałą.
Odp. $v_y = \frac{1}{2A}v_x$.

Zad. 3.25 Współrzędne cząsteczki w danym układzie współrzędnych opisywane są przez wektor $\mathbf{r}(t) = (0,1)e^t + (1,0)t^3 + (-1,0)t + (1,0)$, gdzie czas liczony jest w sekundach, położenie - w metrach.

W jakim momencie t wektory prędkości i przyspieszenia będą równoległe i antyrównoległe do siebie? Znaleźć położenie cząsteczki w tych chwilach.
Odp. Wektory będą równoległe w chwili $t_{1,2} = 1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$ s, $\mathbf{r} = \left(\left(1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{4}{3} \pm \frac{4}{\sqrt{3}}\right), e^{1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}}\right)$ m, antyrównoległe w chwili $t_{1,2} = -1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$ s, $\mathbf{r} = \left(\left(-1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{4}{3} \mp \frac{4}{\sqrt{3}}\right), e^{-1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}}\right)$ m.

Zad. 3.26 Położenia dwóch poruszających się punktów materialnych obserwowanych z pewnego układu współrzędnych opisują wektory wodzące:

$$\mathbf{r}_1(t) = (0,2,0) + (4,2,1)t + (2,1,0)t^2,$$

$$\mathbf{r}_2(t) = (1,1,1)t^2 + (1,2,2),$$

gdzie położenie mierzone jest w metrach, czas - w sekundach. Znaleźć prędkość i przyspieszenie punktu drugiego względem pierwszego.

Zad. 3.27 Równania ruchu dwóch ciał obserwowanych z pewnego układu współrzędnych wyglądają następująco:

$$\mathbf{r}_1(t) = (t^2 + 3, t^2 + t + 2, t),$$

$$\mathbf{r}_2(t) = (t + 1, 2t, 1).$$

Znaleźć prędkość $\mathbf{v}_{2,1}$ punktu drugiego względem pierwszego oraz przyspieszenie $\mathbf{a}_{2,1}$ punktu drugiego względem pierwszego.

Zad. 3.28 Zbadać ruch punktu materialnego (tor, prędkość, przyspieszenie), którego wektor wodzący jest określony wzorem $\mathbf{r}(t) = A\cos\omega t\hat{\mathbf{x}} + A\sin\omega t\hat{\mathbf{y}}$, gdzie $A = 6$ m, $\omega = \frac{\pi}{4}$ rad/s. W jakich chwilach t wektor prędkości i przyspieszenia jest równoległy do osi układu współrzędnych?
Odp. Ruch odbywa się po okręgu opisanym równaniem $x^2 + y^2 = 36$ m, $\mathbf{v} = \frac{3\pi}{2}\left(-\sin\frac{\pi}{4}t\hat{\mathbf{x}} + \cos\frac{\pi}{4}t\hat{\mathbf{y}}\right)$ m/s, $\mathbf{a} = \frac{3\pi^2}{8}\left(-\cos\frac{\pi}{4}t\hat{\mathbf{x}} - \sin\frac{\pi}{4}t\hat{\mathbf{y}}\right)$ m/s^2. Wektor prędkości jest równoległy do osi x w chwilach $t = 2 + 4n$ s, do osi y dla $t = 0 + 4n$ s. Wektor przyspieszenia jest równoległy do osi x w chwilach $t = 0 + 4n$ s, do osi y dla $t = 2 + 4n$ s, gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą.

Zad. 3.29 Równania ruchu maja postać:

$$x = A\cos\omega t,$$

$$y = B\sin\omega t,$$

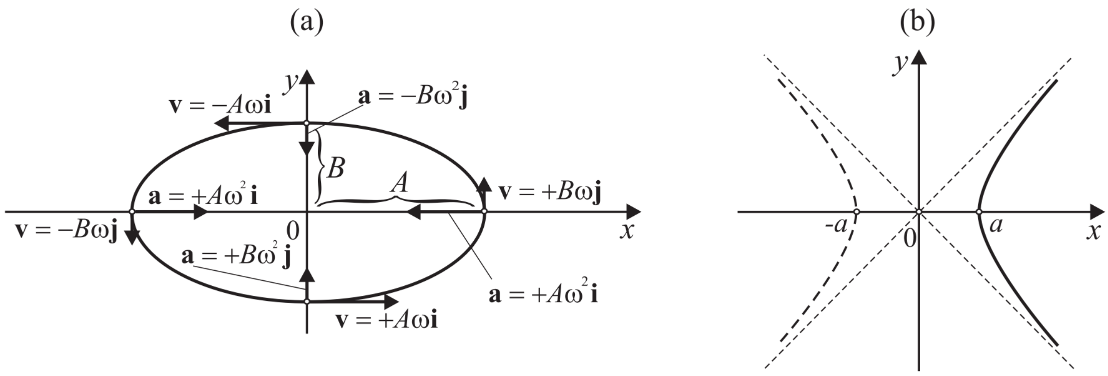
gdzie A, B, ω są stałe, $A > B$. Wykazać, że torem punktu jest elipsa o półosiach A i B skierowanych wzdłuż osi x i y. Wykazać, że ruch punktu po elipsie jest niejednostajny i określić miejsca największej i najmniejszej prędkości. Obliczyć wektor przyspieszenia (jaki ma kierunek oraz zwrot?) oraz określić położenia punktów, w których jego przyspieszenie ma największą i najmniejszą wartość.
Odp. Tor ruchu opisuje równanie elipsy $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1$ o półosiach A i B, przy czym osie współrzędnych leżą wzdłuż osi elipsy. Ponieważ $A > B$, elipsa jest wydłużona w kierunku osi x (Rys. 7a). $v = \omega\sqrt{A^2\sin^2\omega t + B^2\cos^2\omega t}$. Prędkość ma wartość maksymalną $v_{max} = A\omega$, gdy faza ruchu równa się 90° oraz 270° i minimalną $v_{min} = B\omega$, gdy $\omega t = 0$ i 180°; innymi słowy, gdzie największe krzywizny elipsy - tam najmniejsza prędkość ruchu. $\mathbf{a} = -\omega^2\left(A\cos\omega t\hat{\mathbf{x}} + B\sin\omega t\hat{\mathbf{y}}\right) = -\omega\mathbf{r}(t)$, zatem przyspieszenie jest wprost proporcjonalne do wektora wodzącego r i zawsze skierowane przeciwnie niż $\mathbf{r}$. $a = \omega^2\sqrt{A^2\cos^2\omega t + B^2\sin^2\omega t}$. Punkt osiąga maksymalne przyspieszenie $a_{max} = \omega^2 A$, gdy faza ruchu wynosi 0 i 180°, minimalne $a_{min} = B\omega^2$, gdy $\omega t = 90°$ oraz 270°; zatem w miejscach największej prędkości punktu przyspieszenie jest najmniejsze, zaś w miejscach najmniejszej prędkości przyspieszenie jest największe (Rys. 7a).

Zad. 3.30 Ruch opisany jest równaniami:

$$x = \frac{a}{2}\left(e^{kt} + e^{-kt}\right),$$

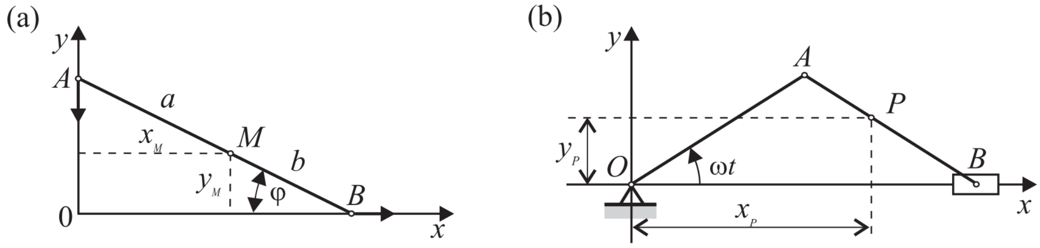
$$y = \frac{a}{2}\left(e^{kt} + e^{-kt}\right),$$

gdzie a i k są stałe. Znaleźć i narysować tor, po którym punkt się porusza. Napisać prędkość v i przyspieszenie a punktu jako funkcję bezwzględnej wartości wektora wodzącego r punktu.
Odp. Tor ruchu opisuje równanie hiperboli równoosiowej $x^2 - y^2 = a^2$ o wierzchołkach $a\mathbf{i}$ oraz $-a\mathbf{i}$ oraz asymptotach $y = x$ i $y = -x$. Z równań ruchu wynika, że punkt porusza się po krzywej, dla której $x > 0$ (Rys. 7b). $v = kr$ oraz $a = k^2 r$, zatem wartość prędkości i przyspieszenia rośnie, kiedy punkt oddala się od wierzchołka hiperboli.



Rys. 7: Rysunek do (a) **Zad. 3.29** i (b) **Zad. 3.30**.

Zad. 3.31 Pręt o długości AB porusza się tak, że jego punkty końcowe A i B ześlizgują się po osiach x, y pewnego prostokątnego układu współrzędnych (Rys. 8a). Wyznaczyć tor, jaki będzie zakreślał przy tym ruchu dowolnie obrany punkt M pręta.
Odp. Punkt będzie poruszał się po elipsie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ o półosiach a i b leżących wzdłuż osi x i y.



Rys. 8: Rysunek do: (a) **Zad. 3.31**, **Zad. 3.32**, **Zad. 3.33** i **Zad. 3.34**; (b) **Zad. 3.35**.

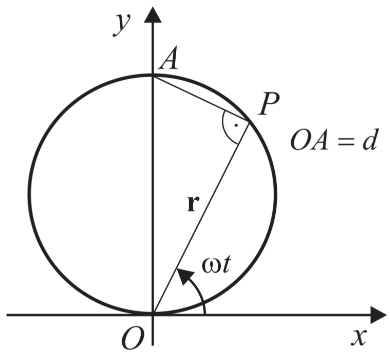
Zad. 3.32 Zakładając, że koniec B pręta z zadania **Zad. 3.31** porusza się ruchem jednostajnym ze stałą prędkością v_0, a w chwili początkowej $t = 0$ pręt tworzy z prowadnicą kąt φ_0 znaleźć ruch punktu M oraz jego prędkość.
Odp. $\mathbf{r}_M(t) = \frac{a}{l}\left((l\cos\varphi_0 + v_0 t)\hat{\mathbf{x}} + \sqrt{l^2\sin^2\varphi_0 - 2v_0 l t\cos\varphi_0 - v_0^2 t^2}\hat{\mathbf{y}}\right)$,
$\mathbf{v}_M(t) = \frac{a}{l}\left(\hat{\mathbf{x}} - \frac{l\cos\varphi_0 + v_0 t}{\sqrt{l^2\sin^2\varphi_0 - 2v_0 l t\cos\varphi_0 - v_0^2 t^2}}\hat{\mathbf{y}}\right)$, gdzie $l = a + b$ jest długością pręta.

Zad. 3.33 Zakładając, że koniec B pręta z zadania **Zad. 3.31** porusza się ze stałym przyspieszeniem $a_0 > 0$ znaleźć ruch punktu M. Przyjąć $x_B(0) = d$ oraz $\dot{x}_B(0) = 0$.
Odp. $\mathbf{r}_M(t) = \frac{a}{l}\left(d + \frac{1}{2}a_0 t^2\right)\hat{\mathbf{x}} + \frac{b}{l}\sqrt{l^2 - \left(d + \frac{1}{2}a_0 t^2\right)^2}\hat{\mathbf{y}}$.

Zad. 3.34 Zakładając, że punkt M z z zadania **Zad. 3.31** porusza się zgodnie z równaniem $y_M = a_0 t^2$, znaleźć zależność x_M od czasu oraz równania ruchu punktu A (Rys. 8a).
Odp. $|t| \leq \sqrt{\frac{b}{a_0}}$, $x_M = a\sqrt{1 - \frac{a_0^2 t^4}{b^2}}$, $\mathbf{r}_A(t) = \frac{l}{b}a_0 t^2\hat{\mathbf{y}}$.

Zad. 3.35 Układ przedstawiony na Rys. 8b składa się z dwóch prętów o jednakowej długości $OA = OB = l$, połączonych przegubowo w punkcie A. Pręt OA obraca się dookoła nieruchomego punktu O z prędkością kątową ω, natomiast punkt B może poruszać się po prostej poziomej pokrywającej się z osią x. Wyznaczyć równanie ruchu oraz toru punktu P leżącego na pręcie AB, odległego o βl od punktu A, gdzie $0 \leq \beta \leq 1$.
Odp. $\mathbf{r} = l(1+\beta)\cos\omega t\hat{\mathbf{x}} + l(1/\beta)\sin\omega t\hat{\mathbf{y}}$, $\frac{x^2}{l^2(1+\beta)^2} + \frac{y^2}{l^2(1-\beta)^2} = 1$, zatem punkt będzie się poruszał po elipsie, której osie główne będą pokrywały się z osiami współrzędnych.

Zad. 3.36 Po torze kołowym o średnicy $d = 1$ m porusza się punkt P w ten sposób, że wektor położenia $\mathbf{r}$ obraca się ze stałą prędkością kątową $\omega = \pi$ rad/s. Początek wektora r jest jednym z punktów toru (Rys. 9). Obliczyć prędkość i przyspieszenie punktu P.
Odp. $\mathbf{v} = 100\pi(\cos 2\pi t\hat{\mathbf{x}} + \sin 2\pi t\hat{\mathbf{y}})$ m/s, $\mathbf{a} = -200\pi^2(\sin 2\pi t\hat{\mathbf{x}} + \cos 2\pi t\hat{\mathbf{y}})$ m/s^2.



Rys. 9: Rysunek do **Zad. 3.36**.

Zad. 3.37 Zbadać kształt następujących krzywych:

(a) $\mathbf{r} = t\hat{\mathbf{x}} + t^2\hat{\mathbf{y}}$;

(b) $\mathbf{r} = \sqrt{t}\hat{\mathbf{x}} + \sqrt{t - a^2}\hat{\mathbf{y}}$;

(c) $\mathbf{r} = a\cos t\hat{\mathbf{x}} + b\sin t\hat{\mathbf{y}} + c\hat{\mathbf{z}}$;

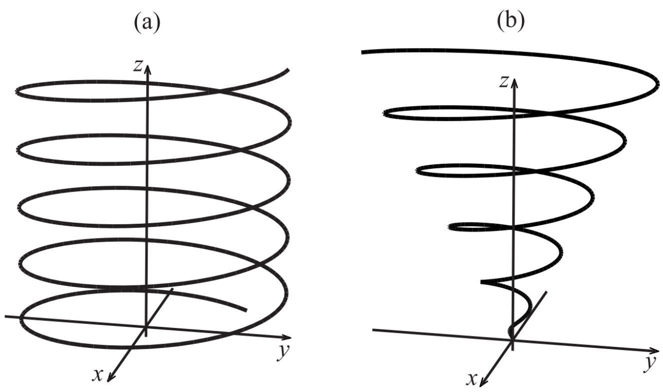
(d) $\mathbf{r} = a(\cos t\hat{\mathbf{x}} + \sin t\hat{\mathbf{y}}) + b\hat{\mathbf{z}}$;

(e) $\mathbf{r} = t\hat{\mathbf{x}} + f(t)\hat{\mathbf{y}}$;

(f) $\mathbf{r} = a(\cos t\hat{\mathbf{x}} + \sin t\hat{\mathbf{y}}) + bt\hat{\mathbf{z}}$.

(g) $\mathbf{r} = a(t\cos t\hat{\mathbf{x}} + t\sin t\hat{\mathbf{y}}) + bt\hat{\mathbf{z}}$.

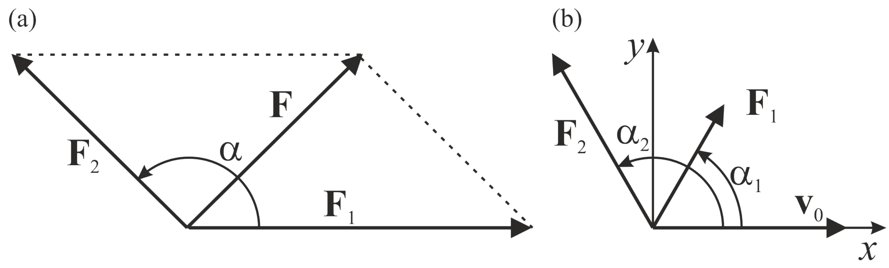
Odp. (a) parabola $y = x^2$; (b) hiperbola równoosiowa $x^2 = y^2 = a^2$; (c) elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ położona na płaszczyźnie $z = c$; (d) okrąg $x^2 + y^2 = a^2$ położony na płaszczyźnie $z = b$; (e) $y = f(x)$; (f) linia śrubowa powstała z przecięcia powierzchni cylindra $x^2 + y^2 = a^2$ i powierzchni śrubowej $\frac{y}{x} = \tan\frac{z}{b}$ (Rys. 10a); (g) koniczna linia śrubowa powstała z przecięcia powierzchni stożka $x^2 + y^2 - \frac{a^2}{b^2}z^2 = 0$ i powierzchni śrubowej $\frac{y}{x} = \tan\frac{z}{b}$ (Rys. 10b).



Rys. 10: Rysunek do **Zad. 3.37**.

4 Elementy statyki. II zasada dynamiki Newtona

Zad. 4.1 W jakim stosunku do siebie pozostają siły $\mathbf{F}_1$ i $\mathbf{F}_2$, jeżeli kąt zawarty między nimi wynosi $\alpha = 135°$, a wartość liczbowa siły wypadkowej równa się wartości liczbowej mniejszej siły F_2 (Rys. 11a)
Odp. $\frac{F_1}{F_2} = \sqrt{2}$.

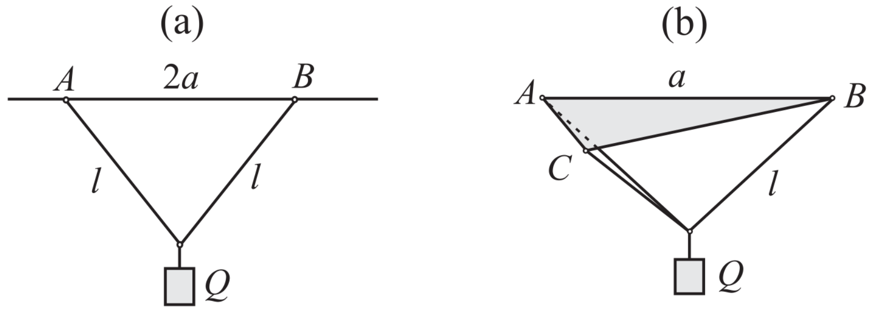


Rys. 11: Rysunek do **Zad. 4.1** (a) i **Zad. 4.2** (b).

Zad. 4.2 Na ciało o masie 2 kg działają siły $F_1 = 3$ N i $F_2 = 4$ N pod kątami $\alpha_1 = 60°$ i $\alpha_2 = 120°$ względem prędkości początkowej $v_0 = 20$ m/s. Znaleźć przyspieszenie ciała, jego prędkość i przesunięcie po 10 s ruchu (Rys. 11b).
Odp. $\mathbf{a} = -0,25\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ m/s^2, $\mathbf{v} = 17,5\mathbf{i} + 30\mathbf{j}$ m/s, $\Delta\mathbf{r} = 187,5\mathbf{i} + 150\mathbf{j}$ m.

Zad. 4.3 Siłę $\mathbf{R}$ rozłożyć na dwie składowe $\mathbf{P}$ i $\mathbf{Q}$ tak, aby były one do siebie prostopadłe i aby zachodziła proporcja $P : Q = m : n$. Znaleźć wartości liczbowe sił składowych.
Odp. $P = \frac{mR}{\sqrt{m^2+n^2}}$.

Zad. 4.4 Na dwóch równych nitkach zaczepionych w punktach A i B odległych od siebie o $2a$ wisi ciężarek o ciężarze Q (Rys. 12a). Jaka powinna być długość l nitek, jeżeli wiadomo, że siła naprężająca nitki nie może być większa niż T_0
Odp. $l \geq \frac{2T_0 a}{\sqrt{4T_0^2 - Q^2}}$.



Rys. 12: Rysunek do **Zad. 4.4** (a) i **Zad. 4.5** (b).

Zad. 4.5 Odważnik Q zawieszono na trzech rozłożonych symetrycznie linkach. Jaki jest ciężar odważnika, jeżeli długość każdej linki $l = 1$ m, a punkty zaczepienia linek tworzą trójkąt równoboczny ABC o boku $a = 1$ m, zaś pojedyncze linki są napięte siłą $F = 25$ N (Rys. 12b).
Odp. $Q = \sqrt{6}F = 61,24$ N.

Zad. 4.6 Spoczywający początkowo klocek o masie $m = 2$ kg zmienia pod wpływem działania trzech sił położenie o wektor $\Delta\mathbf{r} = 8\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ m. Znaleźć wektor trzeciej siły, jeżeli dwa pierwsze wektory mają postać $\mathbf{F_1} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ N i $\mathbf{F_2} = -\mathbf{j} + \mathbf{k}$ N, a czas w którym nastąpiło przemieszczenie wynosił $t = 2$ s. Znaleźć wektor prędkości w chwili $t = 2$ s.

Zad. 4.7 Spoczywająca początkowo cząstka o masie $m = 5$ kg zmieniła w ciągu 2 s pod wpływem działania sił położenie o wektor $\Delta\mathbf{r} = 10\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ m. Znaleźć wektor trzeciej siły, jeśli dwa pierwsze wektory mają postać: $\mathbf{F_1} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ N i $\mathbf{F_2} = -\mathbf{j} + \mathbf{k}$ N.

Zad. 4.8 Cząstka o masie $m = 2$ kg przemieszcza się z punktu o współrzędnych $\mathbf{r_1} = -\mathbf{i} + 7\mathbf{k}$ m do punktu $\mathbf{r_2} = 3\mathbf{i} - 9\mathbf{k}$ m w czasie 4 s. Zakładając, że jej prędkość początkowa była równa zeru, a przyspieszenie jest stałe, obliczyć wypadkową siłę działającą na cząstkę.

Zad. 4.9 Siły $\mathbf{F_1} = \mathbf{i}$ N, $\mathbf{F_2} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ N, $\mathbf{F_3} = -5\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ N oraz $\mathbf{F_4}$ działają jednocześnie na cząstkę o masie $m = 5$ kg nadając jej przyspieszenie $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ m/s^2. Obliczyć siłę $\mathbf{F_4}$.

Zad. 4.10 Na cząstkę o masie $m = 2$ kg działa siła $\mathbf{F_1} = 20\mathbf{i}$ N. Obliczyć przyspieszenie $\mathbf{a}$ cząstki. Jaką drogę przebywa cząstka w czasie pierwszych 5 sekund ruchu, jeżeli początkowo była nieruchoma? Obliczyć przyspieszenie cząstki jeżeli dodatkowo działają na nią siły $\mathbf{F_2} = -16\mathbf{i}$ N oraz $\mathbf{F_3} = 8\mathbf{j}$ N.

Zad. 4.11 Ciało jest wprawiane w ruch siłą $F = 0,02$ N i w ciągu pierwszych czterech sekund przebywa drogę $s = 3,2$ m. Jaka jest jego masa i jaką prędkość osiągnie ciało pod koniec piątej sekundy swojego ruchu.
Odp. $m = 0,05$ kg, $v = 2$ m/s.

Zad. 4.12 Pocisk artyleryjski o masie $m = 5$ kg opuszcza lufę działa z prędkością $v = 1200$ m/s. Jaka siła działa na pocisk, przy założeniu, że ruch w lufie był jednostajnie przyspieszony i trwał 0,01 s?
Odp. $f = 6 \times 10^5$ N.

Zad. 4.13 Pocisk armatni o masie $m = 24$ kg opuszcza lufę działa z prędkością $v_0 = 500$ m/s. Wyznaczyć średnią wartość siły działającej na pocisk w lufie, jeżeli wiemy, że jej długość wynosi 2 m.
Odp. $f = 1,47 \times 10^6$ N.

Zad. 4.14 Ciało o masie $m = 15$ kg zrzucone z wysokości $h = 10$ m zagłębiło się w ziemię na głębokości $d = 0,5$ m. Obliczyć średnią siłę hamującą działającą na ciało w Ziemi.
Odp. $F = \frac{mgh}{d} = 2943$ N.

Zad. 4.15 Wagon kolejowy jedzie po poziomym torze prostoliniowym i jest hamowany siłą równą 0,1 ciężaru wagonu. Wyznaczyć czas oraz drogę hamowania, jeżeli prędkość wagonu przed rozpoczęciem hamowania wynosiła $v_0 = 72$ km/h.
Odp. $t = \frac{v_0}{0,1g} = 20,4$ s, $s = \frac{1}{2}\frac{v^2}{0,1g} = 204$ m.

5 Ruch po zadanej powierzchni, bezwładność

Zad. 5.1 Kulka o masie m zawieszona na nieważkiej nici w zależności od tego, w jaki sposób zostanie wprawiona w ruch wykonuje drgania wahadłowe lub porusza się ruchem jednostajnym po okręgu w płaszczyźnie poziomej. Zakładając, że znany jest kąt α między pionem i kierunkiem nici obliczyć siłę naprężenia nici T, kiedy dochodzi do skrajnego położenia w ruchu drgającym oraz w ruchu po okręgu.
Odp. W skrajnym położeniu w ruchu wahadłowym $T = mg\cos\alpha$, w ruchu po okręgu $T = \frac{mg}{\cos\alpha}$.

Zad. 5.2 Kulka o masie $m = 1$ kg jest zawieszona na nici o długości $l = 30$ cm, której drugi koniec jest przytwierdzony na stałe. Kulka porusza się po okręgu w płaszczyźnie poziomej ze stałą prędkością v, przy czym nić tworzy z pionem kąt $\alpha = 60°$. Oblicz prędkość v oraz siłę naprężenia nici.
Odp. $v = \sqrt{\frac{gl}{\cos\alpha}\left(1 - \cos^2\alpha\right)} = 2,1$ m/s, $T = \frac{mg}{\cos\alpha} = 19,62$ N.

Zad. 5.3 Kulka, zawieszona na nici, porusza się ruchem jednostajnym po okręgu w płaszczyźnie poziomej. Obliczyć wartość ilorazu sił naprężenia nici oraz wartość ilorazu prędkości kątowych dla dwóch różnych wartości kąta: $\alpha_1 = 30°$ i $\alpha_2 = 45°$.
Odp. $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{\omega_1}{\omega_2} = \sqrt{\frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/4}$.

Zad. 5.4 Cząstka o masie $m = 2$ kg porusza się po okręgu o promieniu $R = 5$ m. W pewnej chwili jej prędkość jest równa $v = 2$ m/s, a przyspieszenie liniowe $\frac{dv}{dt} = 2$ m/s^2. Jaka siła działa na cząstkę w tym momencie?
Odp. $f = m\sqrt{\frac{v^4}{R^2} + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} = 4,31$ N.

Zad. 5.5 Ciało o masie m, zawieszone na nici o długości l, wychylono o $90°$ z położenia pionowego i puszczono. Znajdź zależność siły naprężenia nici i przyspieszenia ciała od kąta α między kierunkiem nici i pionem.
Odp. $T = 3mg$ w najniższym punkcie, $T = 3mg\cos\alpha$, $a_r = 2g\cos\alpha$, $a_t = g\sin\alpha$, $a = g\sqrt{3\cos^2\alpha + 1}$.

Zad. 5.6 Obliczyć stosunek sił, jakimi czołg naciska na środkowe części mostów wypukłego i wklęsłego. Promień krzywizny mostów w obu wypadkach jest równy $r = 40$ m, a prędkość czołgu $v = 45$ km/h.
Odp. $\frac{F_{wypukly}}{F_{wklesly}} = \frac{gR-v^2}{gR+v^2} = 0,43$.

Zad. 5.7 Kamień o masie $m = 3$ kg, uwiązany na nitce o długości $l = 1$ m, porusza się po okręgu w płaszczyźnie pionowej. Z jaką największą prędkością kątową może poruszać się kamień po okręgu, aby nitka nie uległa zerwaniu, jeżeli doświadczalnie stwierdziliśmy, że do jej zerwania potrzebna jest siła $f = 41,43$ N.
Odp. $\omega = \sqrt{\frac{f-mg}{ml}} = 2$ rad/s.

Zad. 5.8 Samochód o masie $m = 1000$ kg jedzie po wypukłym moście z prędkością $v = 36$ km/h. Promień krzywizny mostu wynosi $r = 50$ m. Jaki nacisk wywiera samochód na most w chwili przejeżdżania przez jego środek?
Odp. $f = m\left(g = \frac{v^2}{r}\right) \approx 7810$ N.

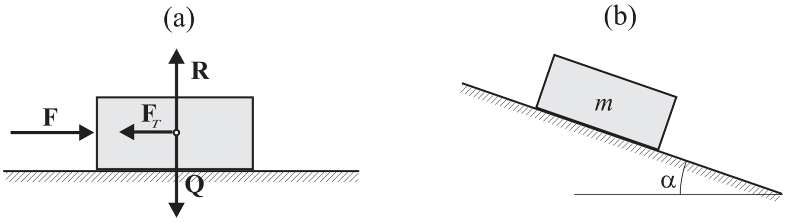
Zad. 5.9 Jaki jest pozorny ciężar osoby o masie $m = 75$ kg w windzie poruszającej się: (a) do góry z opóźnieniem $0,2$ m/s^2 i na dół z przyspieszeniem $0,2$ m/s^2; (b) do góry z przyspieszeniem $0,15$ m/s^2 i na dół z opóźnieniem $0,15$ m/s^2?
Odp. (a) $f_1 = 721$ N w obu przypadkach; (b) $f_2 = 746$ N w obu przypadkach.

Zad. 5.10 W windzie zainstalowano wagę sprężynową, na której zawieszono ciężarek o masie $m = 1$ kg. Jaki ciężar będzie wskazywać waga, jeżeli: (a) winda porusza się do góry z przyspieszeniem $4,9$ m/s^2 skierowanym w dół; (b) porusza się z przyspieszeniem $4,9$ m/s^2 skierowanym do góry; (c) porusza się z przyspieszeniem 1 m/s^2 również skierowanym w dół.
Odp. (a) $f = 4,9$ N; (b) $f = 14,6$ N; (c) $f = 8,8$ N.

Zad. 5.11 Obliczyć minimalne przyspieszenie, z jakim należy opuszczać na lince o wytrzymałości $f = 400$ N ciężar o masie $m = 50$ kg, aby linka się nie zerwała.
Odp. $a = 1,8$ m/s^2.

6 Siły tarcia i oporu

Zad. 6.1 Na stole leży klocek o masie m, który staramy się przesunąć w prawo, przykładając do niego siłę $\mathbf{F}$ (Rys. 13a). Jaka jest siła tarcia statycznego? Jaka jest możliwa maksymalna wartość siły tarcia statycznego?
Odp. $\mathbf{F}_{T,stat} = -\mathbf{F}$, $F_{T,stat,max} = \mu_{stat} mg$.

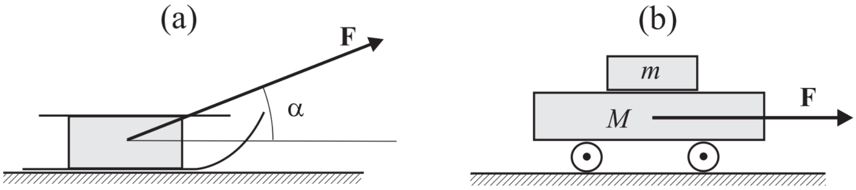


Rys. 13: Rysunek do **Zad. 6.1** (a) i **Zad. 6.4** (b).

Zad. 6.2 Jaka jest najmniejsza wartość statycznego współczynnika tarcia μ_{stat}, przy której klocek znajdujący się na równi pochyłej o kącie nachylenia $\alpha = 30°$ nie zsuwa się? Z jakim przyspieszeniem będzie się zsuwał klocek, jeżeli współczynnik tarcia kinetycznego wynosi $\mu_{kin} = \frac{\mu_{stat,min}}{2}$?
Odp. $\mu_{stat,min} = \tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $a = \frac{g}{4}$.

Zad. 6.3 Jaki powinien być minimalny współczynnik tarcia statycznego pomiędzy kołami napędowymi samochodu i drogą, aby pojazd o masie $m = 2$ t i ładunku $m_1 = 4$ t mógł poruszać się z przyspieszeniem $a = 0,2$ m/s^2? Rozpatrzyć przypadki, kiedy samochód ma napęd na cztery koła oraz, gdy tylne koła są napędowe. Założyć, że środek masy samochodu znajduje się w środku pomiędzy osiami kół, a środek masy ładunku - nad tylną osią.
Odp. Jeśli pojazd posiada napęd na cztery koła, to $\mu_{stat} \geq \frac{a}{g} \approx 0,02$ nie zależy od całkowitego ciężaru pojazdu, ponieważ siła tarcia jest proporcjonalna do nacisku na koła. Jeśli samochód ma napęd na tylne koła, to $\mu_{stat} \geq \frac{a}{ng}$, gdzie n jest ciężarem przypadającym na tylne koła pojazdu. W rozpatrywanym przypadku $n = \frac{5}{6}$ i $\mu_{stat,min} \approx 0,024$.

Zad. 6.4 Ktoś ciągnie sanki o masie m działając siłą $\mathbf{F}$, przyłożoną do sznurka, który tworzy z poziomem kąt α; współczynnik tarcia poślizgowego wynosi μ_{kin} (Rys. 14a). Znaleźć wartość siły tarcia kinetycznego.
Odp. $F_T = \mu(mg - F\sin\alpha)$.



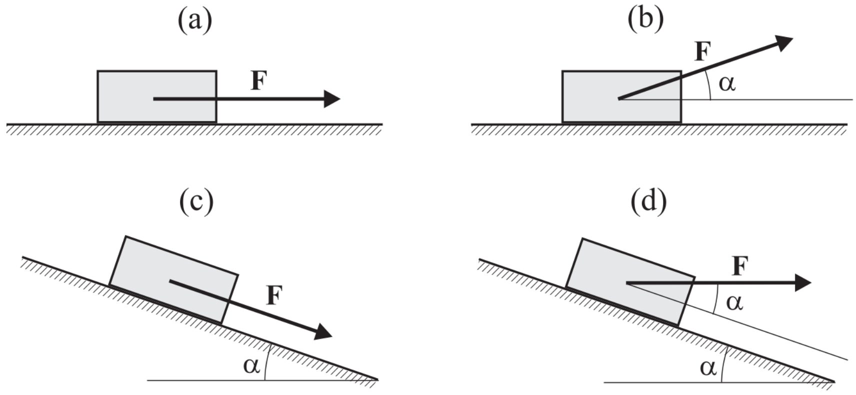
Rys. 14: Rysunek do: (a) **Zad. 6.4** i **Zad. 6.5**, (b) **Zad. 6.6**.

Zad. 6.5 Sanki o masie m ciągnięte są po poziomej powierzchni siłą $\mathbf{F}$ przyłożoną pod kątem α do poziomu (Rys. 14a). W ciągu czasu t sanki zmieniły swoją prędkość z v_0 na v, poruszając się w jednym kierunku ruchem przyspieszonym. Znaleźć współczynnik tarcia poślizgowego μ_{kin}.
Odp. $\mu_{kin} = \frac{Ft\cos\alpha - m(v-v_0)}{mgt - Ft\sin\alpha}$.

Zad. 6.6 Klocek o masie m leży na wózku o masie M. Maksymalna wartość siły tarcia statycznego między wózkiem a klockiem charakteryzuje się współczynnikiem μ_{stat}; między wózkiem i powierzchnią Ziemi nie ma tarcia (Rys. 14b). Znaleźć minimalną siłę F działającą na wózek, przy której klocek zacznie przemieszczać się na platformie wózka.
Odp. $F = (M + m)\mu_{stat} g$.

Zad. 6.7 Wzdłuż równi pochyłej pchnięto w górę krążek. Po pewnym czasie krążek zatrzymał się i zaczął ześlizgiwać się w dół. Wyznaczyć współczynnik tarcia μ krążka o równię, jeżeli czas ześlizgiwania jest n razy większy od czasu wznoszenia.
Odp. $\mu = \frac{n^2-1}{n^2+1}\tan\alpha$.

Zad. 6.8 Na Rys. 15 pokazano cztery różne przykłady ślizgania się klocka pod wpływem działania siły **F**. Wyznaczyć siłę tarcia w każdym przykładzie przyjmując, że ruch klocka odbywa się bez przyspieszenia oraz dane są: masa m, siła F, współczynnik tarcia kinetycznego μ_{kin} oraz kąt α.
Odp. (a) $F_T = \mu_{kin} mg$; (b) $F_T = \mu_{kin}(mg - F\sin\alpha)$; (c) $F_T = \mu_{kin} mg\cos\alpha$; (d) $F_T = \mu_{kin}(mg\cos\alpha - F\sin\alpha)$.

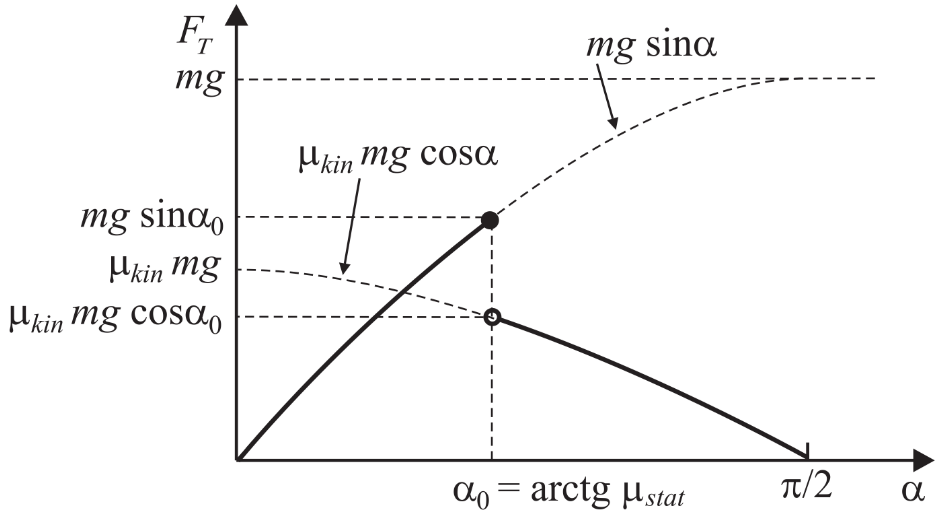


Rys. 15: Rysunek do **Zad. 6.8**.

Zad. 6.9 Samochód, który u podnóża góry o kącie nachylenia α miał prędkość v_0, porusza się w górę z wyłączonym silnikiem. Znaleźć wysokość (liczoną od podnóża góry), na jaką wjechał samochód w ciągu czasu t. Współczynnik tarcia hamującego wynosi μ_{kin}.
Odp. $h = \left[v_0 t = \frac{g(\sin\alpha + \mu_{kin}\cos\alpha)}{2} t^2\right] \sin\alpha.$

Zad. 6.10 Samochód o masie m jadąc pod górę po drodze nachylonej do poziomu pod kątem α zwiększa swoją prędkość od v_0 do v na odcinku drogi Δs. Przyjmując, że współczynnik tarcia hamującego wynosi μ_{kin}, znaleźć siłę pociągową tarcia.[1]
Odp. $f = \left(\frac{v^2 - v_0^2}{2\Delta sg} + \mu_{kin}\cos\alpha + \sin\alpha\right) mg.$

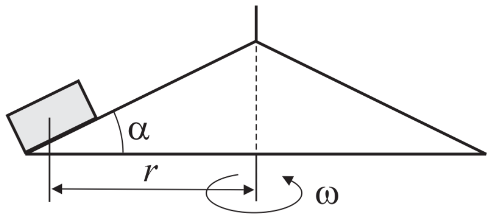
Zad. 6.11 Klocek o masie m znajduje się na równi pochyłej, której kąt nachylenia do poziomu można zmieniać od 0° do 90°. Sporządzić wykres zależności siły tarcia klocka o równię od kąta α. Współczynnik tarcia statycznego jest równy μ_{stat}, poślizgowego - μ_{kin}, $\mu_{stat} > \mu_{kin}$.
Odp. Rys. 16.



Rys. 16: Odpowiedź do **Zad. 6.11**.

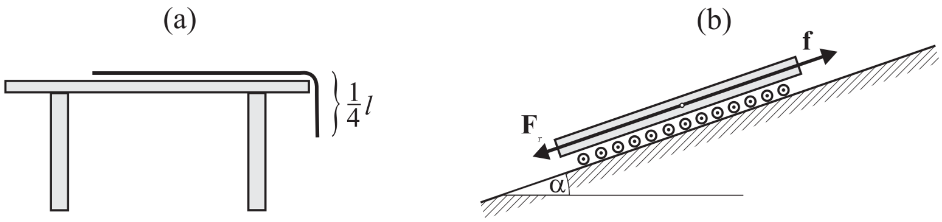
[1] Siła ciągu pojazdów mechanicznych jest reakcją na działanie kół napędowych na Ziemię i zwykle określa się ją jako pociągową siłę tarcia **f**. Jej kierunek jest zgodny z kierunkiem ruchu i najczęściej (również w tym zadaniu) jest ona siłą tarcia statycznego.

Zad. 6.12 Na krawędzi równi pochyłej o kącie nachylenia α leży klocek. Równia obraca się jednostajnie wokół pionowej osi z prędkością kątową ω. Odległość od ciała do osi obrotu równi jest równa r (Rys. 17). Znaleźć najmniejszy współczynnik tarcia statycznego μ_{stat}, przy którym klocek utrzymuje się na obracającej się równi pochyłej. Rozpatrzyć przypadki szczególne, gdy $\alpha = 0$ oraz $\omega = 0$.
Odp. $\mu_{stat,min} = \frac{\omega^2 r \cos\alpha + g \sin\alpha}{g\cos\alpha - \omega^2 r \sin\alpha}$. Gdy klocek znajduje się na wirującej tarczy ($\alpha = 0$), wówczas $\mu_{stat,min} = \frac{\omega^2 r}{g}$. W drugim przypadku, gdy $\omega = 0$, klocek znajduje się na nieruchomej równi pochyłej. Wówczas $\mu_{stat,min} = \tan\alpha$ (por. **Zad. 6.2**).



Rys. 17: Rysunek do **Zad. 6.12**.

Zad. 6.13 Jednorodna linka o długości l zaczyna zsuwać się ze stołu, gdy $\frac{1}{4}$ jej długości zwisa (Rys. 18a). Obliczyć współczynnik tarcia statycznego. Jaki będzie charakter ruchu linki?
Odp. $\mu_{stat} = \frac{1}{3}$, linka będzie zsuwać się ruchem niejednostajnie przyspieszonym.



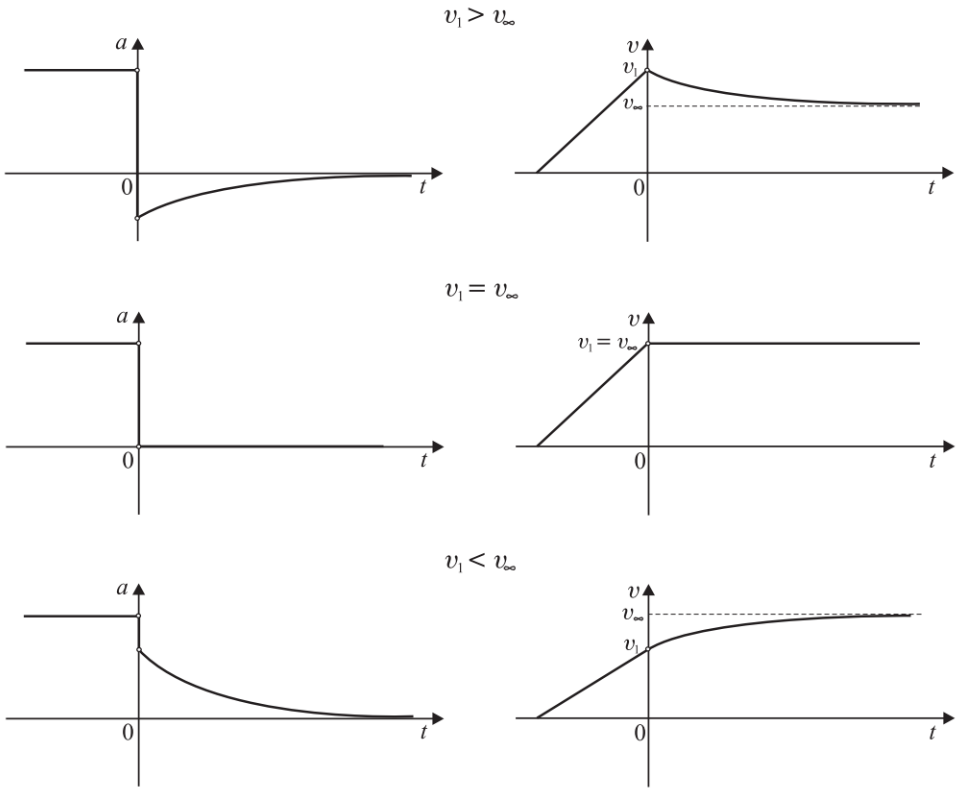
Rys. 18: Rysunek do **Zad. 6.13** (a) i do **Zad. 6.14** (b).

Zad. 6.14 Jaką największą liczbę N wagonów może ciągnąć do góry lokomotywa (Rys. 18b), jeżeli nachylenie góry względem poziomu wynosi 0,025 ($\sin\alpha = 0,025$) oraz wiadomo, że ciężar lokomotywy jest trzy razy większy od ciężaru wagonu? Współczynnik tarcia statycznego wynosi $\mu_{stat} = 0,1$, a współczynnik tarcia przy toczeniu jest równy $\mu_{kin} = 0,001$.
Odp. $N = 3\frac{(\mu_{stat} - \mu_{kin})\cos\alpha - \sin\alpha}{\sin\alpha + \mu_{kin}\cos\alpha} = 9$.

Zad. 6.15 Na płynący statek działa siła oporu wody równa $F = -bv$, $b > 0$. Gdy działa jego silnik, statek płynie z szybkością v_0. Po wyłączeniu silnika statek zwalnia i zatrzymuje się. Obliczyć położenie i prędkość statku jako funkcje czasu. Jeżeli w ciągu 10 sekund statek zwolnił od prędkości 4 m/s do prędkości 1 m/s, to jak daleko popłynie on, zanim się zatrzyma?
Odp. $v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{b}{m}t\right)$, $x(t) = \frac{v_0 m}{b}\left[1 - \exp\left(-\frac{b}{m}t\right)\right]$, 29 m.

Zad. 6.16 Niewielka kulka o masie m spada w rurze wypełnionej lepką cieczą, która stawia kulce opór proporcjonalny do prędkości kulki (tzn. siła oporu ośrodka wynosi $F = -bv$, $b > 0$). Obliczyć prędkość i zanurzenie kulki jako funkcje czasu, jeżeli $v(0) = 0$ oraz zanurzenie $y(0) = 0$.
Odp. $v(t) = \frac{mg}{b}\left[1 - \exp\left(-\frac{b}{m}t\right)\right]$, $y(t) = \frac{m^2 g}{b^2}\left[\exp\left(-\frac{b}{m}t\right) + \frac{bt}{m} - 1\right]$.

Zad. 6.17 Kamień o masie m rzucono pionowo w dół z prędkością v_0 do studni, w której poziom wody jest na głębokości h. Kamień w powietrzu spada swobodnie (pomijamy opór powietrza), a w wodzie działa na niego siła oporu proporcjonalna do prędkości $\mathbf{F} = -k\mathbf{v}$. Jak położenie, prędkość i przyspieszenie kamienia zależą od czasu?
Odp. $v = v_\infty + (v_1 - v_\infty)e^{-kt/m}$, $a = \left(g - \frac{k}{m}v_1\right)e^{-kt/m}$, $x = v_\infty t + \frac{m}{k}(v_1 = v_\infty)\left(1 - e^{-kt/m}\right) + h$, gdzie $v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$, $v_\infty = \frac{mg}{k}$ oraz przyjmujemy, że $t = 0$ w momencie, gdy kamień osiąga powierzchnię wody. Zależność prędkości i przyspieszenia od czasu w przypadkach $v_1 > v_\infty$, $v_1 = v_\infty$ oraz $v_1 < v_\infty$ przedstawiono na Rys. 19



Rys. 19: Rysunek do **Zad. 6.17**. Zależność prędkości i przyspieszenia od czasu w przypadkach: $v_1 > v_\infty$ (górny rząd), $v_1 = v_\infty$ (środkowy rząd) oraz $v_1 < v_\infty$ (dolny rząd).

Zad. 6.18 W ślad za kamieniem z zad. **Zad. 6.17** wrzucono do studni, po czasie T, drugi kamień o takiej samej masie i z taką samą prędkością. Jaka będzie zależność od czasu odległości D pomiędzy kamieniami?
Odp. $x = v_\infty \left[T + \left(\frac{m}{k} - \frac{v_1}{g}\right) e^{-kt/m}\left(1 - e^{-kt/m}\right)\right]$.

Zad. 6.19 Piłkę o masie m rzucono pionowo w górę z prędkością początkową v_0. Siła oporu powietrza działająca na piłkę jest dana wzorem $\mathbf{F} = -k\mathbf{v}$. Znaleźć równanie ruchu piłki, czas lotu do najwyższego punktu toru i położenie punktu.
Odp. $x = \frac{m}{k}(v_\infty + v_0)\left(1 - e^{-kt/m}\right) - v_\infty t$, gdzie $v_\infty = \frac{mg}{k}$, czas lotu $t_1 = \frac{m}{k}\ln\left(1 - \frac{v_0}{v_\infty}\right)$,
$x_{max} = \frac{m}{k}\left[v_0 - v_\infty \ln\left(1 + \frac{v_0}{v_\infty}\right)\right]$.

Zad. 6.20 Znaleźć zależność od prędkości siły oporu działającej na ciało o masie m, które poruszając się wzdłuż osi x przebywa odcinek $(0, x)$ w czasie $t = ax^2 + bx + c$, gdzie a, b i c są stałymi.
Odp. $F = -2amv^3$

Zad. 6.21 Ciało o masie m i prędkości v_0 wlatuje do ośrodka, w którym działa na nie siła oporu $\mathbf{F} = -kv^{n-1}\mathbf{v}$, gdzie $n \geq 0$. Udowodnić, że ruch tego ciała będzie ruchem prostoliniowym oraz przedyskutować zależność zasięgu i czasu trwania ruchu od wartości n.
Odp. Dla $0 \leq n < 1$ ciało zatrzyma się po przebyciu drogi $s = \frac{m}{k(2-n)}v_0^{2-n}$; dla $n \geq 2$ ciało się nigdy nie zatrzyma, a jego zasięg jest nieograniczony. Uwaga: Przypadki dla $n = 1$ oraz $n = 2$ należy rozpatrzyć osobno.

Zad. 6.22 Samochód o masie m hamowany jest siłą oporu $F = -kv^2$. Jaką drogę przebędzie samochód, zanim jego prędkość zmaleje do połowy?
Odp. $x = \frac{m}{k}\ln 2$.

Zad. 6.23 Człowiek o masie 80 kg osiąga przy spadaniu swobodnym w powietrzu $v_\infty \approx 50$ m/s. Spadochroniarz o tej samej masie osiąga $v_\infty \approx 5$ m/s. Załóżmy, że siła oporu powietrza jest proporcjonalna do prędkości $\mathbf{F} = -k\mathbf{v}$. Jakie są wartości współczynnika k w obu tych przypadkach? Ile wyniesie droga przebyta w czasie $t = 10$ s, jeżeli prędkość początkowa jest równa 0?
Odp. $k_1 = 16$ kg/s, $k_2 = 160$ kg/s, $s_1 = 283$ m, $s_2 = 50$ m.

Zad. 6.24 Na ciało o masie m działa siła $\mathbf{F}$ tworząca z kierunkiem ruchu kąt α. Siła oporu ośrodka zależy od prędkości ciała w następujący sposób: $F_t = -F_0 - kv$. Znaleźć prędkość i przyspieszenie ciała w funkcji czasu, jeżeli w chwili $t = 0$ ciało spoczywa.
Odp. $v = \frac{F\cos\alpha - F_0}{k}\left(1 - e^{-kt/m}\right)$, $a = \frac{F\cos\alpha - F_0}{m}e^{-kt/m}$.

Zad. 6.25 W spadku swobodnym w pewnym zakresie prędkości opór ośrodka $R(v) = kSv^2$, gdzie S jest polem największego przekroju kulki. Obliczyć czas, po jakim kulka spadająca swobodnie w powietrzu osiągnie określony ułamek $x = \frac{v}{v_{gr}}$ swojej prędkości granicznej. Prędkość kulki w chwili początkowej wynosi 0.
Odp. $t = \frac{v_{gr}}{2g}\ln\frac{1+x}{1-x}$.

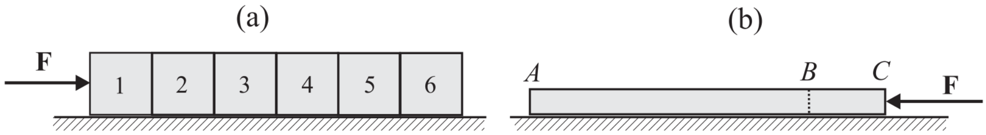
7 Siły kontaktowe, więzy

Zad. 7.1 Dwa klocki o kształtach prostopadłościanów stykające się ścianami bocznymi mogą poruszać się bez tarcia po stole. Na klocki działamy poziomo skierowaną siłą o wartości F raz z lewej, a drugi raz z prawej strony. Obliczyć stosunek wartości sił wzajemnego oddziaływania klocków na siebie w obu przypadkach. Masy klocków wynoszą M oraz m.

Zad. 7.2 Kamień o masie $m = 6$ kg został wyrzucony z wysokości $h = 9,8$ m. Jaką siłą spadający kamień działa na Ziemię? Ile wynosi przyspieszenie Ziemi wywołane działaniem tej siły? O ile przesunie się Ziemia w kierunku kamienia do momentu spotkania się z nim? Masa Ziemi wynosi $M \approx 6 \times 10^{24}$ kg.

Zad. 7.3 Z pewnym przybliżeniem można stwierdzić, że Ziemia i Księżyc wskutek wzajemnego oddziaływania grawitacyjnego poruszają się ruchem jednostajnym po okręgu wokół wspólnego środka masy. Obliczyć stosunek przyspieszeń dośrodkowych obu ciał niebieskich, jeżeli masa Ziemi wynosi $M_Z = 6 \times 10^{24}$ kg, zaś masa Księżyca - $M_K = 7,3 \times 10^{22}$ kg.
Odp. $\frac{a_K}{a_Z} = \frac{M_Z}{M_K} \approx 82$.

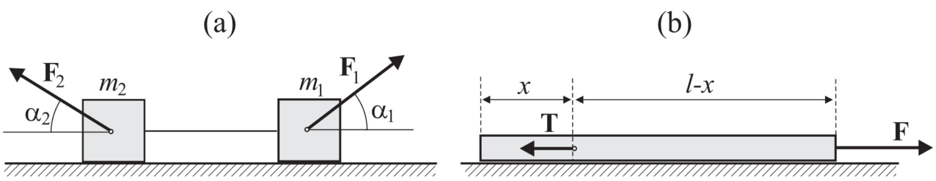
Zad. 7.4 Na płaskim stole leży 6 jednakowych klocków o masie 1 kg (Rys. 20a). Na pierwszy klocek działa siła 10 N w kierunku wskazanym strzałką. Znaleźć wypadkową siłę f działającą na każdy z sześcianów. Zaznaczyć na rysunku siły działające na przylegających ściankach każdych dwóch klocków. Z jaką siłą f_1 czwarty klocek działa na piąty?
Odp. $f = \frac{10}{6}$ N, $f_1 = \frac{10}{3}$ N.



Rys. 20: Rysunek do **Zad. 7.4** (a) i **Zad. 7.5** (b).

Zad. 7.5 Na płaskim stole leży jednorodny pręt AC o masie m i długości l (Rys. 20b). Do pręta przyłożona jest siła F. Jaką siłą F_1 działa wydzielony myślowo odcinek $AB = \frac{4}{5}l$ na odcinek BC pręta?
Odp. $F_1 = -\frac{4}{5}F$.

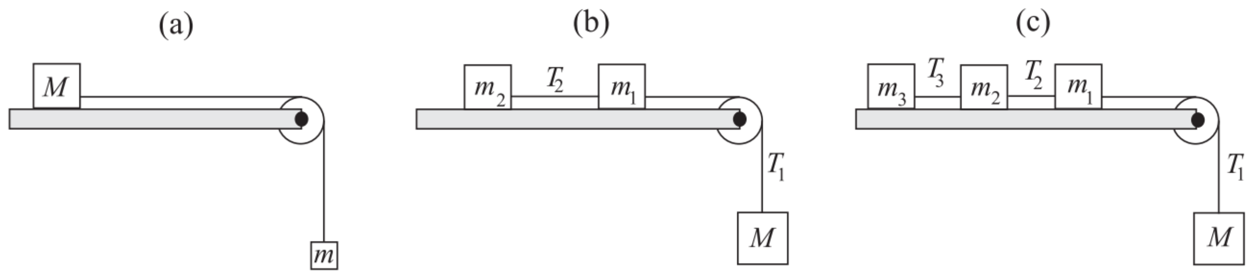
Zad. 7.6 Na dwa klocki o masach m_1 i m_2 związane nierozciągliwą nicią działają siły $\mathbf{F_1}$ i $\mathbf{F_2}$ pod kątami α_1 i α_2 w stosunku do poziomu (Rys. 21a). Znaleźć przyspieszenie układu, jeżeli współczynnik tarcia pomiędzy klockami i płaszczyzną wynosi μ .
Odp. $a = \frac{F_1 \cos\alpha_1 - F_2 \cos\alpha_2 - \mu[(m_1+m_2)g - F_1 \sin\alpha_1 - F_2 \sin\alpha_2]}{m_1+m_2}$.



Rys. 21: Rysunek do **Zad. 7.6** (a) i **Zad. 7.7** (b).

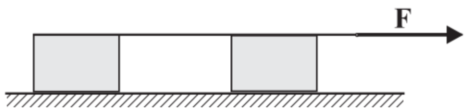
Zad. 7.7 Jednorodny blok o stałym przekroju i długości l posuwa się z tarciem po poziomej powierzchni pod działaniem poziomej siły o wartości F. Znaleźć naprężenie T w bloku w funkcji odległości od jego tylnego końca (Rys. 21b).
Odp. $T = \frac{F}{l}x$.

Zad. 7.8 Obliczyć przyspieszenia z jakimi poruszają się masy oraz naprężenia nici w sytuacjach przedstawionych na (Rys. 22). Zaniedbać masę nici oraz masę bloczka. Rozpatrzyć układy przy założeniu braku tarcia i z tarciem.
Odp. Przy braku tarcia: (a) $a = \frac{m}{m+M}g$, $T = \frac{Mm}{M+m}g$; (b) $a = \frac{M}{M+m_1+m_2}g$, $T_1 = (m_1 + m_2)a$, $T_2 = m_2a$; (c) $a = \frac{M}{M+m_1+m_2+m_3}g$, $T_1 = (m_1 + m_2 + m_3)a$, $T_2 = (m_2 + m_3)a$, $T_3 = m_3a$.



Rys. 22: Rysunek do **Zad. 7.8**.

Zad. 7.9 Dwa identyczne ciała leżą na płaskim stole i połączone są nicią w taki sposób, że tworzy ona linię prostą (Rys. 23). Nić wytrzymuje naprężenie nie większe niż $T = 20$ N. Jaką siłę F należy przyłożyć poziomo do jednego z ciał, by zerwać nić?
Odp. $F \geq 40$ N.



Rys. 23: Rysunek do **Zad. 7.9**.

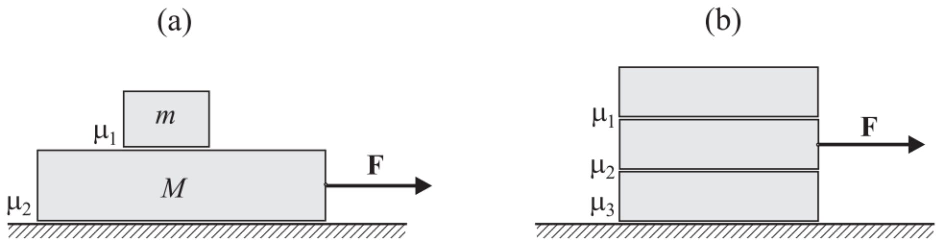
Zad. 7.10 Lokomotywa ciągnie dwie naładowane platformy rozwijając przy tym siłę ciągu 800 N. Masa pierwszej platformy wynosi 12 t, drugiej - 8 t. Obliczyć naprężenie zaczepu pomiędzy platformami.
Odp. $T = \frac{m_2}{M_1+m_2}F = 320$ N.

Zad. 7.11 Do ciężaru A o masie $m_A = 7$ kg zawieszono na sznurze ciężar B o masie $m_B = 5$ kg. Masa sznura wynosi $m = 4$ kg. Do ciężaru A przyłożono siłę $F = 240$ N skierowaną do góry. Wyznaczyć naprężenie w górnym końcu sznura i jego środku.
Odp. $T_1 = (m_B + m)(a + g)$, $T_2 = \left(m_B + \frac{m}{2}\right)(a + g)$.

Zad. 7.12 Koń ciągnie sanie. Przeanalizować wzajemne oddziaływanie układu trzech ciał: konia, sani i powierzchni Ziemi. Zaznaczyć wektory sił działających na każde z tych ciał i ustalić zależności pomiędzy nimi.

Zad. 7.13 Jak zmieniają się współzależności pomiędzy siłami z **Zad. 7.12**, jeżeli koń wraz z saniami porusza się z przyspieszeniem a? Określić wartość wszystkich sił, jeżeli $a = 0,2$ m/s^2. Masa sani wynosi $M = 0,5$ t, masa konia - $m = 0,35$ t, a współczynnik tarcia sani o śnieg - $\mu = 0,3$.

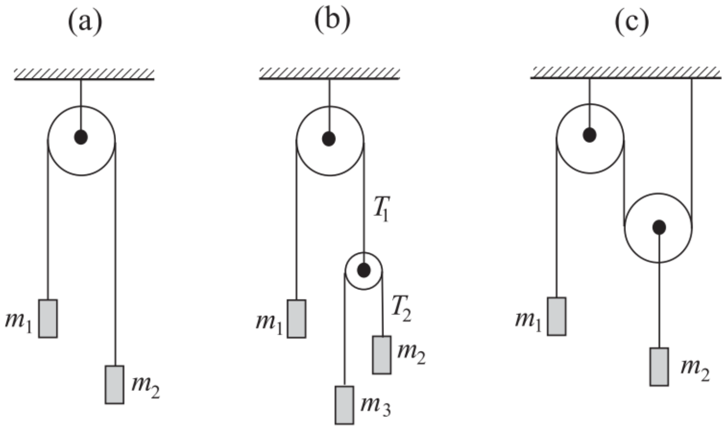
Zad. 7.14 Jaką maksymalną siłę F można przyłożyć do dolnego klocka (Rys. 24a), by górny klocek nie zsunął się w ruchu z przyspieszeniem? Współczynnik tarcia dla górnego klocka wynosi $\mu_1 = 0,1$, a dla dolnego $\mu_2 = 0,2$. Ciężar górnego klocka jest równy $Q_1 = 10$ N, dolnego - $Q_2 = 20$ N.
Odp. $F = (Q_1 + Q_2)(\mu_1 + \mu_2) = 9$ N.



Rys. 24: Rysunek do **Zad. 7.14** (a) oraz **Zad. 7.15** (b).

Zad. 7.15 Trzy klocki o jednakowych masach $m = 1$ kg są ułożone jeden na drugim (Rys. 24b). Współczynnik tarcia pomiędzy pierwszym i drugim klockiem wynosi $\mu_1 = 0,1$, pomiędzy drugim i trzecim - $\mu_2 = 0,2$, pomiędzy trzecim i podłożem $\mu_3 = 0,1$. Klocek drugi ciągnięty jest w kierunku poziomym pewną siłą F. Przy jakiej wartości siły możliwy jest ruch trzech klocków, w którym pierwszy i trzeci klocek pozostają w spoczynku względem siebie? Obliczyć przyspieszenia a_1, a_2 i a_3 wszystkich trzech klocków w tym ruchu.
Odp. 1) Wszystkie klocki znajdują się w spoczynku: $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, $F \leq 3\mu_3 mg = 2,94$ N; 2) Cały układ porusza się jako jedna całość: $a_1 = a_2 = a_3 = a$, $0 < a \leq \mu_1 g = 0,98$ m/s^2, $3\mu_3 mg < F \leq 2mg(\mu_1 + \mu_2) = 5,88$ N; 3) $a_1 = a_2 \neq a_3$, $a_1 = a_3 = \mu_1 g = 0,98$ m/s^2, $a_2 = \frac{F}{2} - g(\mu_1 + 2\mu 2) > 0,98$ m/s^2, $F > 2mg(\mu_1 + \mu_2) = 5,88$ N.

Zad. 7.16 Obliczyć przyspieszenia mas, siły działające na osie bloczków oraz naprężenia nici w sytuacjach przedstawionych na Rys. 25.[2] Masy bloczków i nici oraz tarcie zaniedbać.
Odp. (a) $a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$, $T = 2\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$, $f = 2T$; (b) $a_1 = \frac{m_1(m_2+m_3) - 4m_2 m_3}{m_1(m_2+m_3) + 4m_2 m_3} g$, $T_1 = \frac{8m_1 m_2 m_3}{4m_2 m_3 + m_1(m_2+m_3)} g$, $T_2 = \frac{T_1}{2}$; (c) $a_1 = \frac{4m_1 - 2m_2}{4m_1 + m_2} g$, $a_2 = -\frac{a_1}{2}$, $T = \frac{3M_1 m_2}{4m_1 + m_2} g$.



Rys. 25: Rysunek do **Zad. 7.16**.

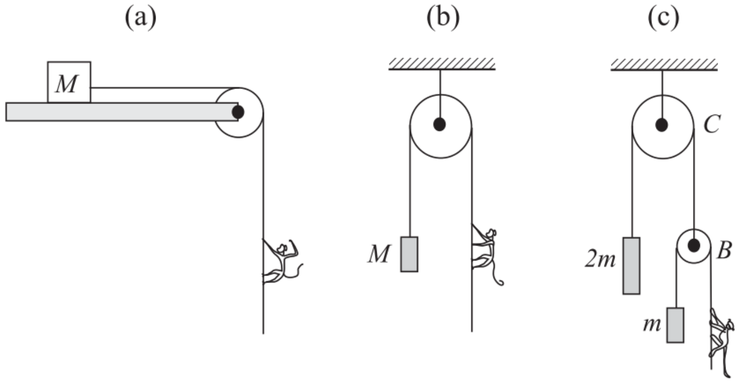
Zad. 7.17 W układzie opisanym w zad. **Zad. 7.16a** masy m_1 oraz m_2 poruszają się. W przedziale czasu t od rozpoczęcia ruchu, masa m_1 opadała o n-tą część odległości, o jaką opadałaby, gdyby opadała swobodnie? Jaki jest stosunek mas m_1 i m_2?
Odp. $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n+1}{n-1}$. Wynik ten można łatwo uzyskać na podstawie odpowiedzi do zad. **Zad. 7.16a** podstawiając za $a = \frac{g}{n}$.

Zad. 7.18 Na linie przerzuconej przez blok i przyczepionej do masy M znajduje się małpka o masie m (Rys. 26a). Znaleźć przyspieszenie a masy M w przypadku, gdy: (i) małpka nie porusza się względem liny; (ii) małpka wspina się po linie ze stałą prędkością v_0 względem liny; (iii) małpka wspina się po linie ze stałym przyspieszeniem a_0 względem liny. Zagadnienie rozwiązać przy założeniu, że masa M porusza się bez tarcia oraz gdy na masę M działa siła tarcia (współczynnik tarcia równy μ).
Odp. Bez tarcia: (i) $a = \frac{m}{M+m} g$; (ii) jak poprzednio, z tym, że odległość małpki od masy M będzie malała; (iii) całkowite przyspieszenie małpki: $a' = \frac{mg - Ma_0}{M+m}$ oraz $a = \frac{m}{M+m}(g + a_0)$. Z tarciem: (i) $a = \frac{mg - \mu Mg}{M+m}$; (ii) jak poprzednio; (iii) $a' = \frac{mg - Ma_0 - \mu Mg}{M+m}$, $a = a' + a_0 = \frac{mg - \mu Mg + ma_0}{M+m}$.

Zad. 7.19 Znaleźć rozwiązanie **Zad. 7.18** w przypadku, gdy masa M wisi po drugiej stronie bloczka (Rys. 26b).
Odp. (i) $a = \frac{m-M}{M+m} g$; (ii) jak poprzednio; (iii) $a' = \frac{mg - Mg - Ma_0}{M+m}$, $a = a' + a_0 = \frac{mg + ma_0 - Mg}{M+m}$.

Zad. 7.20 Małpka o masie m jest równoważona przeciwwagą na bloczku B. Blok B jest z kolei równoważony ciężarem o masie $2m$ na nieruchomym bloku C (Rys. 26c). Układ na początku jest nieruchomy. Z jaką prędkością będzie podnosić się ciężar o masie $2m$, jeśli małpka w pewnym momencie zacznie ciągnąć linkę z dowolną prędkością v? Masy obu bloczków zaniedbać.
Odp. Ciężar będzie podnosił się z prędkością $\frac{v}{4}$, niezależnie od tego, czy prędkość z jaką małpka przeciąga linkę jest stała, czy nie.

[2] W celu znalezienia rozwiązania części b) należy oznaczyć przez x_1, x_2 oraz x_3 odległości mas m_1, m_2 oraz m_3 od płaszczyzny, do której przytwierdzony jest nieruchomy bloczek. Zachodzi wówczas równość: $x_2 + x_3 + 2x_1 = l_2 + 2L_1 + \text{const.}$, gdzie l_1 i l_2 są długościami nici. Po dwukrotnym zróżniczkowaniu uzyskamy niezbędną dla rozwiązania zagadnienia zależność pomiędzy przyspieszeniami wszystkich trzech mas: $a_2 + a_3 + 2a_1 = 0$.

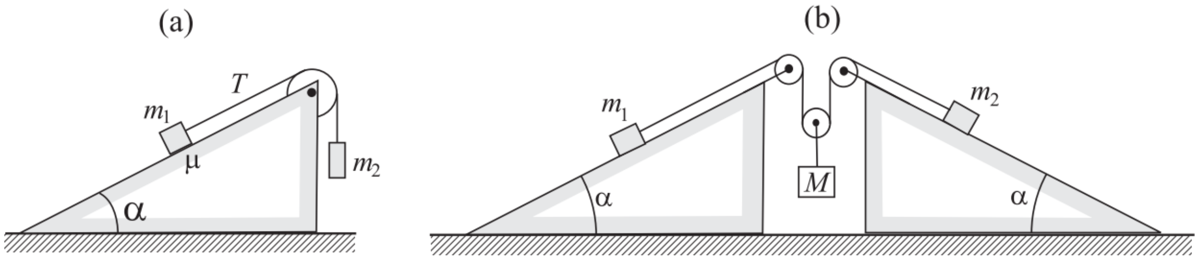


Rys. 26: Rysunek do **Zad. 7.18** (a), **Zad. 7.19** (b) i **Zad. 7.20** (c).

Zad. 7.21 Przez blok przerzucono linkę o długości l. Na końcach linki, w jednakowej odległości $l/2$ od bloku, znajdują się dwie małpki. W pewnym momencie małpki zaczynają jednocześnie podciągać się do góry, przy czym jedna podciąga się z prędkością v, druga z prędkością $2v$. Po jakim czasie każda z nich dotrze do bloku. Zaniedbać masę bloku i linki; przyjąć, że masy małpek są jednakowe.
Odp. Obie małpki dotrą do bloku jednocześnie w czasie $\tau = \frac{l}{3v}$. W rzeczy samej naprężenie linki po obu stronach bloku jest jednakowe. Oznacza to, że zarówno przyspieszenia, jak i prędkości małpek względem bloku będą jednakowe. Skoro zbliżają się one do siebie z prędkością $3v$, to cały odcinek l przebędą one w czasie $l/3v$.

Zad. 7.22 Masa pierwszej małpki z **Zad. 7.21** jest dwukrotnie większa od masy drugiej. Która z nich dotrze wcześniej do bloku?
Odp. Do bloku dotrze szybciej lżejsza małpka, ponieważ jej przyspieszenie względem bloku będzie skierowane do góry, podczas, gdy cięższej - w dół.

Zad. 7.23 Obliczyć przyspieszenia oraz naprężenia nici w układzie przedstawionym na Rys. 27a. Rozważania przeprowadzić zaniedbując tarcie oraz z uwzględnieniem tarcia pomiędzy masą m_1 i powierzchnią równi.
Odp. Bez tarcia: $a = \frac{m_2 - m_1 \sin\alpha}{m_1+m_2} g$, $T = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(1 + \sin\alpha)g$, Z tarciem: $a = \frac{m_2 - m_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m_1+m_2} g$, $T = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(1 + \sin\alpha + \mu\cos\alpha)g$.

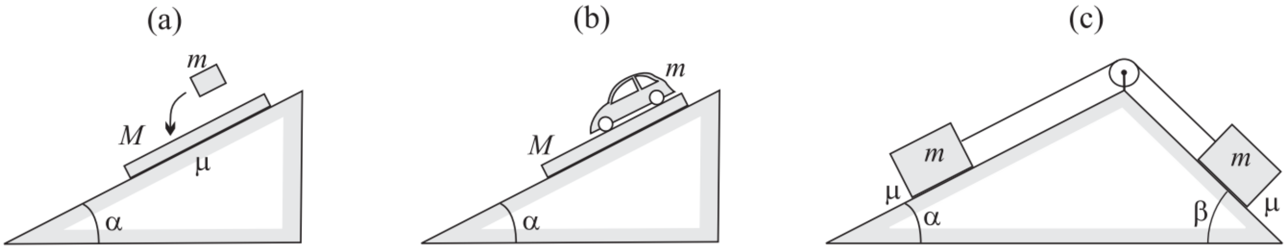


Rys. 27: Rysunek do **Zad. 7.23** (a) i **Zad. 7.24** (b).

Zad. 7.24 Znaleźć przyspieszenia oraz naprężenia nici w układzie przedstawionym na Rys. 27b. Zaniedbać masy bloczków i tarcie. Kliny traktować jako przytwierdzone na stałe do podłoża.
Odp. $a = \frac{M(m_1+m_2) - 4m_1 m_2 \sin\alpha}{M(m_1+m_2) + 4m_1 m_2} g$.

Zad. 7.25 Po równi pochyłej nachylonej pod kątem α zsuwa się deska o masie M (Rys. 28a). Współczynnik tarcia deski o równię wynosi μ. Na desce umieszczono klocek o masie m, który porusza się bez tarcia. Przy jakiej najmniejszej masie klocka m_{min} ruch deski po równi odbywać się będzie ze stałą prędkością?
Odp. $m_{min} = M \frac{\tan\alpha - \mu}{\mu}$.

Zad. 7.26 Z jakim przyspieszeniem powinien zjeżdżać w dół samochód o masie m po desce o masie M położonej na nieruchomym klinie o kącie nachylenia α, aby deska ślizgała się do góry po klinie ruchem jednostajnym (Rys. 28b). Współczynnik tarcia kół samochodu o deskę wynosi μ_1, deski o klin μ_2.



Rys. 28: Rysunek do **Zad. 7.25** (a), **Zad. 7.26** (b) i **Zad. 7.27** (c).

Odp. $a = \left(1 + \frac{M}{m}\right)(\sin\alpha + \mu_2 \cos\alpha)g$. Stąd widać, że a nie zależy od μ_1. Zatem μ_1 może być dowolne, ale różne od zera, w przeciwnym razie deska nie mogłaby się poruszać w górę.

Zad. 7.27 Dwa jednakowe klocki są połączone nieważką nicią przerzuconą przez nieważki blok. Płaszczyzny obu równi, na których znajdują się klocki, tworzą z poziomem kąty α i β (Rys. 28c). Znaleźć przyspieszenie a obciążników i siłę naprężenia T nici. Współczynnik tarcia klocków o obie równie jest jednakowy i wynosi μ.
Odp. $a = \frac{g}{2}(\sin\alpha - \sin\beta - \mu\cos\alpha + \mu\cos\beta)$, $T = \frac{mg}{2}(\sin\alpha + \sin\beta - \mu\cos\alpha - \mu\cos\beta)$.

8 Praca, energia mechaniczna

Zad. 8.1 Ciało początkowo ześlizguje się z równi pochyłej o kącie nachylenia $\alpha = 30°$, a następnie ślizga się po powierzchni poziomej. Drogi przebyte przez ciało po powierzchni poziomej i po równi pochyłej są jednakowe. Wyznaczyć współczynnik tarcia μ, przyjmując, że jest on taki sam na powierzchni poziomej i na równi.
Odp. $\mu = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \approx 0,27$.

Zad. 8.2 Z wierzchołków dwóch równi pochyłych o tej samej wysokości i kątach nachylenia α_1 i α_2 ześlizgują się bez prędkości początkowej dwa jednakowe ciała. Jaki jest stosunek prędkości $\frac{v_1}{v_2}$ tych ciał u podstaw równi w dwóch sytuacjach: (a) bez uwzględnienia tarcia; (b) jeżeli tarcie występuje, przy czym współczynnik tarcia dla obu równi jest jednakowy i równy μ?
Odp. (a) $\frac{v_1}{v_2} = 1$.

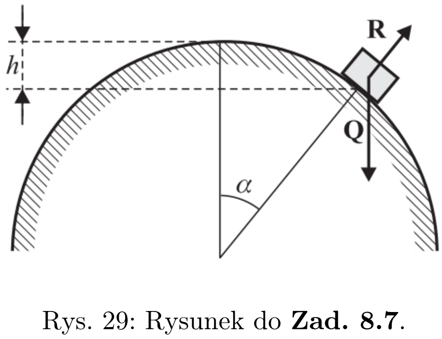
Zad. 8.3 Na masę m działa siła sprężystości $F = -kx$. Obliczyć pracę wykonaną przeciw tej sile przy przemieszczeniu masy z położenia równowagi $x = 0$ do położenia $x = l$. Jaką pracę przeciw sile sprężystości należy wykonać przy przemieszczeniu z położenia $x = l$ do $x = 2l$ oraz z położenia $x = 2l$ do $x = 3l$? Jaką pracę należy wykonać przy przemieszczeniu z położenia $x = 0$ do $x = 3l$?

Zad. 8.4 Masa m, na którą działa siła sprężystości $F = -kx$ została przemieszczona z położenia równowagi $x = 0$ do położenia $x = -A$ i puszczona swobodnie. Jaka jest energia potencjalna układu w położeniu $x = -A$ i $x = A/2$? Obliczyć prędkość masy przy przechodzeniu przez położenie równowagi.

Zad. 8.5 Spoczywająca początkowo masa m pod wpływem działania siły F została rozpędzona do prędkości v. Obliczyć pracę, którą wykonała siła F nad masą m.

Zad. 8.6 Jaką pracę należy wykonać, by wciągnąć ciało o masie m na górę o wysokości H po drodze o długości L, jeżeli współczynnik tarcia pomiędzy ciałem i powierzchnią góry wynosi μ. Kąt nachylenia góry do poziomu na odcinku L nie zmienia się.
Odp. $W = mg\left(H + \mu\sqrt{L^2 - H^2}\right)$.

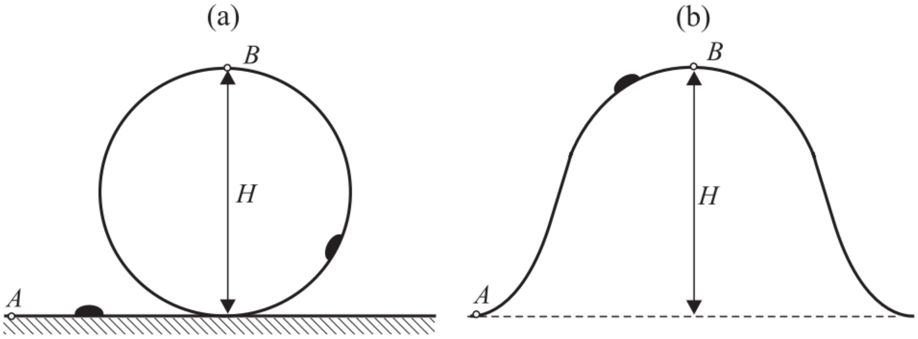
Zad. 8.7 Niech ciało o masie m ześlizguje się bez tarcia z wierzchołka pionowo ustawionej obręczy o promieniu r (Rys. 29). Jaką siłą będzie ono naciskać na obręcz, przechodząc przez punkt, którego wysokość jest mniejsza od wysokości wierzchołka obręczy o h? Na jakiej wysokości h_0 poniżej wierzchołka obręczy ciało oderwie się od podłoża? Początkowa prędkość ciała na wierzchołku jest równa zeru.
Odp. $R = mg\frac{r-3h}{r}$, $h_0 = \frac{r}{3}$.



Rys. 29: Rysunek do **Zad. 8.7**.

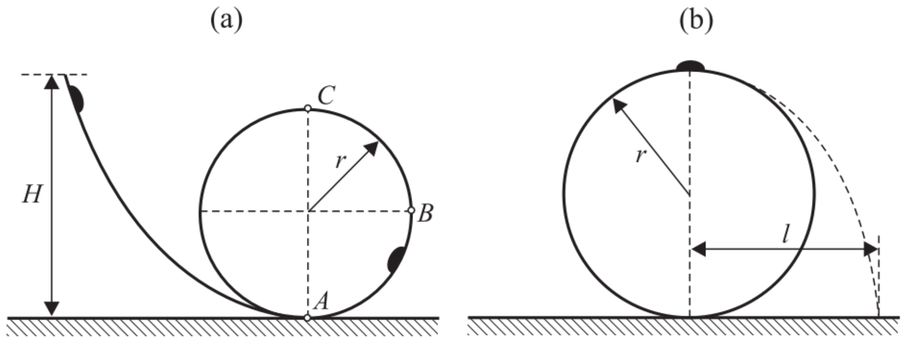
Zad. 8.8 Ciału nadaje się taką prędkość początkową, aby mogło ono z punktu A dostać się do punktu B. Proponuje się dwa warianty drogi od A do B (wariant 1: Rys. 30a, wariant 2: Rys. 30b). W obydwu sytuacjach ciało powinno pokonać taką samą wysokość H, ale za każdym razem inaczej. Znaleźć minimalną prędkość początkową v_0 dla obu wariantów. Tarcie pominąć.
Odp. 1: $v_0 = \sqrt{\frac{5}{2}gH}$; 2: $v_0 = \sqrt{2gH}$.

Zad. 8.9 Znaleźć wysokość h punktu oderwania ciała od obręczy (Rys. 30a) pod warunkiem, że prędkość początkowa wynosi $v_0 = \sqrt{2gH}$.
Odp. $h = \frac{5}{6}H$.



Rys. 30: Rysunek do **Zad. 8.8** (a), (b) i **Zad. 8.9** (a).

Zad. 8.10 Ciało ześlizguje się bez tarcia z wysokości $H = 60$ cm i zakreśla pętlę o promieniu $r = 20$ cm (Rys. 31a). Znaleźć stosunek sił, jakimi ciało naciska na podłoże w punktach A, B i C. Z jakiej minimalnej wysokości H powinno ześlizgiwać się, aby obiegło martwą pętlę o promieniu r?
Odp. $(r + 2H) : 2(H - r) : (2H - 5r) = 7 : 4 : 1$, $H = \frac{5}{2}r = 50$ cm.



Rys. 31: Rysunek do **Zad. 8.10** (a) i **Zad. 8.11** (b).

Zad. 8.11 Obręcz o promieniu r przymocowano do podłogi w pozycji pionowej. Z wierzchołka obręczy ześlizguje się bez tarcia ciało (Rys. 31b). W jakiej odległości l od punktu umocowania obręczy upadnie ciało?
Odp. $l \approx 1,3r$.

Zad. 8.12 Pojemnik dźwigu, który naładowany jest materiałem o łącznej masie $m = 1$ t, porusza się do góry z przyspieszeniem $a = 2$ m/s^2. Obliczyć pracę dźwigu w ciągu pierwszych 5 s oraz moc silnika dźwigu.
Odp. $W = \frac{mat^2}{2}(g + a) = 295,25$ kJ, $P = \frac{mat}{2}(g + a) = 59,05$ kW.

Zad. 8.13 W pewnym polu sił równania ruchu cząstki o masie $m = 0,5$ kg są następujące:

$$x = 5t^2 - t,$$

$$y = 2t^3,$$

$$z = -3t + 2.$$

Znaleźć zależność od czasu mocy przekazywanej przez pole cząstce.
Odp. $P = \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \mathbf{F}\mathbf{v} = 36t^3 + 50t - 5$ W.

Zad. 8.14 Czy siła $\mathbf{F} = (2xz^2 - 2y, -2x - 6yz, 2x^2z - 3y^2)$ jest siłą zachowawczą? Jeżeli tak, to znaleźć odpowiadającą jej energię potencjalną.
Odp. Siła zachowawcza, $E_p = 2xy + 3y^2z - x^2z^2 + C$.

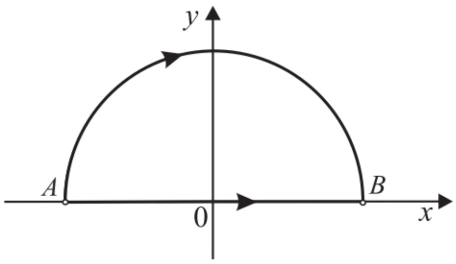
Zad. 8.15 Rozwiązać zadanie **Zad. 8.14** dla sił:

$$\mathbf{F}_1(x, y, z) = (x^2z, -xy, 5),$$

$$\mathbf{F}_2(x, y, z) = (-2x - yz, z - xz, y - xy).$$

Odp. $\mathbf{F}_1$ - siła niezachowawcza; $\mathbf{F}_2$ - siła zachowawcza, $E_p = xyz + x^2 - yz + C$.

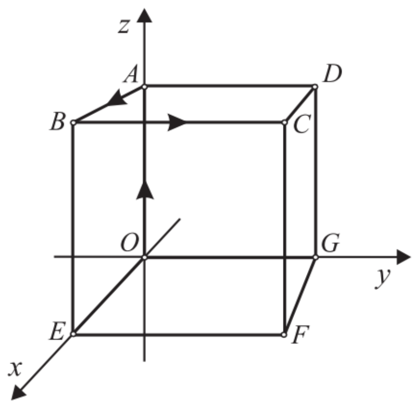
Zad. 8.16 Obliczyć pracę wykonaną przez siłę $\mathbf{F}_1$ z zad. **Zad. 8.15** przy przejściu od punktu $A = (-1, 0, 0)$ do punktu $B = (1, 0, 0)$ (Rys. 32): (a) po prostej wzdłuż osi x, (b) po półokręgu w płaszczyźnie xy.
Odp. (a) $W_1 = 0$, (b) $W_2 = \frac{2}{3}$.



Rys. 32: Rysunek do **Zad. 8.16**.

Zad. 8.17 Cząstka znajduje się w polu o energii potencjalnej E_p. Znaleźć i sklasyfikować punkty równowagi cząstki w polach o energii potencjalnej danej wzorami: (a) $E_p = Ax^2(x-3)$ oraz (b) $E_p = x^4 - 2x^3 + x^2 - 1$.
Odp. (a) $x_1 = 0$ - równowaga nietrwała, $x_2 = 2$ - równowaga trwała, (b) $x_1 = 0$ - równowaga trwała, $x_2 = 1/2$ - równowaga nietrwała, $x_3 = 1$ - równowaga trwała.

Zad. 8.18 Obliczyć pracę wykonaną przez siłę $\mathbf{F} = (x + y, y - x, 2z - x - 3y)$ w trakcie przemieszczania cząstki o masie m z punktu O do punktu C wzdłuż drogi $OABC$, którą stanowią krawędzie sześcianu o boku a (Rys. 33). Punkt O jest wierzchołkiem sześcianu umieszczonym w początku układu współrzędnych. Krawędź OA leży na osi z, krawędź AB jest równoległa do osi x, krawędź BC jest równoległa do osi y.



Rys. 33: Rysunek do **Zad. 8.18**.

Zad. 8.19 Oblicz pracę wykonaną przez siłę z zad. **Zad. 8.18** w trakcie przemieszczenia cząstki o masie m wzdłuż (a) drogi OC oraz (b) zamkniętej drogi $OFCAO$. Co można powiedzieć o charakterze siły na podstawie wyniku uzyskanego w punkcie (b)?

Zad. 8.20 W pewnym polu wektorowym siła ma postać $\mathbf{F} = (x + y^2, 2y)$. Wyznaczyć pracę, jaką trzeba wykonać pokonując siłę wzdłuż linii prostej od punktu $A(0, 0)$ do $B(3, 1)$.

Zad. 8.21 W pewnym polu wektorowym składowe sił są $F_x = xy$, $F_y = y + z$ i $F_z = z$. Wyznaczyć pracę, jaką trzeba wykonać pokonując siły wzdłuż linii $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$ i $z = t$ od punktu $A(2, 0, 0)$ do $B(0, 2, \frac{1}{2}\pi)$.
Odp. $W = \frac{1}{8}\pi^2 + \pi - \frac{8}{3}$.

Zad. 8.22 Pole elektrostatyczne między okładkami kondensatora cylindrycznego ma natężenie $\mathbf{E} = a\frac{x}{r^3}\mathbf{i} + a\frac{y}{r^3}\mathbf{j}$, gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Wyznaczyć pracę, którą trzeba wykonać, aby ładunek jednostkowy przesunąć wzdłuż prostej $x = 3t$, $y = 4t$, $z = 0$ z punktu $M(3, 4, 0)$ do punktu $P(6, 8, 0)$.
Odp. $W = \frac{1}{10}a$.

Zad. 8.23 Dane jest pole wektorowe sił $F_x = xz - z$, $F_y = 0$, $F_z = 2x + z^2$. Wyznaczyć, jaką pracę trzeba wykonać pokonując pola wzdłuż drogi łuku $z = x^3$ od punktu $A(0,0,0)$ do $B(1,0,1)$.
Odp. $W = \frac{107}{60}$.

Zad. 8.24 Natężenie pola grawitacyjnego wytworzonego przez punktową masę M ma postać $\mathbf{G} = \frac{GM}{r^3}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$, gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Wyznaczyć pracę, którą trzeba wykonać, aby przesunąć punktową masę jednostkową wzdłuż drogi $x = \cos t$, $y = 1$, $z = z \sin t$ z punktu $M(1,1,0)$ do punktu $N(0,1,1)$.
Odp. $W = \frac{GM\sqrt{2}}{4}(2 + \pi)$.

9 Zasada zachowania pędu

Zad. 9.1 Punkt materialny o masie $m_1 = 50$ g ma prędkość $\mathbf{v}_1 = 15\mathbf{i} + 25\mathbf{j}$ cm/s, natomiast punkt materialny o masie $m_2 = 25$ g ma prędkość $\mathbf{v}_2 = -50\mathbf{j} + 25\mathbf{k}$ cm/s. Obliczyć prędkość środka masy $\mathbf{v}_{sm}$ oraz pęd całkowity $\mathbf{p}_c$ układu.

Zad. 9.2 Cząstka o masie $m_1 = 3$ kg porusza się z prędkością $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ m/s, cząstka o masie $m_2 = 2$ kg porusza się z prędkością $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{i} + \mathbf{k}$ m/s, natomiast cząstka o masie $m_3 = 5$ kg porusza się z prędkością $\mathbf{v}_3 = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$ m/s. Obliczyć prędkość środka masy $\mathbf{v}_{sm}$ oraz całkowity pęd $\mathbf{p}$ układu.

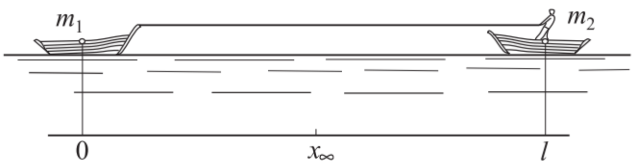
Zad. 9.3 Po długim wózku o masie $m_w = 150$ kg, który porusza się do przodu z prędkością $v = 2$ m/s, przechadza się w kierunku przeciwnym człowiek o masie $m_c = 50$ kg. Prędkość marszu względem platformy wózka wynosi $v_c = 1$ m/s. Obliczyć prędkość środka układu wózek-człowiek oraz pęd całkowity układu. Kierunek ruchu wózka uznać za dodatni.

Zad. 9.4 Łyżwiarz opierający się o barierę, wyrzucił kamień poziomo z prędkością $v_0 = 14$ m/s. Jaką prędkość v względem powierzchni Ziemi nada temu kamieniowi, jeżeli stojąc na łyżwach na gładkim lodzie wyrzuci kamień, uwalniając taką samą energię jak poprzednio? Wyznaczyć drogę, jaką przejedzie łyżwiarz od miejsca wyrzucenia kamienia do miejsca zatrzymania, jeżeli współczynnik tarcia łyżew o lód jest równy $\mu = 0,02$. Masa kamienia $m = 3$ kg, masa łyżwiarza wynosi $M = 60$ kg.

Zad. 9.5 Z działka o masie M, ześlizgującego się swobodnie po pochyłości o kącie nachylenia α do poziomu w momencie, kiedy przemierzyło ono odległość l, wystrzelono poziomo pocisk. Jaka powinna być prędkość pocisku, aby działko zatrzymało się. Zaniedbać tarcie oraz założyć, że $m \ll M$.
Odp. $v = \frac{m\sqrt{2gl\sin\alpha}}{M\cos\alpha}$.

Zad. 9.6 Trzy jednakowe łodzie o masie m płyną z tą samą prędkością v jedna za drugą. Ze środkowej łodzi jednocześnie wyrzucono do pierwszej i trzeciej łodzi jednakowe odważniki o masie m_1 z prędkością u. Jakie będą prędkości łodzi po przerzuceniu odważników?
Odp. $v_3 = \frac{m_1(v+u)+mv}{m+m_1}$, $v_2 = v$, $v_1 = \frac{m_1(v-u)+mv}{m+m_1}$.

Zad. 9.7 Człowiek stojący w początkowo nieruchomej łodzi przyciąga do siebie za pomocą liny drugą łódź (Rys. 34). Łodzie od momentu zetknięcia poruszają się dalej razem. Wskutek oporu wody proporcjonalnego do prędkości łodzi, ruch łodzi po niezmiernie długim czasie ustanie. W jakim miejscu x_∞ znajdują się wtedy łodzie? Masy łodzi wynoszą m_1 oraz m_2, początkowa odległość pomiędzy środkami ich mas - l.
Odp. $x_\infty = l/2$.



Rys. 34: Rysunek do **Zad. 9.7**

Zad. 9.8 Dwie łodzie płyną naprzeciw siebie po liniach prostych, równoległych. Kiedy znajdują się naprzeciw siebie, wzajemnie przerzucone zostają ładunki o masie 50 kg, w wyniku czego pierwsza z łodzi zatrzymuje się, a druga porusza się z prędkością 8,5 m/s w tym samym kierunku. Jakie były prędkości łodzi, do momentu wymiany ciężarów, jeżeli masy łodzi z ładunkiem były równe 500 kg oraz 1 t?
Odp. 9 m/s i 1 m/s.

Zad. 9.9 Wagon o masie $m_1 = 50$ t, poruszający się z prędkością $v_0 = 12$ km/h, zderza się ze stojącą na jego drodze platformą o masie $m_2 = 30$ t. Obliczyć prędkość v wspólnego ruchu wagonu i platformy bezpośrednio po tym, jak zadziałał sprzęg automatyczny. Obliczyć drogę s, przebytą przez układ wagon-platforma, jeżeli siła oporu stanowiła $n = 5\%$ ciężaru tego układu.
Odp. $v = v_0\frac{m_1}{m_1+m_2} = 7,5$ km/h, $s = \frac{v_0^2}{2g}\frac{100}{n}\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right) = 4,43$ m.

Zad. 9.10 Z armaty o masie M, znajdującej się u podnóża góry, wyleciał w kierunku poziomym pocisk o masie m z prędkością początkową v_0. Na jaką wysokość wjedzie armata po zboczu góry w wyniku odrzutu, jeżeli nachylenie zbocza wynosi α, a współczynnik tarcia armaty o podłoże - μ?
Odp. $h = \frac{v_0^2}{2g}\left(\frac{m}{M}\right)^2 \frac{\cos\alpha^2 \sin\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}$.

Zad. 9.11 Niech ciało o masie m uderza centralnie z prędkością v_0 w spoczywające ciało o masie M. Wyznaczyć prędkości ciał po zderzeniu idealnie sprężystym.

Zad. 9.12 Pal o masie $m_1 = 100$ kg jest wbijany w grunt bijakiem kafara, który ma masę $m_2 = 300$ kg. Bijak kafara swobodnie spada z wysokości $H = 4$ m, a w czasie każdego uderzenia pal obniża się o $h = 10$ cm. Przyjmując, że siła oporu F gruntu jest stała, wyznaczyć jej wartość dla dwóch przypadków: (a) uderzenie w pal jest idealnie sprężyste; (b) uderzenie jest niesprężyste.
Odp. (a) $F = m_1 g\left(1 + \frac{4Hm_2^2}{h(m_1+m_2)^2}\right) \approx 89$ kN; (b) $F = (m_1+m_2)g\left(1 + \frac{Hm_2^2}{h(m_1+m_2)^2}\right) \approx 92$ kN.

Zad. 9.13 Po pręcie poziomym bez tarcia ślizga się z prędkością v_0 kula o masie $m_1 = M$ i zderza się z inną kulą o masie m_2, która wcześniej była w spoczynku. Zderzenie jest idealnie niesprężyste. Znaleźć prędkość v kul po zderzeniu oraz ciepło Q wydzielone podczas zderzenia w następujących przypadkach: (a) $m_2 = \frac{M}{2}$; (b) $m_2 = M$; (c) $m_2 = 2M$.
Odp. $v = \frac{v_0 m_1}{m_1+m_2} =$ (a) $\frac{2}{3}v_0$; (b) $\frac{1}{2}v_0$; (c) $\frac{1}{3}v_0$; $Q = \frac{m_1 v_0^2}{2}\left(1 - \frac{m_1}{m_1+m_2}\right) =$ (a) $\frac{1}{6}Mv_0^2$; (b) $\frac{1}{4}Mv_0^2$; (c) $\frac{1}{3}Mv_0^2$.

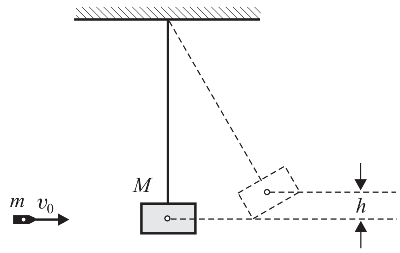
Zad. 9.14 Kulka plastelinowa o masie m_1 poruszająca się wzdłuż linii prostej z prędkością $\mathbf{v}_1$ uderza w spoczywającą kulkę o masie m_2. W wyniku zderzenia kulki sklejają się kontynuując swój ruch. Obliczyć wektor prędkości $\mathbf{v}'$ obu kulek po zderzeniu, zakładając, że ich masy są jednakowe ($m_1 = m_2 = m$). Jaka część energii kinetycznej układu dwóch kulek zostanie utracona w wyniku zderzenia?

Zad. 9.15 Atom izotopu uranu ^{235}U rozpada się według schematu $^{235}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{95}_{40}\mathrm{Zr} + {}^{140}_{52}\mathrm{Te}$. Przy rozpadzie wyzwala się energia 5×10^{-11} J. Jaka jest prędkość v jądra $^{95}_{40}$Zr powstałego przy rozpadzie?
Odp. $v = \sqrt{\frac{2m_2 E}{m_1^2 + m_1 m_2}} = 1{,}92 \times 10^7$ m/s.

Zad. 9.16 Na płaszczyźnie poziomej spoczywa kula o masie M. Uderza w nią kula o masie m, mająca przed uderzeniem prędkość v_0. Zderzenie jest idealnie sprężyste i niecentralne. W wyniku zderzenia kula o masie m uzyskuje prędkość skierowaną prostopadle do kierunku swego pierwotnego ruchu. Wyznaczyć prędkości v_1 oraz v_2 kul i kierunek ruchu kuli o masie M po zderzeniu, a także zmianę energii ΔE i pędu $\Delta(mv)$ kuli o masie m w wyniku zderzenia.
Odp. $v_1 = v_0\sqrt{(n-1)(n+1)}$; $v_2 = v_0\sqrt{\frac{2}{n^2+n}}$; $\beta = \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{n}$; $\Delta E = -\frac{mv_0^2}{n+1}$; $\Delta(mv) = mv_0\sqrt{\frac{2n}{n+1}}$, gdzie $n = \frac{M}{m}$.

Zad. 9.17 Na gładkiej poziomej powierzchni w odległości $l = 3$ m od pionowej ściany znajduje się kula o masie M. Inna kula o masie m ślizga się z pewną prędkością w kierunku od ściany do kuli o masie M. Po idealnie sprężystym zderzeniu kul, kula o masie m dociera do ściany i odbiwszy się od niej dopędza kulę o masie M. Obliczyć, w jakiej odległości s od ściany nastąpiło drugie zderzenie, jeżeli $\frac{M}{m} = n = 5$.
Odp. $s = l\frac{1+n}{n-3} = 9$ m.

Zad. 9.18 W skrzynkę o masie M, zawieszoną na cienkiej nici, trafia pocisk o masie m, lecący poziomo z prędkością v_0 i zatrzymuje się w niej (Rys. 35). Na jaką wysokość h od położenia równowagi wzniesie się skrzynka po trafieniu w nią pocisku? Jakie ciepło wydzieli się w wyniku zderzenia?
Odp. $h = \left(\frac{m}{M+m}\right)^2 \frac{v_0^2}{2g}$; $Q = \frac{mv_0^2}{2}\left(1 - \frac{m}{m+M}\right)$.

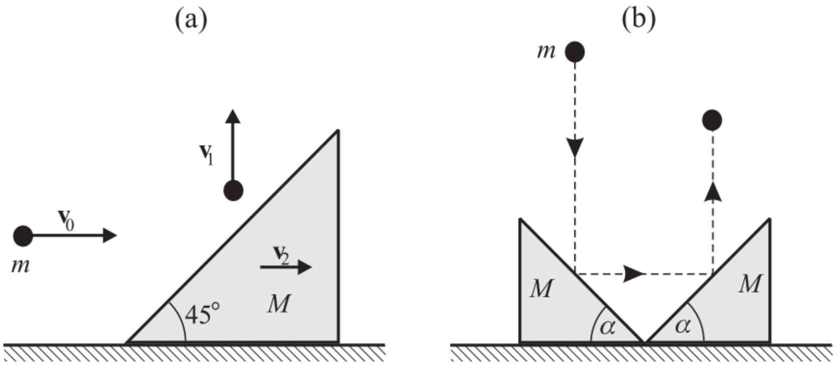


Rys. 35: Rysunek do **Zad. 9.18**.

Zad. 9.19 Dwie kule o masach M i $2M$ podwieszone są w jednym punkcie na niciach o jednakowej długości l. Kulę o masie M odchylono o kąt α i puszczono, nadając jej przy tym prędkość v_0 prostopadłą do nici, o zwrocie ku położeniu równowagi. Na jakiej wysokości h wzniosą się kule po zderzeniu, jeżeli jest ono: (a) idealnie sprężyste; (b) idealnie niesprężyste (kule w wyniku zderzenia zlepiają się)?
Odp. (a) $h_1 = \frac{2}{9}H$, $h_2 = \frac{1}{18}H$; (b) $h = \frac{1}{18}H$, gdzie $H = 4l\sin^2\frac{\alpha}{2} + \frac{v_0^2}{g}$.

Zad. 9.20 Kula o masie M wisi na nici o długości l. W kulę trafia lecący poziomo pocisk o masie m i wbija się w nią. Z jaką minimalną prędkością powinien lecieć pocisk, aby w wyniku tego zderzenia kula wisząca na nici mogła wykonać pełny obrót w płaszczyźnie pionowej?
Odp. $v_{min} = \frac{m+M}{m}\sqrt{5gl}$.

Zad. 9.21 Na płaszczyźnie poziomej spoczywa ciało o masie M, mające kształt równi pochyłej o kącie nachylenia 45° (Rys. 36a). Z równią zderza się sprężyście kulka o masie m, lecąca poziomo z prędkością v_0. W wyniku zderzenia z równią kulka odskakuje pionowo do góry, a równia zaczyna się ślizgać bez tarcia po płaszczyźnie. Wyznaczyć prędkość, z jaką kulka rozpoczyna swój ruch pionowy bezpośrednio po zderzeniu.
Odp. $v_1 = v_0\sqrt{\frac{M-m}{M}}$.



Rys. 36: Rysunek do **Zad. 9.21** (a) i **Zad. 9.22** (b).

Zad. 9.22 Na płaszczyźnie poziomej leżą dwa kliny mające kąty nachylenia po $\alpha = 45°$ (Rys. 36b). Masa każdego z nich jest równa M. Z wysokości H swobodnie spada kulka o masie m ($m \ll M$), uderza początkowo w jeden klin, a następnie w drugi i podskakuje pionowo do góry. Wyznaczyć wysokość h, na jaką podskoczy kulka. Przyjąć, że obydwa zderzenia są sprężyste, oraz że nie ma tarcia miedzy klinami i płaszczyzną.
Odp. $h = H\frac{M-m}{M+m}$.

Zad. 9.23 Na płaszczyźnie poziomej leży klin o masie M i kącie nachylenia do poziomu $\alpha = 30°$. Z wysokości H swobodnie spada kulka o masie m, sprężyście uderza w klin i odbija się pod kątem 30° do poziomu. Na jaką wysokość h wzniesie się kulka?
Odp. $h = H\frac{M}{4M+3m}$.

Zad. 9.24 Na płaskiej powierzchni poziomej leży kula o masie m_1, połączona sprężyną o współczynniku sprężystości k, której drugi koniec jest przytwierdzony do ściany (Rys. 37a). W kulę uderza z prędkością v druga kula o masie $m_2 < m_1$. (i) Obliczyć amplitudę drgań kul po zderzeniu idealnie niesprężystym. (ii) Obliczyć amplitudę drgań pierwszej kuli po zderzeniu idealnie sprężystym. (iii) W jakim kierunku będzie poruszać się druga kula po zderzeniu idealnie sprężystym?
Odp. (i) $A = \frac{m_2 v}{m_1+m_2}\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}}$; (ii) $A = \frac{2m_2 v}{m_1+m_2}\sqrt{\frac{m_1}{k}}$; (iii) po uderzeniu druga kula będzie poruszać się w przeciwną stronę.

Rys. 37: Rysunek do **Zad. 9.24** (a) i **Zad. 9.25** (b).

Zad. 9.25 Układ złożony jest z dwóch kul o masach m i M połączonych sprężyną o zaniedbywanej masie i współczynniku sprężystości k (Rys. 37b). Trzecia kula o masie m poruszająca się wzdłuż osi sprężyny z prędkością v doznaje zderzenia sprężystego z kulą m. Obliczyć: (i) energię kinetyczną E_k ruchu układu jako całości; (ii) energię wewnętrzną E_{wew} układu mas połączonych sprężyną; (iii) amplitudę drgań A jednej z kul względem drugiej. Układ do momentu zderzenia spoczywał, a sprężyna nie była zdeformowana.
Odp. (i) $E_k = \frac{(mv)^2}{2(M+m)}$; (ii) $E_{wew} = \frac{Mmv^2}{2(M+m)}$; (iii) $A = v\sqrt{\frac{Mm}{k(M+m)}}$.

Zad. 9.26 Rakieta o masie startowej m_0 zostaje wystrzelona pionowo do powierzchni Ziemi. Paliwo jest z niej wyrzucane z prędkością u względem rakiety w taki sposób, że masa rakiety maleje z szybkością r (tzn. $\frac{dm}{dt} = -r$, gdzie $r > 0$). Obliczyć prędkość rakiety jako funkcję czasu do momentu wypalenia całego paliwa. Pominąć opór powietrza i przyjąć, że siła grawitacji jest stała i wynosi mg.
Odp. $v = u \ln \frac{m_0}{m_0 - rt} - gt$.

10 Moment pędu

Zad. 10.1 Cząstka o masie $m = 5$ kg znajdująca się w położeniu $\mathbf{r} = -3\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ [m] ma prędkość $\mathbf{v} = 2\mathbf{i}$ [m/s]. Obliczyć wektor momentu pędu $\mathbf{L}$ cząstki względem początku układu współrzędnych, względem punktu o współrzędnych $\mathbf{r}_1 = -3\mathbf{i}$, $\mathbf{r}_2 = -\mathbf{j}$, $\mathbf{r}_3 = -\mathbf{k}$ [m].

Zad. 10.2 Cząstka o masie $m = 5$ g porusza się ze stałą prędkością $v = 5\ \mathrm{cm} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ równolegle do osi y w kierunku dodatnim. W chwili $t = 0$ cząstka przecina oś x w położeniu $x_0 = 2$ cm. Znaleźć moment pędu $\mathbf{L}$ oraz moment siły $\mathbf{N}$ względem początku układu współrzędnych oraz punktów $\mathbf{r}_1 = -2\mathbf{i}$ i $\mathbf{r}_2 = 2\mathbf{i}$ (położenie w cm).
Odp. $\mathbf{L}_0 = 50\mathbf{k}$, $\mathbf{L}_1 = 100\mathbf{k}$, $\mathbf{L}_2 = 0$ $[\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}]$, $\mathbf{N} = 0$ w każdym przypadku.

Zad. 10.3 Pod wpływem momentu siły $\mathbf{N}$ cząstka o masie $m = 10$ g porusza się ze stałym przyspieszeniem $a = 4\ \mathrm{cm} \cdot \mathrm{s}^{-2}$ po linii prostej równoległej do osi x w kierunku dodatnim. W chwili $t = 0$ s cząstka przecina oś y w położeniu $y_0 = 2$ cm, $v(t = 0s) = 0$ cm/s. Proszę policzyć moment pędu $\mathbf{L}$ oraz moment bezwładności $\mathbf{N}$ względem początku układu współrzędnych.
Odp. $\mathbf{L} = -80t\mathbf{k}$ $[\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}]$, $\mathbf{N} = -80\mathbf{k}$ $[\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}]$.

Zad. 10.4 Cząstka o masie m została wystrzelona z działka pod kątem α do poziomu z prędkością początkową v_0. Jak zmienia się wartość momentu pędu cząstki względem działka?
Odp. $L = \frac{1}{2} m g v_0 t^2 \cos\alpha$.

Zad. 10.5 Położenie cząstki o masie m opisuje wektor wodzący $\mathbf{r}(t) = R(\cos\omega t\mathbf{i} + \sin\omega t\mathbf{j})$, gdzie położenie mierzone jest w metrach, czas w sekundach. Jakie jest znaczenie fizyczne wielkości ω? Obliczyć moment pędu $\mathbf{L}$ cząstki względem początku układu współrzędnych oraz moment siły.
Odp. $\mathbf{L} = mR^2\omega\mathbf{k}$, $\mathbf{N} = 0$.

Zad. 10.6 Cząstka o masie m porusza się po okręgu z przyspieszeniem kątowym α. Jeżeli początek układu współrzędnych umieścimy w środku okręgu, położenie cząstki opisuje wektor wodzący

$$\mathbf{r}(t) = R\left(\cos\left(\frac{\alpha t^2}{2}\right)\mathbf{i} + \sin\left(\frac{\alpha t^2}{2}\right)\mathbf{j}\right),$$

gdzie R jest promieniem okręgu. Obliczyć współrzędne wektora momentu pędu $\mathbf{L}$ względem początku układu współrzędnych oraz wektor momentu siły wywieranego na cząstkę względem początku układu współrzędnych.
Odp. $\mathbf{L} = mR^2\alpha t\mathbf{k}$, $\mathbf{N} = mR^2\alpha\mathbf{k}$.

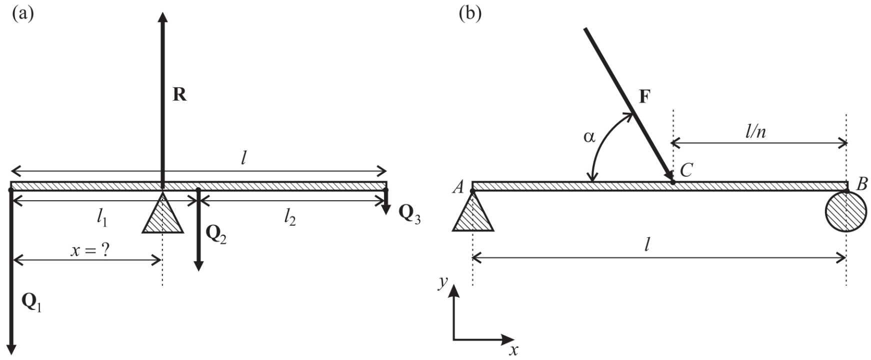
11 Statyka

Zad. 11.1 Nieważki pręt o długości $l = 30$ cm osadzono na podporze, która znajduje się w odległości 10 cm od jednego z jego końców. Pręt posiada trzy zaczepy, dwa na końcach oraz jeden w odległości 10 cm od punktu podparcia. Czy możemy rozmieścić trzy jednakowe ciężarki o masie $m = 10$ g na zaczepach w taki sposób, by układ pozostawał w równowadze? Czy zagadnienie ma tylko jedno rozwiązanie?

Zad. 11.2 Nieważki pręt z zadania **Zad. 11.1** zastępujemy prętem o masie $M = 100$ g. Jaką minimalną ilość ciężarków należy zaczepić na końcach pręta, by zapewnić jego równowagę?

Zad. 11.3 W jednej trzeciej długości jednorodnej belki o masie m i długości l umieszczono podporę. Na dłuższym końcu belki zawieszono masę m. Jaką masę (m_1) należy zawiesić na krótszym końcu, by układ pozostawał w równowadze? Jaka jest wartość siły nacisku belki na podporę?
Odp. $m_1 = \frac{5}{2}m$, $F = \frac{3}{2}m$

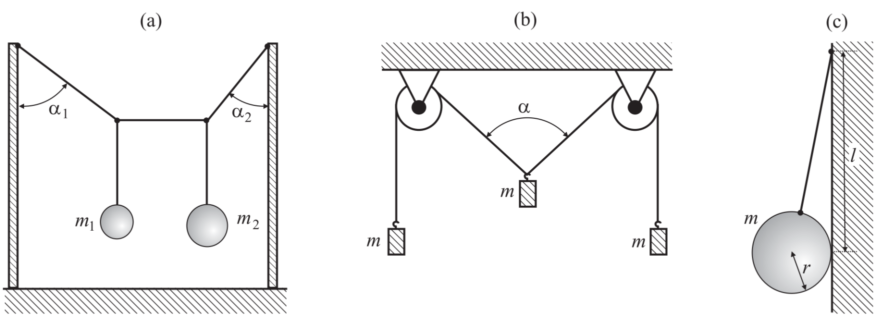
Zad. 11.4 Do nieważkiej belki (Rys. 38a) przytwierdzono trzy ciężary $Q_1 = 30$ N, $Q_2 = 15$ N i $Q_3 = 5$ N. W jakiej odległości x od masy Q_1 należy umieścić podporę, by układ pozostawał w równowadze? Jaka jest wartość siły reakcji R podpory na belkę? Długość belki $l = 2$ m. Odległość pomiędzy punktami zaczepienia ciężarów $l_1 = l_2 = 1$ m.



Rys. 38: Rysunek do **Zad. 11.4** (a) i **Zad. 11.5** (b).

Zad. 11.5 Na Rys. 38b przedstawiono pręt o długości l i masie m, który w punkcie A połączony jest przegubowo z podłożem, zaś w punkcie B jest podparty. W punkcie C odległym o l/n przyłożono pod kątem α siłę o wartości F. Wyznaczyć siły reakcji podłoża w punktach A i B.
Odp. Siła reakcji w punkcie A ma składowe wzdłuż osi x i y, natomiast w punkcie B (punkt podparcia) jedynie składową y. Stąd $\mathbf{R}_A = F\cos\alpha\mathbf{i} + \left(\frac{1}{n}F\sin\alpha + \frac{mg}{2}\right)\mathbf{j}$, $\mathbf{R}_B = \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)F\sin\alpha + \frac{mg}{2}\right]\mathbf{j}$.

Zad. 11.6 Na Rys. 39a przedstawiono sposób, w jaki mają być zawieszone na linie dwie kule o różnych masach. Ile powinna wynosić masa m_1 kuli pierwszej, by przy ustalonej wartości masy m_2 kąty, jakie tworzą liny ze słupami wynosiły α_1, α_2.
Odp. $m_1 = m_2 \tan\alpha_2 / \tan\alpha_1$.



Rys. 39: Rysunek do **Zad. 11.6** (a), **Zad. 11.7** (b) i **Zad. 11.8** (c).

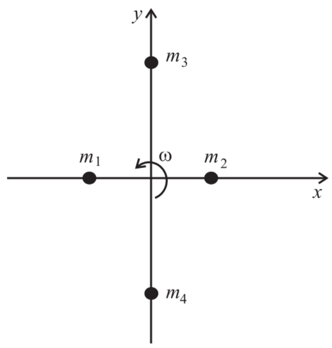
Zad. 11.7 Na końcach nieważkiej nici przeciągniętej przez dwa nieważkie bloczki zaczepiono dwie jednakowe masy m. Obliczyć kąt α, jaki utworzą ze sobą nici po doczepieniu do nich pomiędzy bloczkami trzeciej masy m (Rys. 39b).
Odp. $\alpha = 3\pi/2$.

Zad. 11.8 Jednorodna kula o masie m i promieniu r wisi na lince, która została zaczepiona na gładkiej pionowej ścianie w odległości l powyżej punktu styku i ściany (Rys. 39c). Obliczyć wartość naprężenia T linki oraz nacisk R kulki na ścianę.
Odp. $T = \sqrt{mg(1 + r^2/l^2)}$, $R = mgr/l$.

12 Dynamika bryły sztywnej

Zad. 12.1 Obliczyć środek masy oraz moment bezwładności względem trzech osi układu współrzędnych układu trzech punktów materialnych $m_A = 6$ kg, $m_B = 2$ kg, $m_C = 4$ kg o współrzędnych $\mathbf{r}_A = (3, 2)$, $\mathbf{r}_B = (4, -4)$, $\mathbf{r}_C = (-2, 7)$.
Odp. $R_{sm} = (3/2, 16/6)$.

Zad. 12.2 Obliczyć moment bezwładności układu czterech mas punktowych leżących na płaszczyźnie xy prostokątnego układu współrzędnych względem osi obrotu pokrywającej się z osią z. Dwie pierwsze masy $m_1 = m_2 = 9$ kg znajdują się w odległości $r_1 = r_2 = 1$ m od osi obrotu, dwie pozostałe $m_3 = m_4 = 4$ kg w odległości $r_3 = r_4 = 2$ m (Rys. 40). Ile wynosi moment pędu oraz energia kinetyczna ruchu obrotowego, jeżeli układ obraca się z prędkością kątową $\omega = 5$ s^{-1} wokół osi z?



Rys. 40: Rysunek do **Zad. 12.2**.

Zad. 12.3 Obliczyć współrzędne środka masy połówki tarczy o masie m i promieniu R oraz stałej gęstości powierzchniowej ρ umieszczonej w płaszczyźnie xy nad osią Ox. Obliczyć moment bezwładności względem osi Oz, prostopadłej do powierzchni tarczy.
Odp. $\mathbf{R}_{sm} = \left(0, \frac{4R}{3\pi}\right)$, $I = \frac{MR^2}{2}$.

Zad. 12.4 Obliczyć moment bezwładności prostokąta o bokach a i b względem boku a, przyjmując stałą gęstość powierzchniową.

Zad. 12.5 Obliczyć moment bezwładności jednorodnego cienkiego pręta o długości l względem prostopadłej osi przechodzącej przez środek pręta oraz przez jeden z jego końców.

Zad. 12.6 Obliczyć moment bezwładności jednorodnej kuli oraz jednorodnej sfery o masie M oraz promieniu R względem osi przechodzącej przez jej środek.
Odp. $I_{kuli} = \frac{2}{3}MR^2$, $I_{sfery} = \frac{2}{3}MR^2$.

Zad. 12.7 Obliczyć moment bezwładności jednorodnego walca o masie M i promieniu R względem osi pokrywającej się z osią walca.

Zad. 12.8 Obliczyć moment bezwładności jednorodnego koła o promieniu R względem osi prostopadłej do powierzchni koła i przechodzącej przez krawędź koła.

Zad. 12.9 Obliczyć moment bezwładności jednorodnego stożka o masie M, wysokości H oraz promieniu podstawy R względem osi pokrywającej się z osią stożka.
Odp. $I = \frac{3}{10}MR^2$.

Zad. 12.10 Przez jednorodny bloczek w kształcie walca o masie M i promieniu R przewieszone zostały na nieważkiej i nierozciągliwej nici dwa ciężarki o masach m_1 oraz m_2. Obliczyć przyspieszenie a ciężarków oraz naprężenie nici T_1 oraz T_2.
Odp. $a = \frac{m_2 - m_1}{\frac{M}{2} + m_1 + m_2}$.

Zad. 12.11 Na bloczek o momencie bezwładności I i promieniu R nawinięta jest nić, na końcu której zawieszony jest ciężarek o masie m. Obliczyć przyspieszenie a ciężarka oraz naprężenie nici T. Ile wynosi prędkość kątowa ω bloczka w momencie, kiedy odwinęło się l długości nici?
Odp. $a = \frac{mR^2}{mR^2+I}g$, $T = \frac{mgI}{mR^2+I}$, $\omega = \sqrt{\frac{2mgl}{mR^2+I}}$.

Zad. 12.12 Do osi jednorodnego koła o masie M oraz promieniu R stojącego na poziomej powierzchni przyłożona jest poziomo siła F. Obliczyć przyspieszenie kątowe α koła oraz przyspieszenie liniowe a osi koła. Jakie uzyskamy przyspieszenie jeżeli jednorodne koło zastąpimy obręczą o tej samej masie? Jakiej maksymalnej siły możemy użyć, by koło przemieszczało się bez poślizgu, jeżeli współczynnik tarcia statycznego wynosi μ?
Odp. $\alpha = \frac{2F}{3MR}$, $a = \frac{2F}{3M}$, $F_{max} = 3\mu Mg$.

Zad. 12.13 Cienki pręt o masie M i długości L przytwierdzony na jednym z końców do poziomej osi obrotu odchylany jest do poziomu i swobodnie puszczany. Obliczyć przyspieszenie liniowe swobodnego końca pręta w chwili jego zwolnienia.
Odp. $a = \frac{2}{3}g$.

Zad. 12.14 Po równi pochyłej o kącie nachylenia θ stacza się walec o promieniu R i masie M. Obliczyć prędkość liniową v walca u podnóża równi, jeżeli długość równi wynosi d. Jaka będzie prędkość jednorodnej obręczy, kuli oraz sfery o promieniu R i masie M?
Odp. $v_{walca} = \sqrt{\frac{4}{3}dg\sin\theta}$.

Zad. 12.15 Na brzegach walca o promieniu R oraz masie M nawinięte zostały dwie nitki, których drugie końce przytwierdzone zostały do sufitu. Linki znajdują się w położeniu niemal pionowym i utrzymują walec w pozycji poziomej. Obliczyć przyspieszenie liniowe a walca oraz naprężenie T nici.
Odp. $a = \frac{2}{3}g$, $T = \frac{1}{3}Mg$.

Zad. 12.16 Na brzegu nieruchomej tarczy o promieniu R i masie M, która osadzona jest na sztywnej osi, stoi człowiek o masie m. W pewnym momencie człowiek zaczyna poruszać się wzdłuż brzegu tarczy z prędkością liniową v liczoną względem tarczy. Obliczyć prędkość kątową tarczy względem Ziemi.
Odp. $\omega_t = \frac{2mRv}{(M+2m)R^2}$.

Zad. 12.17 Dwie tarcze o momentach bezwładności I_1 oraz I_2 wirujące z prędkościami kątowymi ω_1 oraz ω_2 umieszczone są jedna nad drugą. W pewnym momencie górna tarcza upada na dolną i po pewnym czasie obie tarcze obracają się razem. Obliczyć prędkość kątową tarcz po połączeniu oraz ciepło jakie wydzieliło się w wyniku działania sił tarcia pomiędzy tarczami.
Odp. $\omega = \frac{I_1\omega_1+I_2\omega_2}{I_1+I_2}$, $Q = \frac{I_1I_2(\omega_1-\omega_2)^2}{2(I_1+I_2)}$.

Zad. 12.18 Na stoliku obrotowym stoi człowiek trzymający koło rowerowe o momencie bezwładności I_0, które obraca się z prędkością kątową ω_0. Zakładając, że moment bezwładności człowieka i stolika jest znany i wynosi I, obliczyć prędkość kątową ω_1 człowieka i stolika po obróceniu koła o 180° oraz prędkość kątową ω_2 człowieka i stolika po zatrzymaniu koła przez człowieka.
Odp. $\omega_1 = 2I_0\omega_0/I$, $\omega_2 = I_0\omega_0/I$.

Zad. 12.19 Jednorodny pręt o masie M i długości l osadzony jest na sztywnej osi prostopadłej do pręta i przechodzącej przez jego środek. W jeden z końców pręta wbija się pocisk o masie m, który nadleciał z prędkością v. Wektor prędkości pocisku przed uderzeniem był zorientowany prostopadle do pręta i osi obrotu. Znaleźć prędkość kątową ω pręta po uderzeniu pocisku.
Odp. $\omega = \frac{6mv}{l(M+3m)}$.

Zad. 12.20 W jeden z końców dryfującego w przestrzeni kosmicznej pręta o długości l i masie m trafia pod kątem prostym plastyczny pocisk o takiej samej masie m, który po zderzeniu przykleja się do pręta. Prędkość pocisku przed zderzeniem w układzie związanym z dryfującym prętem wynosiła v_1. Obliczyć prędkość liniową v sklejonego pręta i pocisku oraz ich prędkość kątową ω. Rozmiary pocisku uznać za zaniedbywalnie w porównaniu z rozmiarami pręta. Obliczenia wykonać w układzie związanym z dryfującym prętem przed zderzeniem.

Zad. 12.21 Symetryczny bąk o masie m wiruje wokół osi, której jeden z końców jest zamocowany. Odległość środka masy od punktu zamocowania wynosi r. Oś obrotu może sama obracać się dookoła punktu zamocowania. Pokazać, że prędkość kątowa osi obrotu (prędkość kątowa precesji) jest bardzo mała w porównaniu z prędkością kątową bąka dookoła tej osi.
Odp. $\omega = \frac{mgr}{L}$.