

Blok III: Funkcje elementarne

III.1 Narysuj wykres funkcji:

a) $y = x$

e) $y = \frac{1}{3}x$

i) $y = -\frac{1}{2}x$

b) $y = 2x$

f) $y = -x$

j) $y = -\frac{1}{3}x$

c) $y = 3x$

g) $y = -2x$

d) $y = \frac{1}{2}x$

h) $y = -3x$

III.2 Narysuj wykres funkcji:

a) $y = -\frac{2}{3}x + 1$

c) $y = 3x + 2$

b) $y = -\frac{3}{4}x - 3$

d) $y = -x - 3$

III.3 Znajdź miejsca zerowe funkcji:

a) $y = 6 - \frac{3}{2}x$

c) $y = -1 - \frac{4}{3}x$

b) $y = 2x - \frac{1}{2}$

d) $y = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}x$

III.4 Znajdź miejsca przecięcia wykresów funkcji:

a) $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 3 \\ y = x - 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -2x - 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = 3 \\ y = x - 5 \end{cases}$

III.5 Dla jakich argumentów funkcja $f(x)$ przyjmuje wartości:

a) $f(x) = 2x - 10$, wartości dodatnie

e) $f(x) = x - 4$ wartości mniejsze od 2

b) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$, wartości dodatnie

f) $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ wartości większe od -1

c) $f(x) = \frac{1}{3}x + 6$, wartości ujemne

g) $f(x) = -x + \frac{4}{5}$ wartości z przedziału $[-\frac{3}{5}, 1)$

d) $f(x) = -3x + 6$, wartości ujemne

h) $f(x) = -2x - 1$ wartości z przedziału $(-2, 3)$

III.6 Jakie jest położenie punktu (x, y) w stosunku do wykresu

a) Punkt $(2, 4)$, $y = x + 1$

b) Punkt $(-1, 2)$, $y = -\frac{1}{2}x + 2$

III.7 Jaki jest obraz zbioru:

a) $[0, 4)$ w funkcji $f(x) = 2x - 1$

c) $(-2, 1]$ w funkcji $f(x) = 3$

b) $(-1, 1)$ w funkcji $f(x) = -x + 2$

d) $[-\pi, \pi]$ w funkcji $f(x) = 2x$

III.8 Narysuj wykres zależności obwodu okręgu od jego średnicy.

III.9 Błat stołu ma kształt dwóch półkoli o promieniu $R = 1$ m rozdzielonych prostokątem o długości x i szerokości 2 m. Brzegi blatu zabezpiecza się taśmą okleiny. Narysuj wykres funkcji opisującej długość potrzebnej taśmy od wymiaru x .

III.10 Ciśnienie, objętość i temperaturę gazu wiąże równanie:

$$\frac{pV}{T} = nR,$$

gdzie n oznacza ilość moli gazu, a R stałą gazową. Dobieramy tak ilość gazu, by prawa strona była równa $1 \frac{\text{Pa}\cdot\text{m}^3}{\text{K}}$. Narysować wykresy funkcji ciśnienia od temperatury dla różnych objętości gazu.

III.11 Prostokąt ma proporcje 2:1. Znaleźć

- a) obwód prostokąta
- b) przekątną prostokąta
- c) obwód trójkąta będącego połową prostokąta
- d) długość okręgu opisanego na prostokącie

w funkcji długości krótszego boku.

III.12 Znajdź funkcję liniową, której wykres przechodzi przez punkt $(2, 1)$ i jest nachylony do osi x pod kątem:

- a) $\pi/6$
- b) $\pi/4$
- c) $-\pi/3$

III.13 Dany jest sześciokąt foremny na płaszczyźnie XY o boku długości 1, środkiem w punkcie $(0, 0)$ i dwóch wierzchołkach na osi X . Znaleźć proste, których odcinkami są boki sześciokąta.

III.14 Trójkąt równoboczny o boku 1 umieszczono w układzie współrzędnych tak, że jego dolna podstawa leży na osi OX , a górny wierzchołek na osi OY . Znaleźć równania prostych, których odcinkami są boki trójkąta.

III.15 Znaleźć funkcję liniową, której wykres ma wspólne miejsce zerowe z wykresem funkcji $y = -\frac{1}{2}x + 2$ i współczynnik kierunkowy 2.

III.16 Znaleźć funkcję, która ma wspólne miejsce zerowe z funkcją $y = 2x - 4$ i której wykres jest równoległy do prostej $y = -x$.

III.17 Znaleźć funkcję liniową, której wykres ma wspólne miejsce zerowe z wykresem funkcji $y = x + 2$ i przecina oś Y w punkcie $(0, -1)$.

III.18 Znaleźć funkcję liniową, której wykres przechodzi przez punkty:

- a) $(0, 0)$ i $(2, 1)$
- b) $(-1, 0)$ i $(0, 2)$
- c) $(1, 1)$ i $(3, 2)$
- d) $(-1, 2)$ i $(2, -1)$
- e) $(-2, 0)$ i $(1, 1)$
- f) $(-1, -1)$ i $(1, 1)$

III.19 Znaleźć równanie prostej równoległej do danej i przechodzącej przez dany punkt:

- a) $y = 2x - 1, (1, 3)$
- b) $y = -\frac{1}{2}x + 1, (3, 2)$
- c) $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}, (3, 1)$
- d) $y = x + 1, (9, 0)$

III.20 Znaleźć równanie prostej prostopadłej do danej i przechodzącej przez dany punkt:

- a) $y = 2x - 1, (1, 3)$
- b) $y = -\frac{1}{2}x + 1, (3, 2)$
- c) $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}, (3, 1)$
- d) $y = x + 1, (9, 0)$

III.21 Znaleźć równanie prostej prostopadłej do danej i przechodzącej przez jej miejsce zerowe:

- a) $y = 2x - 1,$
- b) $y = -\frac{1}{2}x + 1,$
- c) $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{4},$
- d) $y = x + 1,$

III.22 Znajdź proste prostopadłe do podanych przechodzące przez ich punkt przecięcia z osią OY :

a) $3x - y + 2 = 0$

b) $x - y + 7 = 0$

III.23 Znajdź wektor równoległy i prostopadły do prostej:

a) $y = \frac{2}{3}x + 3$

b) $y = -5x - 5$

c) $y = 2x$

III.24 Znajdź prostą równoległą i prostopadłą do zadanej przechodzącą przez zadany punkt:

a) $2x - 3y = 0, (1, 2)$

c) $-x + 2y + 2 = 0, (3, 1)$

e) $x - 3 = 0, (1, 4)$

b) $3x + 4y - 3 = 0, (0, -1)$

d) $x - \frac{1}{2}y + 1 = 0, (4, 2)$

f) $y + 5 = 0, (2, -4)$

III.25 Znajdź punkty przecięcia się prostych:

a) $2x - 3y + 13 = 0$ i $4x + y + 5 = 0$

d) $x - 2y - 1 = 0$ i $-2x + 4y + 2 = 0$

b) $3y - 6 = 0$ i $2x - y = 0$

e) $x + y - 1 = 0$ i $x - y - 3 = 0$

c) $2x + \frac{1}{2}y - 4 = 0$ i $x - \frac{3}{4}y + 2 = 0$

f) $x + y - 1 = 0$ i $2x + 2y - 1 = 0$

III.26 Jak zależy liczba rozwiązań układu równań od parametru m ? Znajdź jawną postać rozwiązania:

a) $\begin{cases} mx + y = 1 \\ x + my = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} mx + my = 1 \\ x + y = m \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = m \\ mx + y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} mx + 3y + 3 = 0 \\ x + my = 2y - 1 \end{cases}$

III.27 Dla jakich wartości parametru m podane proste mają punkt wspólny:

a) $mx + y = 1$ i $x - my = m$

b) $x + my = 1$ i $(2 - m)x - 3y = m$

III.28 Narysuj wykresy:

a) $y = x^2$

d) $y = (x - 1)^2$

g) $y = \frac{1}{4}x^2$

b) $y = x^2 + 1$

e) $y = (x + 1)^2$

h) $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$

c) $y = x^2 - 1$

f) $y = (x + 1)^2 + 1$

III.29 Podaj postać kanoniczną funkcji kwadratowych podanych w postaci ogólnej i narysuj ich wykresy:

a) $y = x^2 - 3x + 2$

d) $y = 2x^2 - 2x - 4$

g) $y = x^2 - 2x - 3$

b) $y = x^2 - 2x$

e) $y = x^2 - 5x + 6$

h) $y = x^2 + 3x - 4$

c) $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$

f) $y = x^2 - 2x + 5$

III.30 Podaj postać iloczynową (o ile istnieje) funkcji kwadratowej zapisanej w postaci kanonicznej:

a) $y = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4} = 0$

d) $y = 2(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{2}$

g) $y = (x - 1)^2 - 4$

b) $y = (x - 1)^2 - 1$

e) $y = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4}$

h) $y = (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{25}{4}$

c) $y = \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{2}$

f) $y = (x - 1)^2 + 4$

III.31 Podaj postać iloczynową (o ile istnieje) funkcji kwadratowej podanej w postaci ogólnej:

a) $y = x^2 + x - 2$

c) $y = x^2 + 6x + 9$

e) $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$

b) $y = x^2 + 2x + 2$

d) $y = 2x^2 + 3x - 2$

f) $y = 3x^2 + 1$

III.32 Rozwiąż równania z niewiadomą x

a) $x^2 + 4x = 5$

d) $x^4 + 2x^2 = 8$

g) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$

b) $x^2 - 10x = 24$

e) $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$

h) $abx^2 - (a + b)x + 1 = 0$

c) $\frac{x-3}{3} = \frac{3}{x-3}$

f) $(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) = 24$

i) $(x + b)(x - b) + ab = ax$

III.33 Rozwiąż nierówność:

a) $x^2 + 2x - 3 \geq 0$

c) $x^2 - 5x - 14 > 0$

e) $84 + 5x - x^2 \geq 0$

b) $-2x^2 - x + 1 < 0$

d) $5x^2 + 7 > 4x$

f) $(4x - 3)^2 > 9$

III.34* Znajdź przeciwobraz zbioru:

a) $(-3, 0]$ w funkcji $y = x^2 + 2x - 3$

d) $(-3, 6)$ w funkcji $y = x^2 - 6x + 6$

b) $[0, 1)$ w funkcji $y = -2x^2 - x + 1$

e) $[-1, \infty)$ w funkcji $y = x^2 - 3x$

c) $(-5, 0)$ w funkcji $y = x^2 + 2x + 2$

III.35* Znajdź obraz zbioru:

a) $(-2, 1)$ w funkcji $y = x^2 + 2x + 4$

b) $[1, \infty)$ w funkcji $y = -x^2 + 2$

III.36 Wyraż podaną funkcję pierwiastków x_1, x_2 równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ przez współczynniki a, b, c korzystając ze wzorów Viete'a:

a) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

b) $x_1^2 + x_2^2$

d) $x_1^3 + x_2^3$

c) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

III.37 Dla jakich wartości parametru m równanie kwadratowe ma dwa różne rozwiązania:

a) $(m - 5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0$

b) $(m - 1)x^2 - (m + 1)x + m + 1 = 0$

III.38 Dla jakich wartości parametru m równanie ma oba pierwiastki dodatnie, a dla jakich oba ujemne?

a) $x^2 + (2m - 3)x + 2m + 5 = 0$

b) $x^2 - 2(m - 1)x + (2m + 1) = 0$

III.39 Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + 2(m + 1)x + 9m - 5 = 0$ ma dwa pierwiastki różnych znaków?**III.40*** Dla jakich wartości parametru m pierwiastki równania $x^2 + mx + 2m - 2 = 0$ są sinusem i cosinusem tego samego kąta?**III.41*** Dla jakich wartości parametru m suma pierwiastków równania $x^2 - 2m(x - 1) - 1 = 0$ jest równa sumie kwadratów pierwiastków?**III.42*** Dla jakich wartości parametru m suma odwrotności pierwiastków równania $x^2 + mx - 16 = 0$ jest równa 4?**III.43*** Dla jakich wartości parametru m wykresy funkcji przechodzą przez III i IV ćwiartkę UW?

a) $y = x^2 - 2mx + m^2 - 1$

b) $y = x^2 + (2m - 3)x + 2m + 5$

III.44 Znaleźć położenie wierzchołka paraboli $y = x^2 + 2(m + 1)x - (m + 4)$ w zależności od parametru m .

III.45 Dla jakich wartości parametru m funkcja $y = mx^2 + 2(m - 1)x + m + 1$ ma dokładnie jeden punkt wspólny z prostą $y = 2x + 1$? Narysuj wykres tej funkcji i prostej dla obliczonej wartości parametru.

III.46 Dla jakich wartości parametru m dane równanie ma zawsze rozwiązanie?

a) $(4 - m)x^2 - 3x + m + 4 = 0$

b) $(m - 5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0$

III.47* Do boków prostokąta o obwodzie l przyczepiono półkola. Dla jakiej proporcji boków figura ma najmniejsze pole?

III.48* Dwa pojazdy poruszają się z prędkością v po prostopadłych drogach. Pierwszy pojazd mijają skrzyżowanie w chwili $t = 0$, a drugi w chwili t_1 . Jak wygląda funkcja odległości między pojazdami? Kiedy odległość pomiędzy nimi będzie najmniejsza?

III.49 Zamień miarę łukową na miarę stopniową:

a) $\frac{\pi}{4}$

c) $\frac{7\pi}{6}$

e) $\frac{\pi}{18}$

g) $\frac{7\pi}{20}$

b) $\frac{\pi}{12}$

d) $\frac{2\pi}{3}$

f) $\frac{4\pi}{9}$

h) $\frac{4\pi}{15}$

i) 1

III.50 Zapisz w mierze łukowej:

a) 30°

c) 60°

e) 135°

g) 1°

b) 45°

d) 90°

f) 270°

h) 57°

III.51 O jakie kąty przesunęła się minutowa wskazówka zegara między godzinami:

a) 12:00 a 12:30

b) 10:45 a 11:55

c) 7:00 a 15:00

III.52 Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych następujących kątów korzystając ze znanych wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych (odpowiedzi znajdziesz w tablicach matematycznych):

a) 120°

d) 180°

g) 240°

j) 315°

b) 135°

e) 210°

h) 270°

k) 330°

c) 150°

f) 225°

i) 300°

l) 360°

III.53 Oblicz:

a) $\sin 15^\circ$

d) $\cos 720^\circ$

g) $\operatorname{tg} 330^\circ$

j) $\cos(-1110^\circ)$

b) $\cos 105^\circ$

e) $\sin 150^\circ$

h) $\cos 240^\circ$

c) $\operatorname{tg} 105^\circ$

f) $\operatorname{tg} 135^\circ$

i) $\sin(-120^\circ)$

III.54 Uprość wyrażenie:

a) $\sin(4\pi + \alpha)$

d) $\cos(\pi + \alpha)$

g) $\sin(\alpha - \frac{\pi}{2})$

b) $\operatorname{tg}(\alpha - \frac{\pi}{3})$

e) $\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$

c) $\sin(\pi - \alpha)$

f) $\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha)$

III.55 Sprowadź podane wyrażenia do najprostszej postaci

a) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha$

c) $\cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha + \sin^3 \alpha$

e) $\frac{1 - 2 \cos^2 \alpha}{2 \sin^2 \alpha - 1}$

b) $(1 + \sin \beta)(1 - \sin \beta)$

d) $\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$

III.56 Sprawdź, czy dana równość jest tożsamością trygonometryczną:

a) $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$

d) $\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sin x}$

b) $(1 + \operatorname{tg}^2 x) \cos^2 x = 1$

e) $1 - \sin 2x = (\sin x - \cos x)^2$

c) $\frac{\cos^2 x - 1}{\sin^2 x - 1} = \operatorname{tg}^2 x$

f) $\frac{1}{\cos x + \sin x} + \frac{1}{\cos x - \sin x} = \frac{2 \cos x}{\cos 2x}$

III.57 Sprawdź, czy prawdziwe są następujące tożsamości:

a) $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$

c) $\cos \alpha \cos(\alpha + \beta) + \sin \alpha \sin(\alpha + \beta) = \cos \beta$

b) $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta$

d) $\cos \beta \cos(\alpha - \beta) + \sin \beta \sin(\alpha - \beta) = \cos \beta$

III.58 Sprawdź, czy prawdziwe są następujące tożsamości, podaj konieczne założenia:

a) $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

c) $\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

b) $\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \cos 2\alpha$

d) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta}$

III.59 Wykaż, że:

a) $(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 = 4 \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}$

b) $2(1 + \cos \alpha) - \sin^2 \alpha = 4 \cos^4 \frac{\alpha}{2}$

c) $\sin x(\sin x \operatorname{tg} x + \cos x) = \operatorname{tg} x$

III.60 Wiedząc, że $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}/2$, oblicz wartość wyrażenia:

$$\frac{3 \sin \alpha - 2 \cos \alpha}{5 \cos \alpha - 7 \sin \alpha}$$

III.61 Wiedząc, że $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2} - 1$, oblicz wartość wyrażenia:

$$\frac{3 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}$$

III.62 Rozwiąż równanie

a) $\sin \alpha = 0$

g) $\cos \frac{\pi}{3} \cos x - \sin \frac{\pi}{3} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

h) $\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = \frac{1}{2}$

c) $\operatorname{tg} \alpha = 1$

d) $3 + 4 \cos(0.5x) = -1$

i) $\sin 2x = \sin x$

e) $\cos^2 3x - \frac{1}{2} \cos 3x = 0$

j) $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg} 3x$

f) $\cos^4 x - \sin^4 x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

k) $|2 \sin x - \sqrt{3}| = \sqrt{3}$

$$l) \left| \sqrt{3} \operatorname{tg} \left(\frac{x}{3} \right) \right| = 1$$

$$n) \cos \frac{x - |x|}{2} = 1$$

$$m) \frac{\sin x}{4x} = 0$$

III.63 Rozwiąż równania:

$$a) \sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$$

$$f) \cos x = \sin 2x + \cos 3x$$

$$b) 1 + \cos x + \cos \frac{x}{2} = 0$$

$$g) \sin^2 2x = \sin 3x + \sin x$$

$$c) (\sin x + \cos x)^2 = \cos 2x$$

$$h) \sin x \sin 2x = \cos x \cos 2x$$

$$d) \cos^4 x - \sin^4 x = \sin 4x$$

$$i) \cos 2x + \sin 2x + 1 = 0$$

$$e) \sin x + \sin 2x = \sin 3x$$

$$j) (\cos x - \sin x)^2 + \operatorname{tg} x = 2 \sin^2 x$$

III.64* Dla jakich wartości parametru m równanie $1 + \sin^2(mx) = \cos x$ ma tylko 1 rozwiązanie?

III.65* Wyznacz te wartości parametru k , dla których podane równania mają rozwiązania

$$a) \sin^2 x + \sin x + k = 0$$

$$b) \sin 2x = \frac{2k - 3}{4 - k}$$

$$c) \sin^4 x + \cos^4 x = k$$

III.66* Wiedząc, że $p \in \mathbb{R}$ rozwiązać równania

$$a) \sin(x - p) = \sin x - \sin p$$

$$b) \operatorname{tg} p - \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(p - x)$$

III.67 Rozwiąż nierówności:

$$a) \sin 2x > 4 \sin x$$

$$f) \cos^2 x < \frac{1}{4}$$

$$k) 4 \cos^2 x + 2 \sin^2 x < 5 \cos x$$

$$b) \sin 2x < 6 \cos x$$

$$g) \sin x \geq 2 \sin^2 x$$

$$l) |\operatorname{ctg}(2x)| < 1$$

$$c) \operatorname{tg}(3x - 1) < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$h) \cos 2x + \cos x > 0$$

$$m) |2 \sin x| \leq 1$$

$$d) \sin 2x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$i) 2 \cos^2 x + \cos x < 1$$

$$n) |2 \cos(\frac{\pi}{6} + x)| > \sqrt{3}$$

$$e) \operatorname{ctg}^2 x > 3$$

$$j) 4(\sin^2 x - |\cos x|) \leq 1$$

$$o) |\operatorname{tg}(\pi x)| \geq 1$$

III.68* Udowodnić, że $\frac{1}{8} < \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 70^\circ < \frac{1}{4}$.

III.69 Sporządź wykresy funkcji na przedziale $[-\pi, \pi]$

$$a) y = \sin(2x)$$

$$d) y = 2 \sin(x - \pi/3)$$

$$g) y = 2 \cos(\pi/6 - x/2)$$

$$b) y = 1 - \cos(2x)$$

$$e) y = -\cos(x + \pi/6)$$

$$c) y = |\sin(x)|$$

$$f) y = \sin(2x + \pi/3)$$

III.70 Wyznacz k .

$$a) 0,12 \cdot 10^k = 12000$$

$$c) 12,31 \cdot 10^k = 12310000$$

$$b) 2,567 \cdot 10^k = 0,0002567$$

$$d) 1,01 \cdot 10^k = 0,000000101$$

III.71 Rozwiąż równanie.

a) $2^{5x-8} = 4^{x-3}$

c) $\left(\frac{4}{5}\right)^{4x-5} = \left(\frac{5}{4}\right)^{5x-4}$

e) $5^{x-5} \cdot 25^{x+3} = 25$

b) $4^x = 8^{2x-1}$

d) $\sqrt{3^x} = \frac{1}{\sqrt{27}}$

f) $3^{x-4} \cdot 27^{3-2x} = 9^{3x-3}$

III.72 Rozwiąż równanie

a) $7^{x^2+2} = 7^{3x}$

f) $0,4^{2x} - 11\frac{5}{8} \cdot 0,4^x = 62,5$

k) $5^{x^2-6x+7} = 25$

b) $2^{x^2-6x-5/2} = 16\sqrt{2}$

g) $5^{x+1} + 5^x = 750$

l) $6^{\frac{x-3}{x+1}} = 216$

c) $4^{x^2} = 8^{4x-6}$

h) $3^{x-3} + 2 \cdot 3^x = 165$

m) $4^{x^2-2} = \left(\frac{1}{16}\right)^x$

d) $2^{2x} + 2^x = 20$

i) $0,125 \cdot 4^x \cdot 2^{x-1} = 16^{2x+3}$

n) $7^{x^3-2x^2+4x} = 49^x$

e) $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

j) $\frac{1}{27} \cdot 9^{x^2-x} = 3^{4x-1}$

III.73 Rozwiąż równanie.

a) $2^{x^2-x+1} = 8$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4x^2-2x+1} = \frac{1}{16}^{-1}$

e) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x^2+1}{x}} = 81^{x+3}$

b) $3^{2x^2-2x+5} = \frac{1}{27}$

d) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3x+2}{4x-3}} = 125$

f) $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-6x-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4x-5}$

III.74 Rozwiąż równanie

a) $2^{-x} + 2^x + 4^x + 4^{-x} = 4$

d) $9^{-|1-x|} - 4 \cdot 3^{-|1-x|} + 3 = 0$

b) $16^{|x|} - 8 \cdot 4^{|x|} + 16 = 0$

e*) $(2 - \sqrt{3})^{x^2-3x+1} + (2 + \sqrt{3})^{x^2-3x+1} = 4$

c) $2 \cdot 3^{2x} + 9 \cdot 2^{2x} = 13 \cdot 6^x$

III.75 Rozwiąż równanie:

a) $2^{x^2+2x} = 8$

e) $7 \cdot 4^x - 2^{2x+1} = 26 + 7 \cdot 4^{x-1}$

i) $\frac{1}{2^x-2} + 2^{1-x} = 1$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x^3} = \left(\frac{4}{3}\right)^{x^2+x}$

f) $3^{|x+1|+1} - 5 \cdot 3^{|x+1|-1} = 12$

j) $(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 4$

c) $(0,5)^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = \frac{1}{64}$

g) $2^{2x} + 5 \cdot 2^x + 6 = 0$

k) $3^{2x+5} \cdot 3^{-x+1} = 2^{x+6}$

d) $3^{x+1} - 3^x - 3^{x-1} = 15$

h) $4^{3x} - 7 \cdot 4^{2x} + 14 \cdot 4^x - 8 = 0$

l) $6^x - 9 \cdot 2^x - 15^x + 9 \cdot 5^x = 0$

III.76 Rozwiąż nierówność:

a) $5^{x-6} < 5^{6x-1}$

f) $\left(\frac{1}{5}\right)^{|x+2|} \leq 5^{-1}$

b) $(0,1)^{8x-3} > (0,1)^{2x-2}$

g) $3^{2x-3} < 27^{x+8}$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2x+5} < 32$

h) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x+1} > \left(\frac{27}{8}\right)^{x-3}$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{4-2x} > 81$

i) $0,5^{2x^2-x} \geq 1$

e) $4^{|x|} < 8$

j) $2^{x^3+x^2} \geq 16^{2x+3}$

$$k) \frac{2x^3}{8x^2} \leq \frac{2x}{8}$$

$$m) 16^x + 3 \cdot 2^{2x+1} + 8 < 0$$

$$l) \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x+2}} \leq \frac{4}{9}$$

III.77 Rozwiąż nierówność:

$$a) 7^{-5x^2+8x-3} > 1$$

$$c) \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x+1}{3-x}} < 1$$

$$e) 2^{x+1} + 2^x < 96$$

$$f) 5^{4-3x} - 5^{2-3x} < 24$$

$$b) 2^{x^2-5x+4} < 1$$

$$d) 3^{\frac{6x-3}{x}} < 27^{\frac{2x-1}{3x}}$$

$$g) 2^{3-4x} - 16^x \leq -2$$

III.78 Rozwiąż nierówność

$$a) 2^{x^2-x+1} \leq 4$$

$$c) \left(\frac{1}{2}\right)^{4x^2-2x+1} \geq 16$$

$$e) \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x^2-1}{2}} \leq 81$$

$$b) 3^{2x^2-2x+5} > 27$$

$$d) \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2x-3}{3+x}} \geq 25$$

$$f) \left(\frac{1}{16}\right)^{-2x^2+3x+1} \geq 4$$

III.79* Rozwiązać układy równań

$$a) \begin{cases} 64^{2x} + 64^{2y} = 12 \\ 64^{x+y} = 4\sqrt{2} \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3^y \cdot 4^x = 18 \\ 4^y \cdot 9^x = 48 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 8^{x-2} \cdot 4^{y+1} = 16 \\ 2^{2(x-1)} \cdot 8^y = 1 \end{cases}$$

III.80 Sporządzić wykresy funkcji:

$$a) y = -2^x + 1$$

$$c) y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$$

$$e) y = -3^{x-1} + 2$$

$$b) y = 2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$d) y = 2^x - 2^{|x|} + 1$$

$$f) y = 2^{x+|x|}$$

III.81 Rozwiązać równanie

$$0,25^{0,5x(x-1)-0,75} = \sqrt[4]{0,5^{m-1}},$$

podać warunek istnienia pierwiastków oraz obliczyć pierwiastki dla $m = -5$.

III.82 Narysuj wykres funkcji

$$a) y = 3^{x+1} - 2$$

$$c) y = \pi^x$$

$$e) y = \left|\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} - 1\right| - 2$$

$$b) y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x + 3$$

$$d) y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$$

III.83 Rozwiąż graficznie równanie, nierówność lub układ równań:

$$a) 2^{x+3} = -x$$

$$e) \begin{cases} y = 3^x \\ y = \frac{3}{x} \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} y = 2^x \cdot 2^{|x|} \\ y = \frac{3}{4}x + 3\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$b) 4^{|x|} = 5 - |x|$$

$$c) 2^{x+3} \geq -x$$

$$f) \begin{cases} y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} \\ x^2 + y^2 = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$d) 2^{|x|} < 3 - |x|$$

III.84* Zbadaj liczbę rozwiązań równania w zależności od wartości parametru m ($m \in \mathbb{R}$):

a) $4 \cdot 2^{|x-1|} = m$

b) $3^{|x-1|-|x|} = m$

c) $2^{|x-2|+x} = m^2$

III.85* Rozwiąż układy równań:

a)
$$\begin{cases} 27^x = 9^y \\ \frac{81^x}{3^y} = 243 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3^x 5^y = 75 \\ 3^y 5^x = 45 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 77 \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^y = 7 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 3^x + 3^y = 28 \\ 3^{x+y} = 27 \end{cases}$$

III.86 Zbadaj parzystość (nieparzystość) funkcji:

a) $f(x) = 3^x + 3^{-x}$,

b) $f(x) = 3^x - 3^{-x}$,

c) $f(x) = 2^x + \cos x$,

III.87* Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie:

a) $25^x + (1 - 2m) \cdot 5^x + 9 = 0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste

b) $(m + 2) \cdot 2^{2x-1} - 2m \cdot 2^x + m = 0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste

c) $m \cdot 16^x + (2m - 1) \cdot 4^x + 2 - 3m = 0$ nie ma pierwiastków rzeczywistych

d) $m^x = \frac{1}{4} \sin x$ ma nieskończenie wiele rozwiązań

III.88 Oblicz

a) $\log_5 625$

c) $\log_{\sqrt{5}} 5 \sqrt[3]{5}$

e) $16^{\log_2 \sqrt[4]{2} + \log_4 3}$

b) $\log_{\frac{1}{5}} 1$

d) $10^{2+\log 3}$

III.89 Określ dziedzinę funkcji:

a) $f(x) = \log_x(2^x - 16\sqrt{2})$

b) $f(x) = \log_{x+3} \frac{x}{x+1}$

c) $\log_{|x-1|}(x^3 - x^2 + 3x - 3)$

III.90 Narysuj wykres funkcji:

a) $y = \log_2 |x - 2|$

d) $y = |\log_{\frac{1}{2}}(4 - 2x)|$

g) $y = \left| \log_{\frac{1}{3}} |x + 2| \right|$

b) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x + 1) - 1$

e) $y = \log_3(-x) - 2$

c) $y = |\log_{10}(x - 5)|$

f) $y = 1 - \log_2(x + 3)$

III.91 Rozwiąż graficznie równanie, nierówność lub układ równań:

a) $\log_3(x + 2) = x^2 - 2x + 2$

d) $1 - \log_{\frac{1}{2}} x > \frac{4}{x}$

f)
$$\begin{cases} y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} \\ y = \log_3 x \end{cases}$$

b) $\log_4 |x| = 1 - x^2$

c) $\log_2(x - 2) - 1 \geq \frac{15}{4}x - x^2$

e)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = \log_{\frac{1}{2}}(x + 2) \end{cases}$$

g)
$$\begin{cases} y = \log_3(x - 1) + 1 \\ y = -(x - 10)^2 + 3 \end{cases}$$

III.92 Rozwiąż równanie

a) $\log_{27} x = \frac{4}{3}$

c) $\log_3(12 - x) = 2$

b) $\log_3 \sqrt[3]{x} = -\frac{3}{2}$

d) $\log_4(4 - 2x) = 3$

e) $\log x = 2 - \log 5$

f) $3 - \log x = \log 16$

g) $\log(x + 2) - \log 5 = \log(x - 6)$

h) $\log_3 9 - 3 = \log_3(x - 1) - \log_3(x + 5)$

i) $\log_5 3 + \log_{25} x = \log_{\frac{1}{5}} \sqrt{2}$

j) $\log_2 x + \log_3 x = \frac{\log 6}{\log 2}$

III.93 Rozwiąż równanie:

a) $\log_2(\log_3 x) = 1$

b) $\log_{x-1}(2x^2 + 4x - 6) = 2$

c) $\log \frac{9 - 2x}{2} = \log \frac{4,5}{x}$

d) $\log_4(x + 3) - 2 = \log_4(x - 1) - \log_4 8$

e) $2 \log_3(x - 2) + \log_3(x - 4)^2 = 0$

f) $\frac{\log(9 - x^3)}{\log(3 - x)} = 3$

g) $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$

h) $(\log_2 x - 3) \log_2 x + \frac{2}{3}(\log_2 x + 1) = 0$

i) $\frac{3}{\log x - 1} = \log x + 1$

j*) $\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10$

k*) $\log_x 8 - \log_{4x} 8 = \log_{2x} 16$

III.94 Rozwiąż nierówność:

a) $\log_2(2x - 1) < 3$

b) $\log_{\frac{1}{2}}(4x - 1) > -2$

c) $\log_2(3x - 5) > \log_2(x + 3)$

d) $\log_{0,5}(3x - 2) < \log_{0,5}(2x + 7)$

e) $\log_{\frac{1}{2}}(2x + 5) > -3$

f) $\log_{\frac{1}{3}}|x + 2| \geq -2$

g) $\log_8(x^2 - 4x + 3) < 0$

h) $\log(x^2 - 2x - 2) \leq 0$

i) $\log_5(x^2 - 11x + 43) < 2$

j) $\log_3 \frac{3}{x-1} > \log_3(5-x)$

k) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{3x-1}{x+2} < 1$

l) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{35-x^2}{x} \geq -\frac{1}{2}$

m) $\log_{\frac{1}{3}}(\log_4(x^2 - 5)) > 0$

n) $\frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{\log_2 x - 1} - 1 < 0$

o) $\log_{|x|} \frac{2x^2 - x}{2} > 1$

III.95* Rozwiąż nierówność

a) $|2x^2 - 1|^{x^2(x^2-1)} > 1$

b) $\left(\frac{8+x}{x^2-x}\right)^{2-x} \geq 1$

c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1+\log_{\sqrt{3}} \operatorname{ctg} x} \geq 1$

d) $\sqrt[3]{3^{2 \sin \alpha (2 \sin \alpha - \sqrt{3} + 1)}} < 9^{-\frac{\sqrt{3}}{6}}$

III.96* Rozwiąż układy równań:

a) $\begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9 \\ x + y - 20 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576 \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7 \\ x^y = 5^{12} \end{cases}$

III.97* Zbadaj parzystość (nieparzystość) funkcji:

a) $f(x) = x^3 \log \frac{2-x}{2+x}$ b) $f(x) = \log_2 \cos 2x$ c) $f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$

III.98* Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których:

- a) równanie $-\frac{3}{4}x^2 + \log_2(m+2) \cdot x + \log_{\frac{1}{2}}(m+2) + \frac{2}{3} = 0$ ma dwa różne rozwiązania
 b) nierówność $x^2 \log_3 m + 2x - 1 < 0$ spełnia każda liczba rzeczywista
 c) nierówność $\log_2(m(x^2+1)) \leq \log_2(4x^2+4x+7)$ ma co najmniej jedno rozwiązanie

Odpowiedzi

III.3: a) $x = 4$, b) $x = \frac{1}{2}$, c) $x = -\frac{3}{4}$, d) $x = -\frac{1}{3}$

III.4: a) $[\frac{3}{5}, \frac{1}{5}]$, b) $[9, 6]$, c) $[-\frac{1}{2}, 0]$, d) $[8, 3]$

III.5: a) $x > 5$, b) $x < -4$, c) $x < -18$, d) $x > 18$, e) $x < 6$, f) $x > -8$, g) $x \in (-\frac{1}{5}, \frac{7}{5}]$, h) $x \in (-2, \frac{1}{2})$

III.6: a) nad wykresem, b) pod wykresem

III.7: a) $[-1, 7)$, b) $(1, 3)$, c) $\{3\}$, d) $[-2\pi, 2\pi]$

III.8: $2\pi r = \pi d$

III.9: $f(x) = 2x + 2\pi$ lub $f(x) = 2(2-x) + 4 + 2\pi$

III.10: $p(T) = \frac{T}{V}$

III.11: $(2 : 1) \sim (a : b)$ a) $6b$, b) $\sqrt{5}b$, c) $(3 + \sqrt{5})b$, d) $2\pi\sqrt{5}b$,

III.12: a) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + (1 - \frac{2\sqrt{3}}{3})$, b) $y = x - 1$, c) $y = -\sqrt{3}x + (1 + 2\sqrt{3})$

III.13: $y = \mp \frac{\sqrt{3}}{3}$, $y = \sqrt{3}x \mp \sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}x \mp \sqrt{3}$

III.14: $y = 0$, $y = \mp \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2}$

III.15: $y = 2x - 8$

III.16: $y = 2 - x$

III.17: $f(x) = -\frac{1}{2}x - 1$

III.18: a) $f(x) = \frac{1}{2}x$, b) $f(x) = 2x + 2$, c) $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, d) $f(x) = -x + 1$, e) $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$, f) $f(x) = x$

III.19: a) $y = 2x + 1$, b) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$, c) $y = \frac{1}{3}x$, d) $y = x - 9$

III.20: a) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$, b) $y = 2x - 4$, c) $y = -3x + 10$, d) $y = -x + 9$

III.21: a) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$, b) $y = 2x - 4$, c) $y = -3x + \frac{9}{4}$, d) $y = -x - 1$

III.22: a) $y = -\frac{1}{3}x + 2$, b) $y = -x + 7$

III.23: a) Równoległy: $(3, 2)$, prostopadły: $(-2, 3)$, b) Równoległy: $(1, -5)$, prostopadły: $(5, 1)$, c) Równoległy: $(1, 2)$, prostopadły: $(-2, 1)$

III.24: a) równoległa: $2x - 3y + 4 = 0$, prostopadła: $3x + 2y - 7 = 0$, b) równoległa: $3x + 4y + 4 = 0$, prostopadła: $4x - 3y - 3 = 0$, c) równoległa: $-x + 2y + 1 = 0$, prostopadła: $2x + y - 7 = 0$, d) równoległa: $x - \frac{1}{2}y - 3 = 0$, prostopadła: $\frac{1}{2}x + y - 4 = 0$, e) równoległa: $x - 1 = 0$, prostopadła: $y - 4 = 0$, f) równoległa: $y + 4 = 0$, prostopadła: $x - 2 = 0$

III.25: a) $(-2, 3)$, b) $(1, 2)$, c) $(1, 4)$, d) nieskończenie wiele punktów, proste pokrywające się, e) $(2, -1)$, f) brak punktów wspólnych, proste równoległe

III.26: a) dla $m = -1$ nieskończenie wiele rozw., dla $m = 1$ brak rozw., dla $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ jedno rozw. postaci $x = \frac{1}{m-1}; y = -\frac{1}{m-1}$, b) dla $m = 2$ nieskończenie wiele rozw., dla $m \neq 2$ jedno rozw. postaci $x = -1; y = 2 + m$, c) dla $m \in \{-1, 1\}$ nieskończenie wiele rozw., dla $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ brak rozw., d) dla $m = 3$ nieskończenie wiele rozw., dla $m = -1$ brak rozw., dla $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$ jedno rozw. postaci $x = -\frac{3}{m+1}; y = -\frac{1}{m+1}$

III.27: a) $m \in \mathbb{R}$, b) $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$

III.28: a) $y = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}$, b) $y = (x - 1)^2 - 1$, c) $y = \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{2}$, d) $y = 2(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{2}$, e) $y = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4}$, f) $y = (x - 1)^2 + 4$, g) $y = (x - 1)^2 - 4$, h) $y = (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{25}{4}$

III.30: a) $(x - 1)(x - 2)$, b) $x(x - 2)$, c) brak, d) $2(x - 2)(x + 1)$, e) $(x - 3)(x - 2)$, f) brak, g) $(x + 1)(x - 3)$, h) $(x + 4)(x - 1)$

III.31: a) $(x - 1)(x + 2)$, b) brak, c) $(x + 3)^2$, d) $(2x - 1)(x + 2)$, e) brak, f) brak

III.32: a) $\{1, 5\}$, b) $\{-2, 12\}$, c) $\{0, 6\}$, d) $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$, e) $\{1, \sqrt[3]{2}\}$, f) $\{-6, -4, -1, 1\}$, g) $\{a+b, a-b\}$, h) $\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\}$, i) $\{b, a-b\}$

III.33: a) $x \in \mathbb{R} \setminus (-3, 1)$, b) $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, \frac{1}{2}]$, c) $x \in \mathbb{R} \setminus [-2, 7]$, d) $x \in \mathbb{R}$, e) $x \in [-7, 12]$, f) $x \in \mathbb{R} \setminus [0, \frac{3}{2}]$

III.34: a) $[-3, -2) \cup (0, 1]$, b) $[-1, -\frac{1}{2}) \cup (0, \frac{1}{2}]$, c) \emptyset , d) $(0, 6) \setminus \{3\}$, e) $(-\infty, \frac{3-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \infty)$,

III.35: a) $[3, 7)$, b) $(-\infty, 1]$

III.36: a) $-\frac{b}{c}$, b) $\frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a}$, c) $\frac{b^2}{ac} - 2$, d) $-\frac{b^3}{a^3} + 3\frac{cb}{a^2}$

III.37: a) $m \in (-\infty, -\frac{10}{3}) \cup (1, 5) \cup (5, \infty)$, b) $m \in (-1, 1) \cup (1, \frac{5}{3})$

III.38: a) dla dodatnich: $m \in (-2\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$, dla ujemnych $m \in [5\frac{1}{2}, \infty)$, b) dla ujemnych $m \in (-\frac{1}{2}, 0]$, dla dodatnich $m \in [4, \infty)$

III.39: $m \in (-\infty, \frac{5}{9})$

III.40: $m = 1 \vee m = 3$

III.41: $m = \frac{1}{2} \vee m = 1$

III.42: $m = 64$

III.43: a) $m \in (-1, 1)$, b) $m \in (-\infty, -2\frac{1}{2})$

III.44: Wierzchołek: $(-m - 1, -m^2 - 3m - 5)$

III.45: $m = 1$

III.46: a) $m \in (-\frac{\sqrt{55}}{2}, \frac{\sqrt{55}}{2})$, b) $m \in (-\frac{10}{3}, 1)$

III.47: kwadrat

III.49: a) 45° , b) 15° , c) 210° , d) 120° , e) 10° , f) 80° , g) 63° , h) 48°

III.50: a) $\frac{\pi}{6}$, b) $\frac{\pi}{4}$, c) $\frac{\pi}{3}$, d) $\frac{\pi}{2}$, e) $\frac{5}{4}\pi$, f) $\frac{3}{2}\pi$, g) $\frac{1}{180}\pi$, h) $\frac{19}{60}\pi$

III.51: a) π , b) $2\frac{2}{3}\pi$, c) 16π

III.52: a) $\sin = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos = -\frac{1}{2}$, $\text{tg} = -\sqrt{3}$, $\text{ctg} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, b) $\sin = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\text{tg} = -1$, $\text{ctg} = -1$, c) $\sin = \frac{1}{2}$, $\cos = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{tg} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\text{ctg} = -\sqrt{3}$, d) $\sin = 0$, $\cos = -1$, $\text{tg} = 0$, ctg *nie istnieje*, e) $\sin = -\frac{1}{2}$, $\cos = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{tg} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\text{ctg} = \sqrt{3}$, f) $\sin = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\text{tg} = 1$, $\text{ctg} = 1$, g) $\sin = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos = -\frac{1}{2}$, $\text{tg} = \sqrt{3}$, $\text{ctg} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, h) $\sin = 1$, $\cos = 0$, tg *nie istnieje*, $\text{ctg} = 0$, i) $\sin = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos = \frac{1}{2}$, $\text{tg} = -\sqrt{3}$, $\text{ctg} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, j) $\sin = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\text{tg} = -1$, $\text{ctg} = -1$, k) $\sin = -\frac{1}{2}$, $\cos = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{tg} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\text{ctg} = -\sqrt{3}$, l) $\sin = 0$, $\cos = 1$, $\text{tg} = 0$, ctg *nie istnieje*

III.53: a) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, b) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$, c) $-\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$, d) 1, e) $\frac{1}{2}$, f) -1, g) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, h) $-\frac{1}{2}$, i) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, j) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

III.54: a) $\sin \alpha$, b) trzeba zmienić kat $\text{tg}(a - \frac{\beta}{2})$ odp. $-\text{ctg} \alpha$, c) $\sin \alpha$, d) $-\cos \alpha$, e) $-\text{tg} \alpha$, f) $\sin \alpha$, g) $\cos \alpha$

III.55: a) $\sin \alpha$, b) $\cos^2 \beta$, c) $\sin \alpha$, d) $\frac{1}{\cos \alpha}$, e) 1

III.56: a) jest, b) jest, c) jest, d) jest, e) jest, f) jest,

III.57: a) tak, b) nie (podstaw $\alpha = 90^\circ$), c) tak, d) nie

III.58: a) $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

b) $\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} \alpha + 1} = \frac{\cos 2\alpha \cos \alpha}{\sin 2\alpha \sin \alpha + \cos 2\alpha \cos \alpha} = \frac{\cos 2\alpha \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \cos \alpha (2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)} =$
 $\frac{\cos \alpha}{\cos 2\alpha \cos \alpha} = \cos 2\alpha$

c) $\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \neq \operatorname{tg} \alpha$

d) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta = \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta} = \frac{(\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha)(\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha)}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta} =$
 $\frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta}$

III.59: a) $(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 = 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = 2(1 - \cos(\alpha - \beta)) = 4 \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}$

b) $2(1 + \cos \alpha) - \sin^2 \alpha = 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} (1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}) = 4 \sin^4 \frac{\alpha}{2}$

c) $\sin x (\sin x \operatorname{tg} x + \cos x) = \sin x \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$

III.60: $\frac{3\sqrt{2}-4}{10-7\sqrt{2}}$

III.61: 2

III.62: a) $\alpha = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, b) $\alpha = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, c) (zał. $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$) $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, d) $x = 2\pi + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$, e) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$ lub $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$, f) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, g) $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, h) $x = 2k\pi$ lub $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, i) $x = 2k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, j) (zał. $x \neq \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}$ oraz $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$) $x = \frac{k\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$, k) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, l) (zał. $x \neq \frac{3\pi}{2} + 3k\pi$) $x = \frac{\pi}{2} + 3k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{2} + 3k\pi, k \in \mathbb{Z}$, m) $x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, n) $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, k \leq 0$

III.63: (dla $k \in \mathbb{C}$) a) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, b) $x = \pi + 2k\pi \cup x = \pm \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$, c) $x = k\pi \cup x = \pm \frac{3}{4}\pi + k\pi$, d) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi \cup x = \pm \frac{\pi}{12} + k\pi \cup x = \frac{5}{12}\pi + k\pi$, e) $x = k\pi \cup x = \pi + 2k\pi$, f) $x = \frac{k}{2}\pi \cup x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \cup x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, g) $x = \frac{k}{2}\pi \cup x = k\pi \cup x = \frac{\pi}{2}\pi + 2k\pi$, h) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \cup x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \cup x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, i) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \cup x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, j) $x = \frac{k}{2}\pi \cup x = \frac{\pi}{4} + k\pi$,

III.64: r-nie ma jedno rozwiązanie $x = 0$ dla wszystkich m , które nie są całkowite

III.65: a) $k \in [0, \frac{1}{4}]$ dwa rozwiązania, $k \in [-2, 0)$ jedno rozwiązanie, b) $k \in [-1, 2\frac{1}{3}]$, c) $k \in [\frac{1}{2}, 5]$

III.66: a) $x = p + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, b) $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

III.67: a) $x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$, b) $x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$, c) $x \in (\frac{1}{3} - \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, \frac{1}{3} + \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}), k \in \mathbb{Z}$, d) $x \in (-\frac{5\pi}{8} + k\pi, \frac{\pi}{8} + k\pi), k \in \mathbb{Z}$, e) $x \in (-\frac{\pi}{6} + k\pi, k\pi) \cup (k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi), k \in \mathbb{Z}$, f) $x \in (\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi)$, g) $x \in [0 + 2k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi] \cup [\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; \pi + 2k\pi]$, h) $x \in (-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi)$, i) $x \in \mathbb{R} \setminus ((-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi) \cup \{\pi + 2k\pi\})$, j) $x \in (\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{2\pi}{3} + k\pi)$, k) $x \in (-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi)$, l) $x \in (\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k; \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k)$, m) $x \in (-\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi)$, n) $x \in (\frac{2\pi}{3} + k\pi; \pi + k\pi)$, o) $x \in [\frac{1}{4} + k; \frac{3}{4} + k]$

III.68: zauważ, że $\cos(20^\circ) = \cos(90^\circ - 70^\circ) = \sin 70^\circ$, a następnie użyj wzoru $\frac{1}{2} \sin 2x = \sin x \cos x$

III.70: a) $k = 5$, b) $k = -4$, c) $k = 6$, d) $k = -7$

III.71: a) $\frac{2}{3}$, b) $\frac{3}{4}$, c) $x = 1$, d) $x = -3$, e) $\frac{4}{3}$, f) $x = 1$

III.72: a) $x = 2, 1$, b) $x = -1, 7$, c) $x = 3$, d) $x = 2$, e) $x = 0, 1$, f) $t = -3$, g) $x = 3$, h) $x = 4$, i) $x = -3.2$, j) $x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$, k) $x = 1, 5$, l) $x = -3$, m) $x = -1 \pm \sqrt{3}$, n) $x = 0$

III.73: a) $x \in \{-1, 2\}$, b) $x \in \emptyset$, c) $x \in \left\{ \frac{-1 - \sqrt{21}}{4}, \frac{-1 + \sqrt{21}}{4} \right\}$, d) $x = \frac{7}{15}$, e) $x \in \left\{ \frac{-6 - \sqrt{31}}{5}, \frac{-6 + \sqrt{31}}{5} \right\}$,

f) $x \in \{-2, 4\}$

III.74: a) $x = 0$, b) $x \in \{-1, 1\}$, c) $x \in \{0, 2\}$, d) $x = 1$, e) $x \in \{0, 1, 2, 3\}$

III.75: a) $x \in \{-3, 1\}$, b) $x = 0$, c) $x \in \{-2, 4\}$, d) $x = 2$, e) $x = \frac{3}{2}$, f) $x \in \{-3, 1\}$, g) równanie sprzeczne, h) $x \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, i) $x \in \{0, 2\}$, j) $x \in \{-1, 1\}$, k) $x = -6$, l) $x \in \{0, 2\}$

III.76: a) $x \in (-1, \infty)$, b) $x \in (-\infty, \frac{1}{6})$, c) $x \in (-\infty, 5)$, d) $x \in (4, \infty)$, e) $x \in (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, f) $x \in (-\infty, -3] \cup x \in [-1, \infty)$, g) $x \in (-27, +\infty)$, h) $x \in (-\infty, 4)$, i) $x \in [0, \frac{1}{2}]$, j) $x \in [3, \infty) \vee \{-2\}$

III.77: a) $x \in (0.6; 1)$, b) $x \in (1; 4)$, c) $x \in (1; 3)$, d) $x \in (-\infty; 0) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$, e) $x < 5$, f) $x > \frac{2}{3}$, g) $x \in [\frac{1}{2}, \infty)$

III.78: a) $x \in [\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$, b) $x \in R$, c) dla żadnego x , d) $x \in (-\infty, -3] \cup [-\frac{3}{4}, \infty)$ e) $x \in R$, f) $x \in (-\infty, \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{21}}{4}] \cup [\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{21}}{4}, \infty)$

III.79: a) $x_1 = \frac{1}{6}$, $y_1 = \frac{1}{4}$; $x_2 = \frac{1}{4}$, $y_2 = \frac{1}{6}$, b) $x = \frac{1}{2}, y = 2$, c) $x = 4, y = -2$

III.81: $x_1 = \frac{1 + \sqrt{m+6}}{2}$, $x_2 = \frac{1 - \sqrt{m+6}}{2}$, dla $m \geq -6$.

Dla $m = -5$, otrzymujemy $x_1 = 1, x_2 = 0$

III.84: a) gdy $m \in (-\infty, 4)$ brak rozwiązań, gdy $m = 4$ jedno rozwiązanie, dla $m \in (4, +\infty)$ dwa rozwiązania, b) gdy $m \in (-\infty, \frac{1}{3}) \cup (3, +\infty)$ brak rozwiązań, gdy $m \in (\frac{1}{3}, 3)$ jedno rozwiązanie, dla $m \in \{\frac{1}{3}, 3\}$ nieskończenie wiele rozwiązań, c) dla $m \in (-2, 2)$ brak rozwiązań, dla $m \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ jedno rozwiązanie, gdy $m \in \{-2, 2\}$ nieskończenie wiele rozwiązań

III.85: a) $(x, y) = (2, 3)$, b) $(x, y) = (1, 2)$, c) $(x, y) = (0, 3) \vee (x, y) = (3, 0)$, d) $(x, y) = (4, 1)$

III.86: a) parzysta, b) nieparzysta, c) nie

III.87: a) $m \in (-\infty, -\frac{5}{2}) \cup (\frac{7}{2}, +\infty)$, b) $m \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, c) $m \in (\frac{3-\sqrt{5}}{8}, \frac{3+\sqrt{5}}{8})$, d) $m \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

III.88: a) 4, b) 0, c) $\frac{8}{3}$, d) 300, e) 18

III.89: a) $x \in (\frac{9}{2}, +\infty)$, b) $x \in (-3, -2) \cup (-2, -1) \cup (0, +\infty)$, c) $x \in (1, +\infty) \setminus \{2\}$

III.91: a) $x = 1$, b) $x = 1$ lub $x = -1$, c) $[4, +\infty)$, d) $(-\infty, 2)$, e) $(x, y) = (-1, 0) \vee (x, y) = (0, -1)$, f) $(x, y) = (3, 1)$, g) $(x, y) = (10, 3)$

III.92: a) $x = 3^4$, b) $x = 3^{-2}$, c) $x = 3$, d) $x = -30$, e) $x = 20$, f) $x = \frac{5^3}{2}$, g) $x = 8$, h) $x = 4$, i) $x = \frac{1}{18}$, j) $x = 3$

III.93: a) $x = 9$, b) równanie sprzeczne, c) $x \in \{\frac{3}{2}, 3\}$, d) $x = 5$, e) $x = 3 + \sqrt{2}$, f) $x = 1$, g) $x \in \{1, 2\}$, h) $x \in \{\sqrt[3]{2}, 4\}$, i) $x \in \{\frac{1}{100}, 100\}$, j*) $x \in \{\frac{1}{100}, 100\}$, k*) $x \in \{\frac{\sqrt{2}}{4}, 2\}$

III.94: a) $x \in (\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$, b) $x \in (\frac{1}{4}, \frac{5}{4})$, c) $x \in (4, +\infty)$, d) $x \in (9, +\infty)$, e) $x \in (-\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$, f) $x \in \langle -11, -2 \rangle \cup (2, 7)$, g) $x \in (2 - \sqrt{2}, 1) \cup (3, 2 + \sqrt{2})$, h) $x \in \langle -1, 1 - \sqrt{3} \rangle \cup (1 + \sqrt{3}, 3)$, i) $x \in (2, 9)$, j) $x \in (1, 2) \cup (4, 5)$, k) $x \in (\frac{4}{5}, +\infty)$, l) $x \in \langle -7, -\sqrt{35} \rangle \cup (5, \sqrt{35})$, m) $x \in (-3, -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}, 3)$, n) $x \in (0, 1) \cup (2, +\infty)$, o) $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (\frac{1}{2}, 1) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$.

III.95: a) wszystkie rzeczywiste oprócz $\pm 1, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ i 0, b) $x \in [-2; 0) \cup (1; 2) \cup [4, \infty)$, c) $x \in [\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in Z$, d) $\alpha \in (\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi) \cup (\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi)$, $k \in Z$, jeżeli w treści zadania w wykładniku będzie -1 zamiast $+1$.

III.96: a) $(x, y) = (2, 18) \vee (x, y) = (18, 2)$, b) $(x, y) = (100, 10)$, c) $(x, y) = (2, 6)$, d) $(x, y) = (5^3, 4) \vee (x, y) = (5^4, 3)$

III.97: a) parzysta, b) parzysta, c) nieparzysta

III.98: a) $m \in (-2, 0) \cup (2, +\infty)$, b) $m \in (0, \frac{1}{3})$, c) $m \in [3, 8]$