

Blok I: Wyrażenia algebraiczne

I.1 Obliczyć

a) $\frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9}$

b) $\frac{6^4}{3^2}$

c) $\left(7^{\frac{1}{x-y}}\right)^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$ dla $xy = 1$

d) $\frac{((\sqrt{7})^x)^2}{(\sqrt{7})^{11}} \cdot \frac{7^x}{7^{11}}$

e) z , jeśli $x = 10^{14}$, $y = 10^{0.7}$ i $x^z = y^3$

I.2 Uprościć wyrażenia

a) $\frac{48x^{12}}{16x^4}$ dla $x \neq 0$

b) $\frac{x(x^5)^2}{x^4}$ dla $x \neq 0$

c) $\frac{x(x^2)^4}{(x^3)^3}$ dla $x \neq 0$

d) $\left(\frac{45x^{-4}y^2}{9z^{-8}}\right)^{-3}$ dla $xyz \neq 0$

I.3 Uprościć wyrażenia. Założyć, że wszystkie wykładniki są całkowite, wszystkie mianowniki są różne od zera i że zero nie jest podnoszone do niedodatniej potęgi

a) $(x^t \cdot x^{3t})^2$

b) $(x^y \cdot x^{-y})^3$

c) $\frac{(3^2x^5y^3)^{-2}}{x^4y^{-6}}$

d) $(t^{a+x} \cdot t^{x-a})^4$

e) $(m^{x-b} \cdot n^{x+b})^x (m^b n^{-b})^x$

f) $\left[\frac{(3x^a y^b)^3}{(-3x^a y^b)^2}\right]^2$

g) $\left[\left(\frac{x^r}{y^t}\right)^2 \left(\frac{x^{2r}}{y^{4t}}\right)^{-2}\right]^{-3}$

I.4 Uprość wyrażenia

a) $2^{5/3}/4^{7/3}$

b) $3^{-8/11}(1/9)^{-4/11}$

c) $12^{2/3} \cdot 18^{2/3}$

d) $20^{7/2} \cdot 5^{-7/2}$

e) $(x^{3/2} + x^{5/2})x^{-3/2}$

f) $(x^{3/4})^{8/3}$

g) $x^{5/2}(x^{-3/2} + 2x^{1/2} + 3x^{7/2})$

h) $y^{1/2}(1/y + 2\sqrt{y} + y^{-1/3})$

I.5 Zapisać liczby za pomocą pojedynczego symbolu pierwiastka z liczby wymiernej, np. $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{\frac{9}{8}}$.

a) $\sqrt{5}\sqrt[5]{2}$;

b) $\frac{\sqrt{2}\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{5}}$;

c) $\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{18}}{\sqrt[6]{6}}$;

d) $\left(\frac{\sqrt{3}(\sqrt[3]{5^2})^2}{\sqrt[5]{6}}\right)^{1/3}$

I.6 Zapisać liczby w postaci

a) dziesiętnej: $\frac{7}{4}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{121}{111}$, $\frac{1}{250}$;

b*) wymiernej: $0.(7) = 0.777\dots$, $3.14(5)$, $0.7(35)$;

c) wymiernej: $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}$, $\frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}}$

I.7 Obliczyć

a) $|8 \cdot (-3)|$

b) $|(-2) \cdot (-3)|$

c) $(-4) \cdot (-5) + 7 \cdot (-2)$

d) $2\frac{1}{4} + 3\frac{2}{3} - 1\frac{3}{5}$

e) $\frac{1}{18} - \frac{5}{6} + \frac{7}{24}$

f) $\left(3\frac{7}{10} - \frac{2}{3}\right) - \left(5\frac{2}{3} + 7\frac{1}{15} - 4\frac{3}{5}\right)$

g) $3\frac{3}{4} \cdot 2\frac{1}{5} \cdot 7\frac{1}{2}$

h) $-\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{18}{5} + \left(-\frac{3}{5}\right) - \frac{21}{10}\right)$

i) $\left(3\frac{3}{4} + 5\frac{2}{3}\right) : 3\frac{1}{4} \cdot \frac{13}{8}$

I.8 Obliczyć

a) $(5^7 : 5^3) \cdot 5^4$

d) $(3 \cdot 4 \cdot 5)^2$

g) $(2^3)^2$

b) $[(-8)^6 \cdot (-8)^2] : (-8)^4$

e) $\frac{2^2 \cdot 4 \cdot (2^2)^4}{2^5 \cdot 2^2}$

h) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^3\right]^2$

c) $(4^5 : 4^2) : (4^6 : 4^5)$

f) $4^{-6} \cdot 4^4 \cdot (2^3 \cdot 2^{-4})^{-1}$

i) $[(0,2)^2]^3$

I.9 Korzystając z wartości bezwzględnej znaleźć odległości między liczbami a i b na osi liczbowej gdy

a) $a = -5$ i $b = -7$

b) $a = -2$ i $b = 3$

c) $a = 8$, $b = 15$

I.10 Wykonaj potęgowania

a) $(2x - \sqrt{3}y)^2$

d) $(a + b - 1)^3$

f) $\left(a + \frac{1}{a} + \sqrt{a}\right)^2$

b) $(a + \sqrt{a} + \sqrt[3]{a})^2$

c) $(x + 2\sqrt{2})^3$

e) $\left(p + \sqrt{p + \sqrt{p}}\right)^4$

I.11 Rozłóż podane wyrażenia na czynniki

a) $4x^2 - 1$

d) $a^4 - b^4$

g) $a^3 + 125b^3$

b) $9 - 2x^2$;

e) $x^3 + x^2 - x - 1$

h) $a^2 + b^2 - c^2 - 2ab$

c) $2x^3 - 3\sqrt[3]{4x^2} + 3\sqrt[3]{2x} - 1$

f) $x^3 - 24$

i*) $x^4 + y^4$

I.12 Uprościć podane wyrażenia

a) $(x + 3y)^2 - (x - 3y)^2$

h) $(x - p)^{-1} - (x + p)^{-1}$

b) $(a - 2\sqrt{7})(a^2 + 28)(a + 2\sqrt{7})$

i) $\frac{x^3 + 3x^2 - 2x - 6}{x^2 - 2}$

c) $(x + 1)^3 - (x - 1)^3$

j) $\frac{1 + x + x^2 + x^3 + x^4}{1 - x}$

d) $\frac{k - 1}{k^2 + k} \cdot \frac{2k}{k^2 - 1}$

k) $\frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{2} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$

e) $\frac{2x}{x + 5} + \frac{2x - 10}{x^2 - 25}$

f) $\frac{a}{a - b} + \frac{b}{b - a}$

l) $\frac{x^2 + 4x + 3}{x^3 + 1}$

g) $\frac{x + 8}{x} - \frac{x + 5}{x - 3}$

m) $\frac{x^2 - 1}{|x + 1|}$

n) $\sqrt{(x+y)^2 - 4xy}$

o) $\sqrt{\frac{1-x}{1+x} + \frac{3x-1}{1-x}}$

I.13 Zapisać wyrażenie kwadratowe w postaci kanonicznej

a) $x^2 - 6x + 1$

d) $1 + x + x^2$

g) $ax^2 + bx + c$

b) $3x^2 + 9x$

e) $6x - x^2$

c) $10 - 4x - x^2$

f) $2x^2 - 7x - 1$

I.14* Zapisać w postaci ułamków prostych

a) $\frac{x+1}{(x+2)(x+3)}$

d) $\frac{2x-1}{(x-2)^2}$

g) $\frac{2x+1}{(x+2)^3}$

b) $\frac{x}{1-x^2}$

e) $\frac{x-3}{x^2-x-6}$

h) $\frac{1}{x(x^2+x+1)}$

c) $\frac{3x^2-2}{x(x+1)(x+2)}$

f) $\frac{1}{(x^2-1)(x+1)}$

i) $\frac{x-5}{(x^2+1)^2}$

I.15 Podstawić wskazane wyrażenie za zmienną x i doprowadzić wynik do prostszej postaci

a) $x^2 - 2x$, $x := t + 1$

c) $\frac{x+1}{x-2}$, $x := \frac{t}{3t+1}$

e) $\frac{3-x}{2x+1}$, $x := \frac{3-u}{2u+1}$

b) $\frac{1}{x+1}$, $x := \frac{2u}{1-u}$

d) $\frac{2x+3}{x-5}$, $x := \frac{5y+3}{y-2}$

f) $\frac{x+1}{x^2-4}$, $x := \frac{s}{\sqrt{s+1}}$

I.16 Podstawić wskazane wyrażenie za zmienną x i doprowadzić wynik do prostszej postaci

a) $\sqrt{x^2+1}$, $x := \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right)$

c) $x^{-1/2}(1+x^{1/4})^{1/3}$, $x := (u^3-1)^4$

d) $\sqrt[4]{1+x^5}$, $x := (t^4-1)^{1/5}$

b) $\sqrt{2x^2+3x+1}$, $x := \frac{t^2-1}{2\sqrt{2}t+3}$

e) $\sqrt{\frac{2x^2+2x\sqrt{x^2+1}+1}{x^2+1}}$, $x := \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$

I.17 Uprościć wyrażenia

a) $(\sqrt{x^2-3} - x + \sqrt{3})^2$

d) $\frac{1}{1 + \left(\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} \right)^2} \cdot \frac{1 + \sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{(1 + \sqrt{1+x^2})^2}$

b) $\frac{2x(x^2+1)^{-2}}{\sqrt{1 - \frac{1-x^2}{1+x^2}}} \cdot \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$

e) $\frac{x\sqrt{x} - 3\sqrt[5]{x^2} + x\sqrt[7]{x^3}}{x\sqrt[3]{x}}$

c) $\frac{1}{1 + (x - \sqrt{1+x^2})^2} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)$

f) $\frac{x - \sqrt[3]{x^2} + x\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt{x} + x\sqrt[3]{x}}$

I.18 Uzasadnij że dla każdej liczby $-1 \leq x \leq 5$ wyrażenie

$$\sqrt{4x^2 + 12x + 9} + 2\sqrt{x^2 - 12x + 36}$$

ma stałą wartość.

I.19* W każdym z niżej podanych przykładów znaleźć takie wyrażenie $\phi(t)$, że po jego podstawieniu w miejsce zmiennej x pozbędziemy się wszystkich pierwiastków, np.

$$\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} \xrightarrow{x := t^6} t^3 + t^2.$$

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{x\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} + 1} & \text{c)} x^2 + \sqrt[3]{x^2 - 2} - \sqrt{\frac{1}{x^2 - 2}} & \text{e)} \sqrt{\frac{2x+3}{4x-5}} + \sqrt[3]{\frac{4x-5}{2x+3}} \\ \text{b)} \frac{\sqrt{x+2} - 3\sqrt[5]{x^2+4x+4}}{x\sqrt[3]{x+2} - 1} & \text{d)} \sqrt[4]{\frac{x}{x+1}} + \frac{x-2}{1 + \sqrt{\frac{x}{x+1}}} & \text{f)} \frac{x^2 + \sqrt[3]{\sqrt{x^2+1} - 2}}{\sqrt{x^2+1}} \end{array}$$

I.20 Usuń niewymierność z mianownika następujących ułamków

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{1}{\sqrt{5}-1} & \text{d)} \frac{1}{\sqrt[3]{5}+2} & \text{g}^*) \frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} \\ \text{b)} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} & \text{e)} \frac{7}{9 - 6\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{36}} & \text{h}^*) \frac{4}{1 + \sqrt{3} - \sqrt{5}} \\ \text{c)} \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{7}}{\sqrt{7} - \sqrt{2}} & \text{f}^*) \frac{\sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3}}} & \text{i}^*) \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}} \end{array}$$

I.21 Oblicz

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \left| \frac{3 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} \right| & \text{b)} \left| \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} \right| & \text{c)} \sqrt{(5 - \sqrt{6})^2} \\ & & \text{d)} \sqrt{(\sqrt{3} - 3)^2} \end{array}$$

I.22 Uprość wyrażenia

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \sqrt{(2-a)^2} & \text{e)} |1+x| + |x-3| & \text{h)} |4-x| + |x-2| \text{ dla } x \in (2, 4) \\ \text{b)} \sqrt{x^4(1-x)^2} & \text{f)} \left| \frac{1}{x-1} \right| \cdot |1-x| & \text{i)} 5|x-4| - |8-4x| \text{ dla } x < 2 \\ \text{c)} \frac{\sqrt{a^2}}{a} & \text{g)} |x-3| + 3|x-1| \text{ dla } x > 3 & \text{j)} \frac{x^2-1}{|x-1|} \cdot |x-3| \text{ dla } x > 3 \\ \text{d)} |x-1| - |x-3| & & \end{array}$$

I.23 Przekształć liczby do prostszej postaci

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}} \right)^2 & \text{h)} |4 - \sqrt{7}| - |1 - 3\sqrt{7}| \\ \text{b)} \frac{(\sqrt{24} + \sqrt{36})^2}{16 - 2\sqrt{12}} & \text{i)} \left| \frac{1 - \sqrt{2}}{4 - 3\sqrt{2}} \right| \\ \text{c)} \sqrt{6} + \sqrt{24} - \sqrt{54} & \text{j}^*) \sqrt{6 + 4\sqrt{2}} \\ \text{d)} \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1} + \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} - 1} & \text{k}^*) \sqrt{19 + 8\sqrt{3}} \\ \text{e)} (25^{0.75} + 625^{0.25})(0.2^{-3/2} - 25^{0.5}) & \text{l}^*) \sqrt{7 - 2\sqrt{10}} \\ \text{f)} \left(343^{1/3} - 7\sqrt{7} \right) \left[\left(\frac{1}{7} \right)^{-1} + 7^{1.5} \right] & \text{m}^*) \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}} \\ \text{g)} |2 - 3\sqrt{3}| + |3 - 2\sqrt{3}| & \text{n}^*) \sqrt{11 - 4\sqrt{7}} - \sqrt{29 - 4\sqrt{7}} \\ & \text{o}^*) \sqrt{8 - 2\sqrt{15}} - \sqrt{57 - 12\sqrt{15}} \end{array}$$

I.24* Wykazać, że zachodzą równości

$$a) \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}} = 1$$

$$c) \sqrt{19 - 8\sqrt{3}} - \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = 2$$

$$b) \sqrt{11 - 4\sqrt{7}} + \sqrt{16 - 6\sqrt{7}} = 1$$

$$d) \sqrt{18 - 8\sqrt{2}} - \sqrt{6 - 4\sqrt{2}} = 2$$

I.25* Oblicz sumy

$$a) \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}}$$

$$b) \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$$

$$c) \frac{1}{\sqrt[3]{1^2} + \sqrt[3]{1 \cdot 2} + \sqrt[3]{2^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2 \cdot 3} + \sqrt[3]{3^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{9^2} + \sqrt[3]{9 \cdot 10} + \sqrt[3]{10^2}}$$

I.26* Rozwiąż równania z wartościami bezwzględnymi (modułami):

$$a) |x| = 6$$

$$g) |x - 2| = 6$$

$$m) 2|x| - |x + 1| = 2$$

$$b) |x| = \pi$$

$$h) |x + 2| = 6 - 2x$$

$$n) |x - 2| + |x - 7| = 7$$

$$c) |x| = -1$$

$$i) |3x - 2| + x = 11$$

$$o) |1 - x| + \sqrt{(3 - x)^2} = 4$$

$$d) |x + 4| = 7$$

$$j) \sqrt{(x - 3)^2} = 3 - x$$

$$p) \sqrt{(x - 2)^2} + \sqrt{(3 - x)^2} = 3$$

$$e) |7x + 14| = 28$$

$$k) \sqrt{(5 - x)^2} = x - 5$$

$$f) |6 - 7x| = 1$$

$$l) |x| - |x - 2| = 2$$

$$q) |x + 1| = |x - 2|$$

I.27* Rozwiąż równania kwadratowe

$$a) x^2 + |x - 1| = 1$$

$$c) |x^2 - 6x + 7| = \frac{5}{3}x - 3$$

$$e) |x^2 - 1| + |x^2 - x| = x$$

$$b) |x^2 + 4x + 2| = \frac{5x + 16}{3}$$

$$d) |x + 1| - |x^2 - 1| = 0$$

I.28 Rozwiąż równania

$$a) 2|x + 6| + |x - 6| - |x| = 18$$

$$e) ||x| - 3| = 2$$

$$b) |5 - x| + |3x - 9| + |x + 2| = 8$$

$$f) ||x + 2| - 5| = 4$$

$$c) |7 - x| + |x - 3| + |4x + 8| = -5$$

$$g) |7 - |x - 1|| = 2$$

$$d) ||x| - 7| = 9$$

$$h) ||x + 1| - 2| = x - 1$$

I.29 Rozwiąż nierówności z wartościami bezwzględnymi (modułami). Zapisz rozwiązania w formie sumy przedziałów.

$$a) |x| > 1$$

$$h) |2x - 4| < x - 1$$

$$o) |3x - 1| + |2x - 3| - |x + 5| < 2$$

$$b) |x| \leq 2$$

$$i) |x - 3| + 1 > 2x$$

$$p) ||x + 2| - 6| > 2$$

$$c) |x| \leq 0$$

$$j) 2 < |x - 1| \leq 3$$

$$q) |x - 2| < 3 < x + 2$$

$$d) |x - 2| > 1$$

$$k) |2x + 3| - |4x - 3| \geq 0$$

$$r) ||2x + 1| - 5| > 2$$

$$e) 1 < |x| < 2$$

$$l) |x - 1| + \sqrt{(x - 3)^2} < 5$$

$$s) |x + 2| - |x - 1| \leq x - \frac{3}{2}$$

$$f) 0 < |x - 1| < 1$$

$$m) |6 - x| - |7 - x| > -6$$

$$g) |5 - 2x| < 1$$

$$n) |x - 2| + |x - 7| > 7$$

I.30* Rozwiąż nierówności

a) $x^2 - 5|x| + 6 < 0$

d) $|x - 2| - |x - 1| \geq |x + 1| - 5$

f) $\left| \frac{1}{x+2} \right| < \left| \frac{2}{x-1} \right|$

b) $|x^2 - 2x| < x$

c) $|x - 6| > |x^2 - 5x + 9|$

e) $|x^3 - 1| < x^2 + x + 1$

g) $\left| \frac{5x - 3}{2x + 7} \right| < 2$

I.31 Udowodnić, że $\left(\frac{x + |x|}{2} \right)^2 + \left(\frac{x - |x|}{2} \right)^2 = x^2$

I.32* Udowodnić, że poniższe nierówności są prawdziwe dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y

a) $|x + y| \leq |x| + |y|$

b) $|x - y| \geq |x| - |y|$

c) $\left| |x| - |y| \right| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$

I.33 Masa neutronu wynosi około 0.000000000000000000000000000167 kg. Zapisać ją w notacji wykładniczej.

I.34 Przepisać z notacji wykładniczej do dziesiętnej

a) 7.632×10^{-4}

b) 9.4×10^5

I.35 Najbliższa gwiazda Alfa Centauri znajduje się w odległości około 4.34 roku świetlnego od Ziemi. Rok świetlny to jednostka astronomiczna długości równa odległości jaką przebywa światło w próżni w ciągu jednego roku zwrotnikowego i wynosi 9.4605×10^{12} km. W jakiej odległości od Ziemi liczonej w km i m znajduje się ta gwiazda. Użyć notacji wykładniczej.

I.36 Odległość Ziemi od Słońca definiuje jednostkę astronomiczną oznaczaną AU i wynosi ona 149 597 870 691 m. Największa odległość Plutona od Słońca wynosi 49.3161 AU. Wyróżnić tę odległość w metrach i kilometrach.

I.37 Boki prostokąta są równe $x = (2.50 \pm 0.01)$ m, $y = (4.00 \pm 0.02)$ m. W jakim przedziale zawiera się pole prostokąta? Jaki jest błąd bezwzględny i względny tego pola, jeśli za boki prostokąta przyjąć wartości średnie?

I.38 Masa ciała wynosi $m = (12.59 \pm 0.01)$ kg a jego objętość jest równa $V = (3.2 \pm 0.2)$ dm³. Obliczyć gęstość ciała i oszacować błąd względny i bezwzględny, biorąc średnie wartości masy i objętości.

I.39 Promień koła wynosi $r = (7.2 \pm 0.1)$ cm. Z jakim najmniejszym błędem względnym można obliczyć pole koła, jeśli przyjąć $\pi = 3.14$?

I.40 Oszacować ilość cząsteczek powietrza wypełniającego salę o wymiarach $5 \times 10 \times 3$ m³. Przyjąć gęstość powietrza 1.3 kg/m³, jego masa cząsteczkowa 29 g/mol.

I.41 Oszacować ilość cząsteczek wody w basenie $25 \times 10 \times 2$ m³. Gęstość wody 1 g/cm³, masa cząsteczkowa wody 18 g/mol.

I.42 Oszacować grubość kartki papieru trzymanej w rękach książki, której grubość jest równa 4.4 cm a liczba zawartych w niej stron wynosi 790.

I.43 Oszacować liczbę oddechów i uderzeń serca człowieka w ciągu 70 lat życia. Przyjąć, że częstotliwość oddechów wynosi 16 oddechów na minutę a częstotliwość bicia serca – 70 uderzeń na minutę.

I.44 Oszacować liczbę atomów w 1 m³ ciała stałego przyjmując, że średnica atomu jest rzędu 10^{-10} m.

Odpowiedzi

zI.1: a) $\frac{1}{81}$; b) $144 = 2^4 \cdot 3^2$; c) $\frac{1}{7}$; d) $7^{11/2}$; e) $z = 0.15$;

zI.2: a) $3x^8$; b) x^7 ; c) 1; d) $\frac{1}{125}x^{12}y^{-6}z^{-24}$

zI.3: a) x^{8t} ; b) 1; c) $\frac{1}{81}x^{-14}$; d) t^{8x} ; e) $(mn)^{x^2}$; f) $729x^{6a}y^{6b} = (3x^a y^b)^6$; g) $x^{6r}y^{-18t}$;

zI.4: a) $\frac{1}{8} = 2^{-3}$; b) 1; c) 36; d) $128 = 2^7$; e) $1+x$; f) x^2 ; g) $x+2x^3+3x^6$; h) $y^{-1/2}+2y+y^{1/6}$;

zI.5: a) $\sqrt[10]{2^2 \cdot 5^5} = \sqrt[10]{12500}$; b) $\sqrt[12]{\frac{2^6 \cdot 3^4}{5^3}} = \sqrt[12]{\frac{102384}{125}}$; c) $3\sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{1458}$; d) $\sqrt[90]{\frac{3^9 \cdot 5^{40}}{2^6}}$;

zI.6: a) 1.75, 0.(857142), 1.(090), 0.004; b) $\frac{7}{9}$, $\frac{2831}{900}$, $\frac{394}{495}$; c) $\frac{5}{8}$, $\frac{30}{43}$;

zI.7: a) 24; b) 6; c) 6; d) $\frac{259}{60}$; e) $-\frac{35}{72}$; f) -5.1; g) $\frac{495}{8} = 61.875$; h) $-\frac{27}{40} = -0.675$; i) $\frac{113}{24}$;

zI.8: a) $5^8 = 390625$; b) $-8^4 = -4096$; c) $4^2 = 16$; d) $60^2 = 3600$; e) $2^5 = 32$; f) $2^{-3} = \frac{1}{8}$;
g) $2^6 = 64$; h) $\frac{1}{3^6} = \frac{1}{729}$; i) $0.2^6 = 0.000064$;

zI.9: a) $|a-b| = |-5-(-7)| = 2$; b) 5; c) 7;

zI.10: a) $4x^2 - 4\sqrt{3}xy + 3y^2$; b) $a + a^2 + a^{2/3} + 2a^{3/2} + 2a^{4/3} + 2a^{5/6}$; c) $x^3 + 6\sqrt{2}x^2 + 24x + 16\sqrt{2}$;
d) $a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 - 3a^2 - 3b^2 - 6ab + 3a + 3b - 1$;

e) $p^4 + 6p^3 + p^2 + p + 6p^2\sqrt{p} + 2p\sqrt{p} + 4p^3\sqrt{p+\sqrt{p}} + 4p^2\sqrt{p+\sqrt{p}} + 4p\sqrt{p^2+p\sqrt{p}}$;

f) $a^2 + a + \frac{1}{a^2} + 2a\sqrt{a} + \frac{2}{\sqrt{a}} + 2$

zI.11: a) $(2x+1)(2x-1)$; b) $(3+\sqrt{2}x)(3-\sqrt{2}x)$; c) $(\sqrt[3]{2}x-1)^3$; d) $(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$;
e) $(x+1)^2(x-1)$; f) $(x-2\sqrt[3]{3})(x^2+2\sqrt[3]{3}x+4\sqrt[3]{9})$; g) $(a+5b)(a^2-5ab+25b^2)$; h) $(a-b+c)(a-b-c)$;
i) $(x^2+\sqrt{2}xy+y^2)(x^2-\sqrt{2}xy+y^2)$;

zI.12: a) $12xy$; b) $a^4 - 784$; c) $6x^2 + 2$; d) $\frac{2}{(k+1)^2}$; e) $\frac{2x+2}{x+5}$; f) 1; g) $\frac{-24}{x(x-3)}$; h) $\frac{2p}{x^2-p^2}$;

i) $x+3$; j) $\frac{1-x^5}{(1-x)^2}$; k) $\frac{-1}{2\sqrt{x^2+1}+x}$; l) $\frac{x+3}{x^2-x+1}$; m) $(x-1)\text{Sign}(x+1)$; n) $|x-y|$; o) $\frac{2|x|}{\sqrt{x^2-1}}$;

zI.13: a) $(x-3)^2 - 8$; b) $3(x+\frac{3}{2})^2 - \frac{27}{4}$; c) $-(x+2)^2 + 14$; d) $(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$; e) $-(x-3)^2 + 9$;
f) $2(x-\frac{7}{4})^2 - \frac{57}{8}$; g) $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$, gdzie $\Delta = b^2 - 4ac$;

zI.14: a) $\frac{-1}{x+2} + \frac{2}{x+3}$; b) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x}$; c) $\frac{5}{x+2} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$; d) $\frac{2}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2}$; e) $\frac{1}{x+2}$;

f) $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x+1)^2}$; g) $\frac{2}{(x+2)^2} - \frac{3}{(x+2)^3}$; h) $\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+x+1}$; i) $\frac{x-5}{(x^2+1)^2}$;

zI.15: a) $t^2 - 1$; b) $\frac{1-u}{1+u}$; c) $-\frac{4t+1}{5t+2}$; d) y ; e) u ; f) $\frac{s\sqrt{s+1}+s+1}{s^2-4s-4}$;

zI.16: a) $\frac{t^2+1}{2|t|}$; b) $\frac{2t^2-3\sqrt{2}t+2}{4t-3\sqrt{2}}$;

c) $\frac{\sqrt[3]{1+|u^3-1|}}{(u^3-1)^2}$ czyli $\frac{u}{(u^3-1)^2}$ gdy $u \geq 1$ lub $\frac{\sqrt[3]{2-u^3}}{(u^3-1)^2}$ gdy $u < 1$; d) $|t|$; e) $|t+1|$;

zI.17: a) $2(x-\sqrt{3})(x-\sqrt{x^2-3})$; b) $\frac{\sqrt{2}\text{Sign}(x)}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}$; c) $\frac{1}{2(x^2+1)}$; d) $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$; e) $x^{1/6} -$

$3x^{-14/15} + x^{2/21}$; f) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt[6]{x}+x\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt[6]{x^5}}$;

zI.18: Wyrażenie to można zapisać w postaci $\sqrt{(2x+3)^2+2\sqrt{(x-6)^2}}$, czyli równoważnie $|2x+3|+2|x-6|$. Dla $-1 \leq x \leq 5$ argument pierwszej wartości bezwzględnej jest dodatni, a drugiej — ujemny, stąd równoważna postać tego wyrażenia to $2x+3+2(-x+6) = 15$.

zI.19: a) $x := t^{12}$, $\frac{t^{18} - t^3}{t^8 + 2t^6 + 1}$; b) $x + 2 := t^{30}$, $\frac{t^{15} - 3t^{12}}{(t^{30} - 2)t^{10} - 1}$; c) $x^2 - 2 := t^6$, $t^6 + 2 + t^2 - t^{-3}$; d) $\frac{x}{x+1} := t^4$, skąd $x = \frac{t^4}{1-t^4}$, $t + \frac{3t^4 - 2}{(1-t^2)(1+t^2)^2}$; e) $\frac{2x+3}{4x-5} := t^6$, $t^3 + t^{-2}$;
f) $\sqrt{x^2+1} - 2 := t^3$, $\frac{t^6 + 4t^3 + t + 3}{t^3 + 2}$;

zI.20: a) $(1+\sqrt{5})/4$, b) $(\sqrt{10}-\sqrt{6})/2$, c) $(2\sqrt{14}-1)/5$, d) $(\sqrt[3]{25}-2\sqrt[3]{5}+4)/13$, e) $(9+3\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{36})^2/63$,
f) $(\sqrt{10}+\sqrt{6})/2$, g) $(\sqrt{2}-\sqrt{6}+2)/4$, h) $4(3\sqrt{3}+\sqrt{5}+2\sqrt{15}+7)/11$, i)

zI.21: a) $(3-\sqrt{5})^2/2$, b) $(11-2\sqrt{15})/2$, c) $5-\sqrt{6}$, d) $3-\sqrt{3}$

zI.22: a) $|2-a|$, b) $x^2|x-1|$, c) $\frac{|a|}{a} = \begin{cases} 1 & a > 0 \\ -1 & a < 0 \end{cases}$, d) $\begin{cases} 2 & x \geq 3 \\ -2 & x \leq 1 \\ 2x-4 & 1 < x < 3 \end{cases}$, e) $\begin{cases} 2x-2 & x \geq 3 \\ -2x+2 & x \leq -1 \\ 4 & -1 < x < 3 \end{cases}$,
f) 1, g) $4x-6$, h) 2, i) $12-x$, j) $(x+1)(x-3)$

zI.23: a) 6, b) $3(20+5\sqrt{3}+8\sqrt{6}+6\sqrt{2})/13$, c) 0, d) 3, e) 100, f) -294, g) $4\sqrt{3}-5$, h) $5-4\sqrt{7}$,
i) $(2+\sqrt{2})/2$, j) $2+\sqrt{2}$, k) $4+\sqrt{3}$, l) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$, m) 2, n) $-\sqrt{7}-3$, o) $\sqrt{3}-2\sqrt{5}$

zI.25: a) 1, b) 9, c) $\sqrt[3]{10}-1$

zI.26: a) $x \in \{-6, 6\}$, b) $x \in \{-\pi, \pi\}$, c) $x \in \emptyset$, d) $x \in \{-11, 3\}$, e) $x \in \{-6, 2\}$, f) $x \in \{1, 7/5\}$,
g) $x \in \{-4, 8\}$, h) $x \in \{4/3\}$, i) $x \in \{-9/2, 13/4\}$, j) $x \in (-\infty, 3]$, k) $x \in [5, +\infty)$, l) $x \in [2, +\infty)$,
m) $x \in \{-1, 3\}$, n) $x \in \{1, 8\}$, o) $x \in \{0, 4\}$, p) $x \in \{1, 4\}$, q) $x \in \{1/2\}$

zI.27: a) $x \in \{0, 1\}$, b) $x \in \{-2, 1\}$, c) $x \in \{3, 6\}$, d) $x \in \{-1, 0, 2\}$, e) $x \in \{\sqrt{2}/2, (1+\sqrt{3})/2\}$

zI.28: a) $x \in [0, 6] \cup \{-12\}$, b) $x \in \{8/3, 10/3\}$, c) $x \in \emptyset$, d) $x \in \{-16, 16\}$, e) $x \in \{-5, -1, 1, 5\}$, f)
 $x \in \{-11, -3, -1, 7\}$, g) $x \in \{-8, -4, 6, 10\}$, h) $x \in [1, +\infty)$

zI.29: a) $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, b) $x \in [-2, 2]$, c) $x = 0$, d) $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$, e) $x \in (-2, -1) \cup (1, 2)$,
f) $x \in (0, 1) \cup (1, 2)$, g) $x \in (2, 3)$, h) $x \in (5/3, 3)$, i) $x \in (-\infty, 4/3)$, j) $x \in [-2, -1) \cup (3, 4]$,
k) $x \in [0, 3]$, l) $x \in (-1/2, 9/2)$, m) $x \in \mathbb{R}$, n) $x \in (-\infty, 1) \cup (8, +\infty)$, o) $x \in (-1/2, 11/4)$, p)
 $x \in (-\infty, -10) \cup (-6, 2) \cup (6, +\infty)$, q) $x \in (1, 5)$, r) $x \in (-\infty, -4) \cup (-2, 1) \cup (3, +\infty)$, s) $x \in [9/2, +\infty)$

zI.30: a) $x \in (-3, -2) \cup (2, 3)$, b) $x \in (1, 3)$, c) $x \in (1, 3)$, d) $x \in [-7, 3]$, e) $x \in (0, 2)$, f)
 $x \in (-\infty, -5) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$, g) $x \in (-11/9, 17)$

zI.33: $1,67 \cdot 10^{-27}$ kg

zI.34: a) 0,0007632, b) 940000

zI.35: $4,1 \cdot 10^{13}$ km = $4,1 \cdot 10^{16}$ m

zI.36: $7,37758 \cdot 10^{12}$ m

zI.37: błąd bezwzględny = 0,09 m², błąd względny = $9 \cdot 10^{-3}$

zI.38: błąd bezwzględny = 0,3 kg/dm³, błąd względny = 0,07

zI.39: 0,031

zI.40: $4 \cdot 10^{27}$

zI.41: $1,7 \cdot 10^{31}$

zI.42: $5,57 \cdot 10^{-5}$ m = 55,7 μm

zI.43: ilość oddechów = $5,88 \cdot 10^8$, ilość uderzeń serca = $2,57 \cdot 10^9$

zI.44: 10^{30}