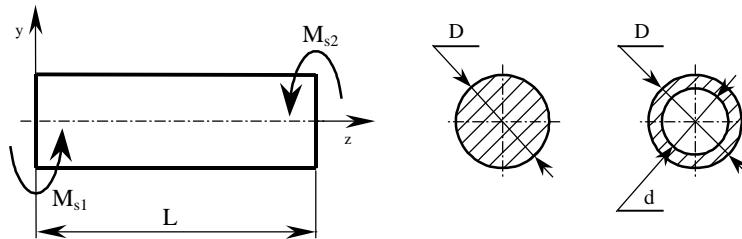


Zadanie 2

Pręt stalowy o stałym wymiarze na całej długości obciążony jest dwiema parami sił o momentach M_{s1} i M_{s2} rozmieszczonych w sposób przedstawiony na rysunku. Obliczenia należy przeprowadzić dla dwóch przyjętych przekroi kołowo symetrycznych: pełnego i pierścieniowego, wyznaczając wartość naprężeń stycznych τ_s , kąta skręcenia φ i masy m . Obliczenia należy przeprowadzić dla czterech przypadków:

- stałą wartością jednego z głównych wymiarów przekroju,
- stałą wartością maksymalnego kąta skręcenia,
- stałą wartością maksymalnych naprężeń skręcających,
- stałą masą.



Dane:

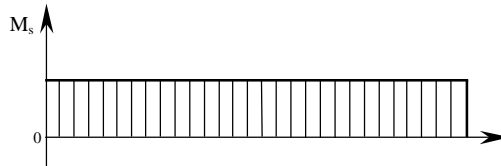
- $M_{s1} = 1000 \text{ Nm}$
- $M_{s2} = 1000 \text{ Nm}$
- $L = 1000 \text{ mm}$
- $D = 60 \text{ mm}$
- $d = 50 \text{ mm}$
- $G = 0.85 \cdot 10^5 \text{ MPa}$
- $\rho = 7.86 \text{ kg/dm}^3$

Szukane:

- $\tau_s = ?$
- $\varphi = ?$
- $m = ?$

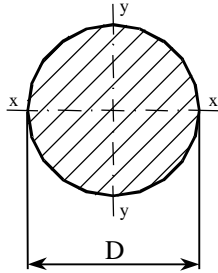
Rozwiązanie:

1. Moment skręcający



2. Obliczenia naprężeń skręcających τ_s , kąta skręcenia φ oraz masy m dla pręta posiadającego **stałą wartość jednego z głównych wymiarów przekroju**

a. Kołowym (pręt okrągły)



Przyjęto wymiary: $D = 60 \text{ mm}$
 Biegunowy moment bezwładności

$$I_o = \frac{\pi \cdot D^4}{32} = 1272345.0 \text{ mm}^4$$

Biegunowy wskaźnik wytrzymałości

$$W_o = \frac{\pi \cdot D^3}{16} = 42411.5 \text{ mm}^3$$

Pole powierzchni przekroju poprzecznego

$$S = \frac{\pi \cdot D^2}{4} = 2827.4 \text{ mm}^2$$

Kąt skręcenia

$$\varphi = \frac{M_{st} \cdot L}{G \cdot I_o} = \frac{1000 \cdot 10^3 \cdot 1000}{85000 \cdot 1272345.0} = 0.009 \text{ rad} \cdot \frac{180}{\pi} = 0.516^\circ$$

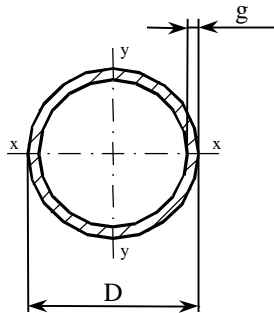
Maksymalna wartość naprężeń skręcających

$$\tau_s = \frac{M_{st}}{W_o} = \frac{1000 \cdot 10^3}{42411.5} = 23.6 \text{ MPa}$$

Masa belki

$$m = V \cdot \rho = S \cdot L \cdot \rho = (2827.4 \cdot 1000 \cdot 0,000001) \cdot 7.86 = 22.2 \text{ kg}$$

b. Pierścieniowym (kształtownik zamknięty okrągły)



Przyjęto wymiary: $D = 60 \text{ mm}$, $g = 5 \text{ mm}$, $d = D - 2g$
 Biegunowy moment bezwładności

$$I_o = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{32} = 658752.7 \text{ mm}^4$$

Biegunowy wskaźnik wytrzymałości

$$W_o = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{16 \cdot D} = 21958.4 \text{ mm}^3$$

Pole powierzchni przekroju poprzecznego

$$S = \frac{\pi \cdot (D^2 - d^2)}{4} = 863.9 \text{ mm}^2$$

Kąt skręcenia

$$\varphi = \frac{M_{st} \cdot L}{G \cdot I_o} = \frac{1000 \cdot 10^3 \cdot 1000}{85000 \cdot 658752.7} = 0.018 \text{ rad} \cdot \frac{180}{\pi} = 1.031^\circ$$

Maksymalna wartość naprężeń skręcających

$$\tau_s = \frac{M_{sl}}{W_o} = \frac{1000 \cdot 10^3}{21958.4} = 45.5 \text{ MPa}$$

Masa belki

$$m = V \cdot \rho = S \cdot L \cdot \rho = (863.9 \cdot 1000 \cdot 0,000001) \cdot 7.86 = 6.8 \text{ kg}$$

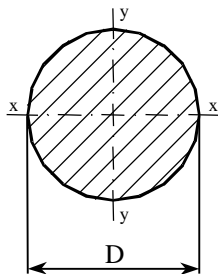
3. Obliczenia wymiarów przekroju poprzecznego, naprężeń skręcających τ_s oraz masy m dla pręta **charakteryzującego się określoną wartością kąta skręcenia φ na długości L**

W obliczeniach przyjęto, iż pręt będzie charakteryzowała stała wartość kąta skręcenia $\varphi = 0.01$ rad. Po przekształceniu wzoru na kąt skręcenia określono wartość biegunowego momentu bezwładności I_o wymaganego dla analizowanych przekroi

$$I_o = \frac{M_{sl} \cdot L}{G \cdot \varphi} = \frac{1000 \cdot 10^3 \cdot 1000}{85000 \cdot 0.01} = 1176470.6 \text{ mm}^4$$

Wartość biegunowego momentu bezwładności posłuży do wyznaczenia wymiarów belki oraz wartości naprężeń skręcających i masy.

a. Kołowym (pręt okrągły)



Wymiary przekroju poprzecznego pręta obliczamy ze wzoru na biegunowy moment bezwładności

$$D = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot I_o}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1176470.6}{\pi}} = 58.8 \text{ mm}$$

Biegunowy wskaźnik wytrzymałości

$$W_o = \frac{\pi \cdot D^3}{16} = 39991.3 \text{ mm}^3$$

Pole powierzchni przekroju poprzecznego

$$S = \frac{\pi \cdot D^2}{4} = 2718.8 \text{ mm}^2$$

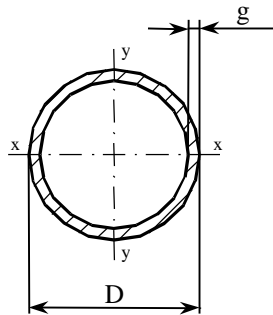
Maksymalna wartość naprężeń skręcających

$$\tau_s = \frac{M_s}{W_o} = \frac{1000 \cdot 10^3}{39991.3} = 25.0 \text{ MPa}$$

Masa belki

$$m = V \cdot \rho = S \cdot L \cdot \rho = (2718.8 \cdot 1000 \cdot 0,000001) \cdot 7.86 = 21.4 \text{ kg}$$

b. Pierścieniowym (kształtownik zamknięty okrągły)



Przyjęto wymiary: $g = \frac{2}{25} \cdot D$, $d = D - 2g = \frac{21}{25} \cdot D$

Średnicę D przekroju poprzecznego pręta obliczamy ze wzoru na biegunowy moment bezwładności, który po podstawieniu i przekształceniu ma postać

$$D = \sqrt[4]{\frac{781250 \cdot I_x}{12259 \cdot \pi}} = \sqrt[4]{\frac{781250 \cdot 1176470.6}{12259 \cdot \pi}} = 69.9 \text{ mm}$$

$$d = \frac{21}{25} \cdot D = \frac{21}{25} \cdot 69.9 = 58.7 \text{ mm}$$

Biegunowy wskaźnik wytrzymałości

$$W_o = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D} = 33664.3 \text{ mm}^3$$

Pole powierzchni przekroju poprzecznego

$$S = \frac{\pi \cdot (D^2 - d^2)}{4} = 1129.6 \text{ mm}^2$$

Maksymalna wartość naprężeń skręcających

$$\tau_s = \frac{M_{st}}{W_o} = \frac{1000 \cdot 10^3}{1129.6} = 29.7 \text{ MPa}$$

Masa belki

$$m = V \cdot \rho = S \cdot L \cdot \rho = (1129.6 \cdot 1000 \cdot 0.000001) \cdot 7.86 = 8.9 \text{ kg}$$

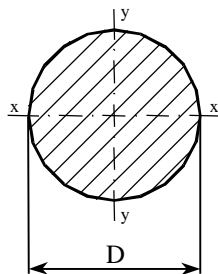
4. Obliczenia kąta skręcenia φ oraz masy m dla pręta posiadającego **stałą wartość maksymalnych naprężeń skręcających** τ_s

W obliczeniach przyjęto, iż pręt będzie charakteryzowała stała wartość maksymalnych naprężeń skręcających $\tau_s = 60 \text{ MPa}$. Na tej podstawie określono wartość biegunowego wskaźnika wytrzymałości W_o , jakim powinien charakteryzować przekrój

$$W_o = \frac{M_{st}}{\tau_s} = \frac{1000 \cdot 10^3}{60} = 16666.67 \text{ mm}^3$$

Wartość biegunowego wskaźnika wytrzymałości posłuży do wyznaczenia wymiarów pręta oraz wartości kąta ugięcia i masy.

a. Kołowym (pręt okrągły)



Wymiary przekroju poprzecznego belki obliczamy ze wzoru na biegunowy wskaźnik wytrzymałości

$$D = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot W_o}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 16666.67}{\pi}} = 43.9 \text{ mm}$$

Biegunowy moment bezwładności

$$I_o = \frac{\pi \cdot D^4}{32} = 366233.8 \text{ mm}^4$$

Pole powierzchni przekroju poprzecznego

$$S = \frac{\pi \cdot D^2}{4} = 1516.9 \text{ mm}^2$$

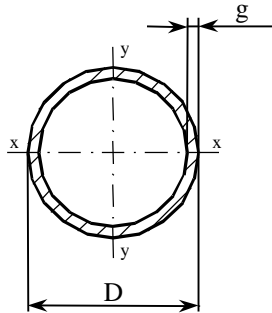
Kąt skręcenia

$$\varphi = \frac{M_{s1} \cdot L}{G \cdot I_o} = \frac{1000 \cdot 10^3 \cdot 1000}{85000 \cdot 366233.8} = 0.032 \text{ rad} \cdot \frac{180}{\pi} = 1.841^\circ$$

Masa belki

$$m = V \cdot \rho = S \cdot L \cdot \rho = (1516.9 \cdot 1000 \cdot 0.000001) \cdot 7.86 = 11.9 \text{ kg}$$

b. Pierścieniowym (kształtownik zamknięty okrągły)



Przyjęto wymiary: $g = \frac{2}{25} \cdot D$, $d = D - 2g = \frac{21}{25} \cdot D$

Średnicę D przekroju poprzecznego pręta obliczamy ze wzoru na biegunowy wskaźnik wytrzymałości, który po podstawieniu i przekształceniu ma postać

$$D = \sqrt[3]{\frac{390625 \cdot W_o}{12259 \cdot \pi}} = \sqrt[3]{\frac{390625 \cdot 16666.67}{12259 \cdot \pi}} = 55.3 \text{ mm}$$

$$d = \frac{21}{25} \cdot D = \frac{21}{25} \cdot 55.3 = 46.4 \text{ mm}$$

Biegunowy moment bezwładności

$$I_o = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{32} = 460772.7 \text{ mm}^4$$

Pole powierzchni przekroju poprzecznego

$$S = \frac{\pi \cdot (D^2 - d^2)}{4} = 706.9 \text{ mm}^2$$

Kąt skręcenia

$$\varphi = \frac{M_{s1} \cdot L}{G \cdot I_o} = \frac{1000 \cdot 10^3 \cdot 1000}{85000 \cdot 460772.7} = 0.026 \text{ rad} \cdot \frac{180}{\pi} = 1.463^\circ$$

Masa belki

$$m = V \cdot \rho = S \cdot L \cdot \rho = (706.9 \cdot 1000 \cdot 0.000001) \cdot 7.86 = 5.6 \text{ kg}$$

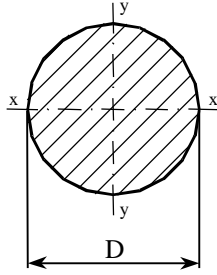
6. Obliczenia kąta skręcenia φ oraz naprężeń skręcających τ_s dla pręta posiadającego **stałą masę m**

W obliczeniach przyjęto, iż pręt będzie charakteryzowała stała wartość masy $m = 12 \text{ kg}$. Na tej podstawie można określić wartość pola powierzchni przekroju poprzecznego S ze wzoru

$$S = \frac{m}{L \cdot \rho} = \frac{12}{1000 \cdot 7.86 \cdot 0.000001} = 1526.7 \text{ mm}^2$$

Wartość pola powierzchni przekroju poprzecznego posłuży do wyznaczenia wymiarów pręta oraz wartości naprężeń skręcających i kąta skręcenia.

a. Kołowym (pręt okrągły)



Wymiary przekroju poprzecznego pręta obliczamy ze wzoru na pole przekroju

$$D = \sqrt{\frac{4 \cdot S}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1526.7}{\pi}} = 44.1 \text{ mm}$$

Biegunowy moment bezwładności

$$I_o = \frac{\pi \cdot D^4}{32} = 370968.9 \text{ mm}^4$$

Biegunowy wskaźnik wytrzymałości

$$W_o = \frac{\pi \cdot D^3}{16} = 16828.0 \text{ mm}^3$$

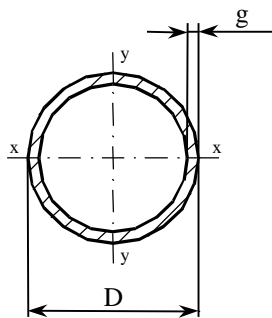
Kąt skręcenia

$$\varphi = \frac{M_{s1} \cdot L}{G \cdot I_o} = \frac{1000 \cdot 10^3 \cdot 1000}{85000 \cdot 370968.9} = 0.032 \text{ rad} \cdot \frac{180}{\pi} = 1.817^\circ$$

Maksymalna wartość naprężeń skręcających

$$\tau_s = \frac{M_s}{W_o} = \frac{1000 \cdot 10^3}{16828.0} = 59.4 \text{ MPa}$$

f. Pierścieniowym (kształtownik zamknięty okrągły)



Przyjęto wymiary: $g = \frac{2}{25} \cdot D$, $d = D - 2g = \frac{21}{25} \cdot D$

Średnicę D przekroju poprzecznego pręta obliczamy ze wzoru na pole powierzchni, który po podstawieniu i przekształceniu ma postać

$$D = \sqrt{\frac{625 \cdot S}{46 \cdot \pi}} = \sqrt{\frac{625 \cdot 1526.7}{46 \cdot \pi}} = 81.3 \text{ mm}$$

$$d = \frac{21}{25} \cdot D = \frac{21}{25} \cdot 81.3 = 68.3 \text{ mm}$$

Biegunowy moment bezwładności

$$I_o = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{32} = 2149200.4 \text{ mm}^4$$

Biegunowy wskaźnik wytrzymałości

$$W_o = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{16 \cdot D} = 52898.3 \text{ mm}^3$$

Kąt skręcenia

$$\varphi = \frac{M_{s1} \cdot L}{G \cdot I_o} = \frac{1000 \cdot 10^3 \cdot 1000}{85000 \cdot 2149200.4} = 0.005 \text{ rad} \cdot \frac{180}{\pi} = 0.314^\circ$$

Maksymalna wartość naprężeń skręcających

$$\tau_s = \frac{M_s}{W_o} = \frac{1000 \cdot 10^3}{52898.3} = 18.9 \text{ MPa}$$