

Zad. Czy wektory $[1,1,1]$, $[0,1,1]$ i $[1,0,0]$ są liniowo niezależne?

Wektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ są liniowo niezależne, jeśli żaden z nich nie jest kombinacją liniową pozostałych, to znaczy nie istnieje taki zestaw liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$, że

$$\mathbf{a}_i = \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{a}_j \quad \text{gdzie } j \neq i.$$

Dla podanych trzech wektorów widać, że *nie* są one liniowo niezależne: pierwszy wektor jest sumą drugiego i trzeciego.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Wektory są liniowo niezależne, gdy wyznacznik macierzy z nich utworzonej jest różny od zera. Sprawdźmy, że

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Przedstaw wektor $\mathbf{w}=[2,2,3]$ w postaci kombinacji liniowej wektorów $\mathbf{a}=[1,0,1]$, $\mathbf{b}=[0,1,1]$ i $\mathbf{c}=[1,0,0]$

Sprawdźmy, czy podane trzy wektory są liniowo niezależne

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad \text{czyli te wektory są liniowo niezależne}$$

Szukamy liczb a, b, c takich, że $a\mathbf{a} + b\mathbf{b} + c\mathbf{c} = \mathbf{w}$

$$\text{czyli} \quad a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Jest to układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi, a, b, c .

Możemy go zapisać jako

$$a + c = 2$$

$$b = 2$$

(*)

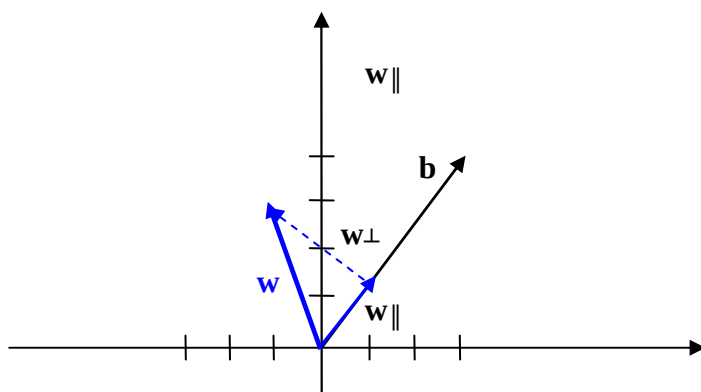
$$a + b = 3, \quad \text{skąd otrzymujemy } a = 1, b = 2, c = 1.$$

Sprawdzamy:

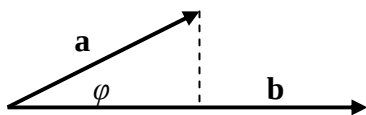
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Za pomocą kombinacji liniowej podanych tu wektorów $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ można przedstawić dowolny wektor w przestrzeni trójwymiarowej, mogą więc one stanowić *bazę* w takiej przestrzeni.

Zad. Dla wektora $\mathbf{w} = [-1, 3]$ znaleźć składową równoległą i prostopadłą do wektora $\mathbf{b} = [3, 4]$



Długość składowej równoległej $|\mathbf{w}_{\parallel}|$ znajdziemy z definicji iloczynu skalarnego. Przypominamy



$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \varphi$$

Zauważmy, że $|\mathbf{a}| \cos \varphi$ to rzut wektora $\mathbf{a}$ na wektor $\mathbf{b}$ czyli

$$|\mathbf{a}| \cos \varphi = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) / |\mathbf{b}| \quad (*)$$

Obliczmy dla podanych wektorów długość wektora $\mathbf{b}$

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Iloczyn skalarny wektora $\mathbf{w}$ $[-1, 3]$
i wektora $\mathbf{b}$ $[3, 4]$

wynosi $-3 + 12 = 9$, czyli długość rzutu wektora $\mathbf{w}$ na wektor $\mathbf{b}$ wynosi ze wzoru (*) $|\mathbf{w}_{\parallel}| = 9/5$.

Wektor $\mathbf{w}_{\parallel}$ znajdziemy mnożąc tę długość przez *wersor* (czyli wektor o długości 1) równoległy do wektora $\mathbf{b}$

$$\mathbf{w}_{\parallel} = |\mathbf{w}_{\parallel}| \cdot \mathbf{b} / |\mathbf{b}| = 9/25 \cdot [3, 4] = [27/25, 36/25] \quad (\text{porównaj na rysunku})$$

Ogólnie, wzór na wektor $\mathbf{a}_1$, będący składową wektora $\mathbf{a}$ równoległą do wektora $\mathbf{b}$ wynosi

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} \mathbf{b}$$

Składową prostopadłą do wektora $\mathbf{b}$ znajdziemy jako różnicę między wektorem $\mathbf{w}$ i $\mathbf{w}_{\parallel}$
 $\mathbf{w}_{\perp} = \mathbf{w} - \mathbf{w}_{\parallel} = [-1, 3] - [27/25, 36/25] = [-52/25, 39/25]$ (porównaj na rysunku)

Sprawdźmy, jeszcze czy wektory $\mathbf{w}_{\perp}$ i $\mathbf{w}_{\parallel}$ są prostopadłe, czyli $\mathbf{w}_{\perp} \cdot \mathbf{w}_{\parallel} = 0$

$$-\frac{52}{25} \cdot \frac{27}{25} + \frac{36}{25} \cdot \frac{39}{25} = 0$$

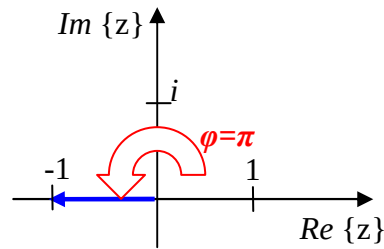
Zad. Oblicz $\sqrt[3]{-1}$

Rozwiązanie:

W zbiorze liczb rzeczywistych istnieje jedno rozwiązanie $\sqrt[3]{-1} = -1$ gdyż $(-1)^3 = -1$.
Aby znaleźć rozwiązanie w zbiorze liczb zespolonych zapiszmy liczbę -1 w postaci Eulera.

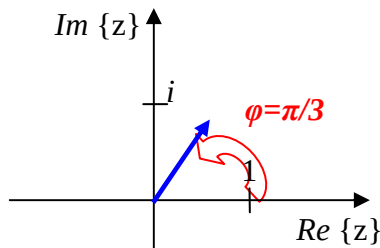
$$z = |z|e^{i\varphi}$$

$$z = -1 = 1e^{i\pi}$$



Pierwiastek trzeciego stopnia obliczamy korzystając z tej postaci

$$a) \sqrt[3]{-1} = (-1)^{1/3} = (e^{i\pi})^{1/3} = e^{i\pi/3} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$



Kąt $\varphi = \pi/3 = 60^\circ$, jak na powyższym rysunku.

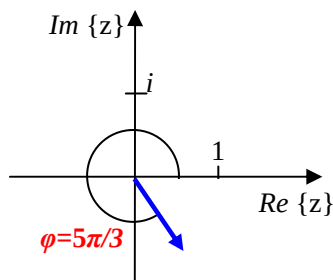
Ogólnie, powinny istnieć *trzy* pierwiastki zespolone trzeciego stopnia. Znajdziemy pozostałe dwa, korzystając z okresowości funkcji trygonometrycznych (i funkcji $e^{i\varphi}$).

$$b) \sqrt[3]{-1} = (-1)^{1/3} = (e^{i(\pi+2\pi)})^{1/3} = e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1 + 0i = -1$$

jest to już znaleziony pierwiastek rzeczywisty

c)

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{-1} &= (-1)^{1/3} = (e^{i(\pi+4\pi)})^{1/3} = e^{i5\pi/3} = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



Sprawdzenie c)

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 &= \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4} - 2i\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \\ &= \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}\right) = -1 \end{aligned}$$