

Metoda macierzowych ułamków łańcuchowych w badaniu ewolucji stochastycznych układów dynamicznych

projekt pracy magisterskiej

Jan Iwaniszewski

Instytut Fizyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń

Abstrakt

W wielu problemach fizycznych istotną rolę odgrywają fluktuacje wynikające ze statystycznej natury problemu (np. ruch dużej cząstki w płynie), losowych zaburzeń zewnętrznych (np. losowe zmiany parametrów sterujących pracą lasera), czy też z natury kwantowej zagadnienia (np. emisja spontaniczna w atomach). Z uwagi na zależność od czasu fluktuacji oraz ich statystyczny charakter opis zagadnień tego rodzaju jest dużo bardziej złożony niż układów deterministycznych, czasem wręcz niemożliwy. Istotnym narzędziem dla badania stochastycznych układów dynamicznych są więc różnego rodzaju symulacje i obliczenia numeryczne. Od ponad trzydziestu lat bardzo owocną metodą, stosowaną zwłaszcza w badaniu ewolucji i innych zależności czasowych, jest metoda macierzowych ułamków łańcuchowych. Korzysta ona z przedstawienia równań ewolucji badanego układu w postaci rekurencyjnych równań algebraicznych, których rozwiązanie sprowadza się do prostego algorytmu wyrażonego przez macierzowe ułamki łańcuchowe.

Plan wykładu

- Dynamika stochastyczna:
 - podstawowe równania,
 - stan stacjonarny – bistabilność.
- Numeryczne badanie ewolucji:
 - rozwinięcie w zadanej bazie,
 - metoda macierzowych ułamków łańcuchowych.
- Tematyka pracy:
 - ewolucja ze stanu niestabilnego,
 - przejściowa wielomodalność,
 - rozpad stanu metastabilnego.
- Praca magisterska:
 - cel pracy i wymagane umiejętności,
 - plan pracy.

Cząstka Browna

punkt materialny o masie m i współrzędnej x
ruch w polu siły $F_{det}(x, t)$

$$m\ddot{x} = F_{det}(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x}U(x, t) \equiv -U'(x, t)$$

Cząstka Browna

punkt materialny o masie m i współrzędnej x
ruch w polu siły $F_{det}(x, t)$

$$m\ddot{x} = F_{det}(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x}U(x, t) \equiv -U'(x, t)$$

oddziaływanie z otoczeniem

$$m\ddot{x} = F_{det}(x, t) + F_{dys}(x, t) + F_{flukt}(x, t)$$

Cząstka Browna

punkt materialny o masie m i współrzędnej x
ruch w polu siły $F_{det}(x, t)$

$$m\ddot{x} = F_{det}(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x}U(x, t) \equiv -U'(x, t)$$

oddziaływanie z otoczeniem

$$m\ddot{x} = F_{det}(x, t) + F_{dys}(x, t) + F_{flukt}(x, t)$$

siła deterministyczna
 $F_{det}(x, t) = -U'(x, t)$

Cząstka Browna

punkt materialny o masie m i współrzędnej x
ruch w polu siły $F_{det}(x, t)$

$$m\ddot{x} = F_{det}(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x}U(x, t) \equiv -U'(x, t)$$

oddziaływanie z otoczeniem

$$m\ddot{x} = F_{det}(x, t) + F_{dys}(x, t) + F_{flukt}(x, t)$$

siła deterministyczna
 $F_{det}(x, t) = -U'(x, t)$

siła tłumiąca (dysypatywna)
 $F_{dys}(x, t) = -\Gamma\dot{x}$ ($\Gamma \equiv \gamma m$)

Cząstka Browna

punkt materialny o masie m i współrzędnej x
ruch w polu siły $F_{det}(x, t)$

$$m\ddot{x} = F_{det}(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x}U(x, t) \equiv -U'(x, t)$$

oddziaływanie z otoczeniem

$$m\ddot{x} = F_{det}(x, t) + F_{dys}(x, t) + F_{flukt}(x, t)$$

siła deterministyczna
 $F_{det}(x, t) = -U'(x, t)$

siła tłumiąca (dysypatywna)
 $F_{dys}(x, t) = -\Gamma\dot{x}$ ($\Gamma \equiv \gamma m$)

siła losowa (stochastyczna) - fluktuacje
 $F_{flukt}(x, t) = F_{flukt}(t)$

Równanie Langevina

siła stochastyczna – założenia upraszczające:

- nie zależy od położenia $F_{flukt}(x, t) \equiv m\xi(t)$
- rozkład Gaussowski wartości, średnia znika $\langle \xi(t) \rangle = 0$
- nieskończenie szybkie zmiany jej wartości
- brak korelacji wartości w różnych chwilach czasu
 $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2kT\gamma/m \delta(t - t')$, intensywność szumu $\sim T$

Równanie Langevina

siła stochastyczna – założenia upraszczające:

- nie zależy od położenia $F_{flukt}(x, t) \equiv m\xi(t)$
- rozkład Gaussowski wartości, średnia znika $\langle \xi(t) \rangle = 0$
- nieskończenie szybkie zmiany jej wartości
- brak korelacji wartości w różnych chwilach czasu
 $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2kT\gamma/m \delta(t - t')$, intensywność szumu $\sim T$

$\xi(t)$ – biały szum Gaussa

Równanie Langevina

siła stochastyczna – założenia upraszczające:

- nie zależy od położenia $F_{flukt}(x, t) \equiv m\xi(t)$
- rozkład Gaussowski wartości, średnia znika $\langle \xi(t) \rangle = 0$
- nieskończenie szybkie zmiany jej wartości
- brak korelacji wartości w różnych chwilach czasu
 $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2kT\gamma/m \delta(t - t')$, intensywność szumu $\sim T$

$\xi(t)$ – biały szum Gaussa

$$m\ddot{x} = -U'(x, t) - \gamma m\dot{x} + m\xi(t)$$

równanie Langevina

Równanie Langevina

siła stochastyczna – założenia upraszczające:

- nie zależy od położenia $F_{flukt}(x, t) \equiv m\xi(t)$
- rozkład Gaussowski wartości, średnia znika $\langle \xi(t) \rangle = 0$
- nieskończenie szybkie zmiany jej wartości
- brak korelacji wartości w różnych chwilach czasu
 $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2kT\gamma/m \delta(t - t')$, intensywność szumu $\sim T$

$\xi(t)$ – biały szum Gaussa

$$m\ddot{x} = -U'(x, t) - \gamma m\dot{x} + m\xi(t)$$

równanie Langevina

$$\dot{x} = v$$

$$\dot{v} = -\gamma v - U'(x, t)/m + \xi(t)$$

$$\gamma \gg 1 \text{ (ruch przetłumiony)} \Rightarrow \dot{v} = 0$$

$$\dot{x} = -U'(x, t)/\gamma m + \xi(t)/\gamma$$

Równanie Langevina

siła stochastyczna – założenia upraszczające:

- nie zależy od położenia $F_{flukt}(x, t) \equiv m\xi(t)$
- rozkład Gaussowski wartości, średnia znika $\langle \xi(t) \rangle = 0$
- nieskończenie szybkie zmiany jej wartości
- brak korelacji wartości w różnych chwilach czasu
 $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2kT\gamma/m \delta(t - t')$, intensywność szumu $\sim T$

$\xi(t)$ – biały szum Gaussa

$$m\ddot{x} = -U'(x, t) - \gamma m\dot{x} + m\xi(t)$$

równanie Langevina

$$\dot{x} = v$$

$$\dot{v} = -\gamma v - U'(x, t)/m + \xi(t)$$

$$\gamma \gg 1 \text{ (ruch przetłumiony)} \Rightarrow \dot{v} = 0$$

$$\dot{x} = -U'(x, t)/\gamma m + \xi(t)/\gamma$$

przeskalowanie czasu

$$t = \gamma m \tilde{t}$$

$$\dot{x} = -\tilde{U}'(x, \tilde{t}) + \tilde{\xi}(\tilde{t})$$

Równanie Fokkera-Plancka

x, v – zmienne losowe \implies opis w języku teorii prawdopodobieństwa

$$\text{Prob} \{x \leq x(t) < x + dx, v \leq v(t) < v + dv\} = P(x, v, t) dx dv$$

rozkład prawdopodobieństwa $P(x, v, t)$

Równanie Fokkera-Plancka

x, v – zmienne losowe \implies opis w języku teorii prawdopodobieństwa

$$\text{Prob} \{x \leq x(t) < x + dx, v \leq v(t) < v + dv\} = P(x, v, t) dx dv$$

rozkład prawdopodobieństwa $P(x, v, t)$

ewolucja $P(x, v, t)$ – równanie Fokkera-Plancka

Równanie Fokkera-Plancka

x, v – zmienne losowe \implies opis w języku teorii prawdopodobieństwa

$$\text{Prob} \{x \leq x(t) < x + dx, v \leq v(t) < v + dv\} = P(x, v, t) dx dv$$

rozkład prawdopodobieństwa $P(x, v, t)$

ewolucja $P(x, v, t)$ – równanie Fokkera-Plancka

$$\frac{\partial P(x, v, t)}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [-v] + \frac{\partial}{\partial v} [\gamma v + U'(x, t)/m] + \frac{\gamma kT}{m} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right\} P(x, v, t)$$

równanie Kramersa $\left(\text{r. Langevina } m\ddot{x} = -U'(x, t) - \gamma m\dot{x} + m\xi(t) \right)$

Równanie Fokkera-Plancka

x, v – zmienne losowe \implies opis w języku teorii prawdopodobieństwa

$$\text{Prob} \{x \leq x(t) < x + dx, v \leq v(t) < v + dv\} = P(x, v, t) dx dv$$

rozkład prawdopodobieństwa $P(x, v, t)$

ewolucja $P(x, v, t)$ – równanie Fokkera-Plancka

$$\frac{\partial P(x, v, t)}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [-v] + \frac{\partial}{\partial v} [\gamma v + U'(x, t)/m] + \frac{\gamma kT}{m} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right\} P(x, v, t)$$

równanie Kramersa $\left(\text{r. Langevina } m\ddot{x} = -U'(x, t) - \gamma m\dot{x} + m\xi(t) \right)$

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{\gamma m} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} U'(x, t) + kT \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} P(x, t), \quad t = \gamma m \tilde{t}$$

równanie Smoluchowskiego $\left(\text{r. Langevina } \dot{x} = -\tilde{U}'(x, \tilde{t}) + \tilde{\xi}(\tilde{t}) \right)$
dalej pominięto "tyldę"

Stan stacjonarny

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} U'(x) + q \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} P(x, t) \equiv L(x) P(x, t)$$

Stan stacjonarny

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} U'(x) + q \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} P(x, t) \equiv L(x) P(x, t)$$

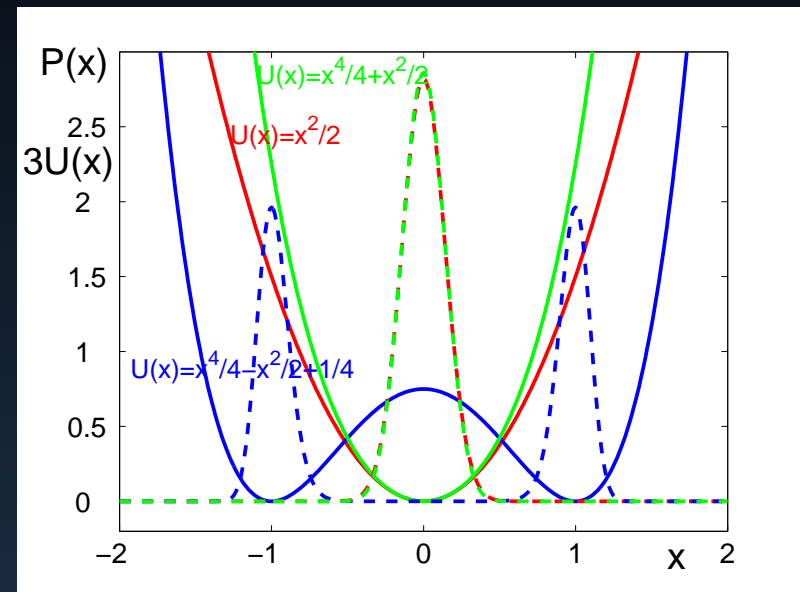
potencjał $U(x)$ ogranicza ruch cząstki

np: $U(x) = \frac{1}{2}x^2$, $U(x) = \frac{1}{4}x^4 \pm \frac{1}{2}x^2$

rozwiązanie stacjonarne

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = 0$$

$$P_{st}(x) = N \exp(-U(x)/q)$$



Stan stacjonarny

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} U'(x) + q \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} P(x, t) \equiv L(x) P(x, t)$$

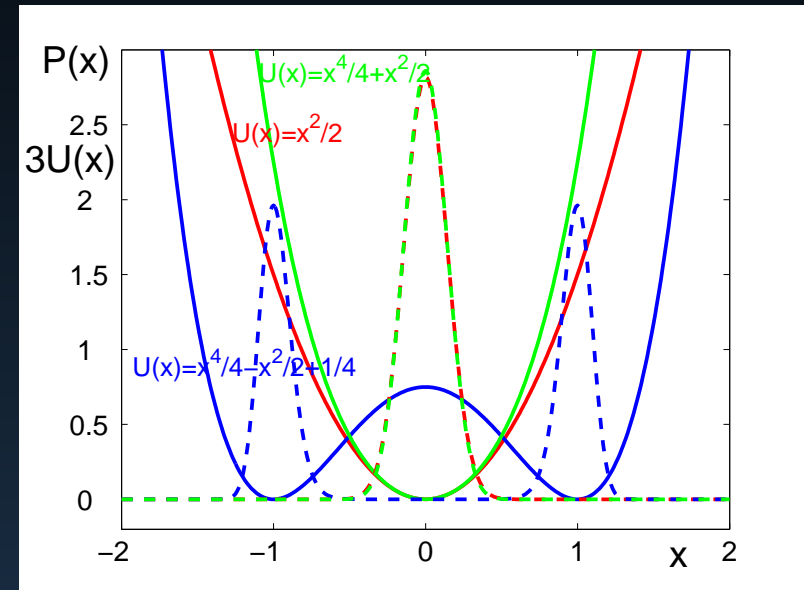
potencjał $U(x)$ ogranicza ruch cząstki

np: $U(x) = \frac{1}{2}x^2$, $U(x) = \frac{1}{4}x^4 \pm \frac{1}{2}x^2$

rozwiązanie stacjonarne

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = 0$$

$$P_{st}(x) = N \exp(-U(x)/q)$$



monostabilność \iff bistabilność

Ewolucja – metody rozwiązań

rozwiązanie ścisłe – oscylator harmoniczny $U(x) = x^2/2$

rozwiązania przybliżone – algorytmy numeryczne

Ewolucja – metody rozwiązań

rozwiązanie ścisłe – oscylator harmoniczny $U(x) = x^2/2$

rozwiązania przybliżone – algorytmy numeryczne
równanie Schrödingera

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = H(x) \psi(x, t)$$

$$\psi(x, t) = e^{-i/\hbar Et} \varphi(x)$$

↓

$$H(x) \varphi(x) = E \varphi(x)$$

Ewolucja – metody rozwiązań

rozwiązanie ścisłe – oscylator harmoniczny $U(x) = x^2/2$

rozwiązania przybliżone – algorytmy numeryczne

równanie Schrödingera

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = H(x) \psi(x, t)$$

$$\psi(x, t) = e^{-i/\hbar Et} \varphi(x)$$

↓

$$H(x) \varphi(x) = E \varphi(x)$$

równanie Fokkera–Plancka

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = L(x) P(x, t)$$

$$P(x, t) = e^{-\lambda t} \varphi(x)$$

↓

$$L(x) \varphi(x) = -\lambda \varphi(x)$$

Ewolucja – metody rozwiązań

rozwiązanie ścisłe – oscylator harmoniczny $U(x) = x^2/2$

rozwiązania przybliżone – algorytmy numeryczne

równanie Schrödingera

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = H(x) \psi(x, t)$$

$$\psi(x, t) = e^{-i/\hbar Et} \varphi(x)$$



$$H(x) \varphi(x) = E \varphi(x)$$

równanie Fokkera–Plancka

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = L(x) P(x, t)$$

$$P(x, t) = e^{-\lambda t} \varphi(x)$$



$$L(x) \varphi(x) = -\lambda \varphi(x)$$

1. zagadnienie własne

Ewolucja – metody rozwiązań

rozwiązanie ścisłe – oscylator harmoniczny $U(x) = x^2/2$

rozwiązania przybliżone – algorytmy numeryczne

równanie Schrödingera

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = H(x) \psi(x, t)$$

$$\psi(x, t) = e^{-i/\hbar Et} \varphi(x)$$

↓

$$H(x) \varphi(x) = E \varphi(x)$$

równanie Fokkera–Plancka

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = L(x) P(x, t)$$

$$P(x, t) = e^{-\lambda t} \varphi(x)$$

↓

$$L(x) \varphi(x) = -\lambda \varphi(x)$$



1. zagadnienie własne

2. dyskretyzacja zmiennych

Ewolucja – metody rozwiązań

rozwiązanie ścisłe – oscylator harmoniczny $U(x) = x^2/2$

rozwiązania przybliżone – algorytmy numeryczne

równanie Schrödingera

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = H(x) \psi(x, t)$$

$$\psi(x, t) = e^{-i/\hbar Et} \varphi(x)$$

$$\Downarrow$$
$$H(x) \varphi(x) = E \varphi(x)$$

równanie Fokkera–Plancka

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = L(x) P(x, t)$$

$$P(x, t) = e^{-\lambda t} \varphi(x)$$

$$\Downarrow$$
$$L(x) \varphi(x) = -\lambda \varphi(x)$$

1. zagadnienie własne

2. dyskretyzacja zmiennych

3. rozkład w bazie funkcji ortogonalnych

$$P(x, t) = \sum_n c_n(t) \varphi_n(x)$$

Rozwinięcie w bazie funkcji Hermite'a

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} U'(x) + q \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} P(x, t)$$

$$U(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \dots$$

$$P(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}} H_n(\alpha x), \quad c_n(t) = ? \quad (\alpha\text{- skalowanie})$$

Rozwinięcie w bazie funkcji Hermite'a

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} U'(x) + q \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} P(x, t)$$

$$U(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \dots$$

$$P(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}} H_n(\alpha x), \quad c_n(t) = ? \quad (\alpha\text{- skalowanie})$$

problem na całej
osi rzeczywistej

wielomiany Hermita

$$H_n''(x) - 2x H_n'(x) + 2n H_n(x) = 0$$

$$H_n'(x) = 2n H_{n-1}(x)$$

$$x H_n(x) = \frac{1}{2} H_{n+1}(x) + n H_{n-1}(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} = \delta_{m,n} \sqrt{\pi} 2^n n!$$

Rozwinięcie w bazie funkcji Hermite'a

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} U'(x) + q \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} P(x, t) \quad / \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx H_m(\alpha x) e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}$$

$$U(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \dots$$

$$P(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}} H_n(\alpha x), \quad c_n(t) = ? \quad (\alpha\text{- skalowanie})$$

problem na całej
osi rzeczywistej

wielomiany Hermita

$$H_n''(x) - 2x H_n'(x) + 2n H_n(x) = 0$$

$$H_n'(x) = 2n H_{n-1}(x)$$

$$x H_n(x) = \frac{1}{2} H_{n+1}(x) + n H_{n-1}(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} = \delta_{m,n} \sqrt{\pi} 2^n n!$$

Rozwinięcie w bazie funkcji Hermite'a

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} U'(x) + q \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} P(x, t) \quad \Bigg/ \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx H_m(\alpha x) e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}$$

$$U(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \dots$$

$$P(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}} H_n(\alpha x), \quad c_n(t) = ? \quad (\alpha\text{- skalowanie})$$

problem na całej
osi rzeczywistej

wielomiany Hermita

$$H_n''(x) - 2x H_n'(x) + 2n H_n(x) = 0$$

$$H_n'(x) = 2n H_{n-1}(x)$$

$$x H_n(x) = \frac{1}{2} H_{n+1}(x) + n H_{n-1}(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} = \delta_{m,n} \sqrt{\pi} 2^n n!$$

$$P(x, t) \rightarrow c_n, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t) \rightarrow \{c_{n-2}, c_n, c_{n+2}\}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} x^k P(x, t) \rightarrow \{c_{n-k-1}, \dots, c_n, \dots, c_{n+k+1}\}$$

Formuły rekurencyjne

$$\dot{c}_n(t) = \sum_{k=-L}^{+L} A_n^{n+k} c_{n+k}(t) \quad L - \text{stopień wielomianu } U(x)$$

A – macierz pasmowa o szerokości $2L + 1$

Jeśli w $U(x)$ nie ma nieparzystych potęg x , to c_{2m} i c_{2m+1} separują się. Np. dla $U(x) = x^2/2$ dwa ukł. z macierzami trójdiodagonalnymi, dla $U(x) = x^4/4 - x^2/2$ dwa ukł. z macierzami pięciodiodagonalnymi.

Formuły rekurencyjne

$$\dot{c}_n(t) = \sum_{k=-L}^{+L} A_n^{n+k} c_{n+k}(t) \quad L - \text{stopień wielomianu } U(x)$$

A – macierz pasmowa o szerokości $2L + 1$

Jeśli w $U(x)$ nie ma nieparzystych potęg x , to c_{2m} i c_{2m+1} separują się. Np. dla $U(x) = x^2/2$ dwa ukł. z macierzami trójdiodagonalnymi, dla $U(x) = x^4/4 - x^2/2$ dwa ukł. z macierzami pięciodiodagonalnymi.

wektor L -elementowy

$$C_m(t) = \begin{bmatrix} c_{mL} \\ c_{mL+1} \\ \vdots \\ c_{mL+L-1} \end{bmatrix}$$

Formuły rekurencyjne

$$\dot{c}_n(t) = \sum_{k=-L}^{+L} A_n^{n+k} c_{n+k}(t) \quad L - \text{stopień wielomianu } U(x)$$

A – macierz pasmowa o szerokości $2L + 1$

Jeśli w $U(x)$ nie ma nieparzystych potęg x , to c_{2m} i c_{2m+1} separują się. Np. dla $U(x) = x^2/2$ dwa ukł. z macierzami trójdiodagonalnymi, dla $U(x) = x^4/4 - x^2/2$ dwa ukł. z macierzami pięciodiodagonalnymi.

wektor L -elementowy

$$C_m(t) = \begin{bmatrix} c_{mL} \\ c_{mL+1} \\ \vdots \\ c_{mL+L-1} \end{bmatrix}$$

równanie ewolucji

$$\dot{C}_m(t) = Q_m^- C_{m-1}(t) + Q_m C_m(t) + Q_m^+ C_{m+1}(t)$$

trójdiodagonalna wektorowa relacja rekurencyjna (Q_m^i - macierze $L \times L$)

Zagadnienie początkowe

$$\dot{C}_n(t) = Q_n^- C_{n-1}(t) + Q_n C_n(t) + Q_n^+ C_{n+1}(t) , \text{ war. pocz. } C_n(0) = C_n^0$$

Zagadnienie początkowe

$$\dot{C}_n(t) = Q_n^- C_{n-1}(t) + Q_n C_n(t) + Q_n^+ C_{n+1}(t), \text{ war. pocz. } C_n(0) = C_n^0$$

transformata
Laplace'a

$$\int_0^{\infty} dt C_n(t) e^{-st} = \mathcal{C}_n(s), \quad \int_0^{\infty} dt \dot{C}_n(t) e^{-st} = -C_n^0 + s \mathcal{C}_n(s)$$

Zagadnienie początkowe

$$\dot{\mathbf{C}}_n(t) = \mathbb{Q}_n^- \mathbf{C}_{n-1}(t) + \mathbb{Q}_n \mathbf{C}_n(t) + \mathbb{Q}_n^+ \mathbf{C}_{n+1}(t), \text{ war. pocz. } \mathbf{C}_n(0) = \mathbf{C}_n^0$$

transformata
Laplace'a

$$\int_0^{\infty} dt \mathbf{C}_n(t) e^{-st} = \mathcal{C}_n(s), \quad \int_0^{\infty} dt \dot{\mathbf{C}}_n(t) e^{-st} = -\mathbf{C}_n^0 + s \mathcal{C}_n(s)$$

$$\mathbb{Q}_n^- \mathcal{C}_{n-1}(s) + (\mathbb{Q}_n - s\mathbb{I}) \mathcal{C}_n(s) + \mathbb{Q}_n^+ \mathcal{C}_{n+1}(s) = -\mathbf{C}_n^0$$

Zagadnienie początkowe

$$\dot{\mathbf{C}}_n(t) = \mathbb{Q}_n^- \mathbf{C}_{n-1}(t) + \mathbb{Q}_n \mathbf{C}_n(t) + \mathbb{Q}_n^+ \mathbf{C}_{n+1}(t), \text{ war. pocz. } \mathbf{C}_n(0) = \mathbf{C}_n^0$$

transformata
Laplace'a

$$\int_0^{\infty} dt \mathbf{C}_n(t) e^{-st} = \mathcal{C}_n(s), \quad \int_0^{\infty} dt \dot{\mathbf{C}}_n(t) e^{-st} = -\mathbf{C}_n^0 + s \mathcal{C}_n(s)$$

$$\mathbb{Q}_n^- \mathcal{C}_{n-1}(s) + (\mathbb{Q}_n - s\mathbb{I}) \mathcal{C}_n(s) + \mathbb{Q}_n^+ \mathcal{C}_{n+1}(s) = -\mathbf{C}_n^0$$

obcięcie dla $n > N \implies \mathcal{C}_{N+1}(s) \equiv 0$

$$\mathbb{Q}_N^- \mathcal{C}_{N-1}(s) + (\mathbb{Q}_N - s\mathbb{I}) \mathcal{C}_N(s) = -\mathbf{C}_N^0$$

$$\mathcal{C}_N(s) = (s\mathbb{I} - \mathbb{Q}_N)^{-1} \mathbb{Q}_N^- \mathcal{C}_{N-1}(s) + (s\mathbb{I} - \mathbb{Q}_N)^{-1} \mathbf{C}_N^0$$

Zagadnienie początkowe

$$\dot{\mathbf{C}}_n(t) = \mathbb{Q}_n^- \mathbf{C}_{n-1}(t) + \mathbb{Q}_n \mathbf{C}_n(t) + \mathbb{Q}_n^+ \mathbf{C}_{n+1}(t), \text{ war. pocz. } \mathbf{C}_n(0) = \mathbf{C}_n^0$$

transformata
Laplace'a

$$\int_0^{\infty} dt \mathbf{C}_n(t) e^{-st} = \mathcal{C}_n(s), \quad \int_0^{\infty} dt \dot{\mathbf{C}}_n(t) e^{-st} = -\mathbf{C}_n^0 + s \mathcal{C}_n(s)$$

$$\mathbb{Q}_n^- \mathcal{C}_{n-1}(s) + (\mathbb{Q}_n - s\mathbb{I}) \mathcal{C}_n(s) + \mathbb{Q}_n^+ \mathcal{C}_{n+1}(s) = -\mathbf{C}_n^0$$

obcięcie dla $n > N \implies \mathcal{C}_{N+1}(s) \equiv 0$

$$\mathbb{Q}_N^- \mathcal{C}_{N-1}(s) + (\mathbb{Q}_N - s\mathbb{I}) \mathcal{C}_N(s) = -\mathbf{C}_N^0$$

$$\mathcal{C}_N(s) = (s\mathbb{I} - \mathbb{Q}_N)^{-1} \mathbb{Q}_N^- \mathcal{C}_{N-1}(s) + (s\mathbb{I} - \mathbb{Q}_N)^{-1} \mathbf{C}_N^0$$

$$\mathcal{C}_n(s) = \mathbb{S}_n(s) \mathcal{C}_{n-1}(s) + \mathcal{A}_n(s)$$

$$\mathbb{S}_n(s) = [s\mathbb{I} - \mathbb{Q}_n - \mathbb{Q}_n^+ \mathbb{S}_{n+1}(s)]^{-1} \mathbb{Q}_n^-$$

$$\mathcal{A}_n(s) = [s\mathbb{I} - \mathbb{Q}_n - \mathbb{Q}_n^+ \mathbb{S}_{n+1}(s)]^{-1} [\mathbb{Q}_n^+ \mathcal{A}_{n+1}(s) + \mathbf{C}_n^0]$$

dla $n = 0$: $\mathbb{Q}_0^- = 0 \implies \mathbb{S}_0(s) = 0 \implies \mathcal{C}_0(s) = \mathcal{A}_0(s)$

Ułamki łańcuchowe

Np. przetłumiony oscylator harmoniczny: $U(x) = \frac{1}{2}x^2$ i $P(x, 0) = P(-x,)$
tylko parzyste indeksy; $n = 2m$, $c_{2m} \equiv d_m$, $Q_{2m} \equiv R_m$

$$\dot{d}_m = R_m^+ d_{m+1} + R_m d_m + R_m^- d_{m-1}$$

Ułamki łańcuchowe

Np. przetłumiony oscylator harmoniczny: $U(x) = \frac{1}{2}x^2$ i $P(x, 0) = P(-x,)$
 tylko parzyste indeksy; $n = 2m, c_{2m} \equiv d_m, Q_{2m} \equiv R_m$

$$\dot{d}_m = R_m^+ d_{m+1} + R_m d_m + R_m^- d_{m-1}$$

$$\begin{aligned} S_m(s) &= \left[s - R_m - R_m^+ S_{m+1}(s) \right]^{-1} R_m^- \\ &= \frac{R_m^-}{s - R_m - R_m^+ S_{m+1}(s)} \\ &= \frac{R_m^-}{s - R_m - R_m^+ \frac{R_{m+1}^-}{s - R_{m+1} - R_{m+1}^+ S_{m+2}(s)}} \\ &= \frac{p_m}{r_m + \frac{p_{m+1}}{r_{m+1} + \frac{p_{m+2}}{r_{m+2} + \dots}}} \end{aligned}$$

ułamek łańcuchowy

Ułamki łańcuchowe

Np. przetłumiony oscylator harmoniczny: $U(x) = \frac{1}{2}x^2$ i $P(x, 0) = P(-x,)$
 tylko parzyste indeksy; $n = 2m, c_{2m} \equiv d_m, Q_{2m} \equiv R_m$

$$\dot{d}_m = R_m^+ d_{m+1} + R_m d_m + R_m^- d_{m-1}$$

$$\begin{aligned} S_m(s) &= \left[s - R_m - R_m^+ S_{m+1}(s) \right]^{-1} R_m^- \\ &= \frac{R_m^-}{s - R_m - R_m^+ S_{m+1}(s)} \\ &= \frac{R_m^-}{s - R_m - R_m^+ \frac{R_{m+1}^-}{s - R_{m+1} - R_{m+1}^+ S_{m+2}(s)}} \\ &= \frac{p_m}{r_m + \frac{p_{m+1}}{r_{m+1} + \frac{p_{m+2}}{r_{m+2} + \dots}}} \end{aligned}$$

ułamek łańcuchowy

dla innych potencjałów – macierzowy ułamek łańcuchowy

Ewolucja ze stanu niestabilnego

Np. $U(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}ax^2$

ekstrema potencjału:

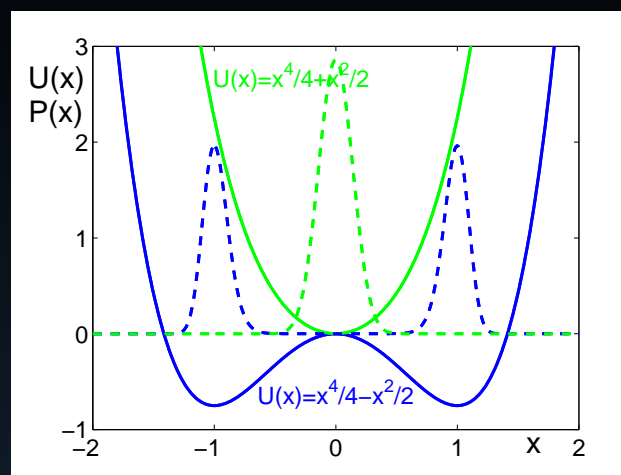
$$U'(x) = x(x^2 - a) = 0$$

↓



$$x = 0, \quad a < 0;$$

$$x = 0, \pm\sqrt{a}, \quad a > 0.$$



Ewolucja ze stanu niestabilnego

Np. $U(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}ax^2$

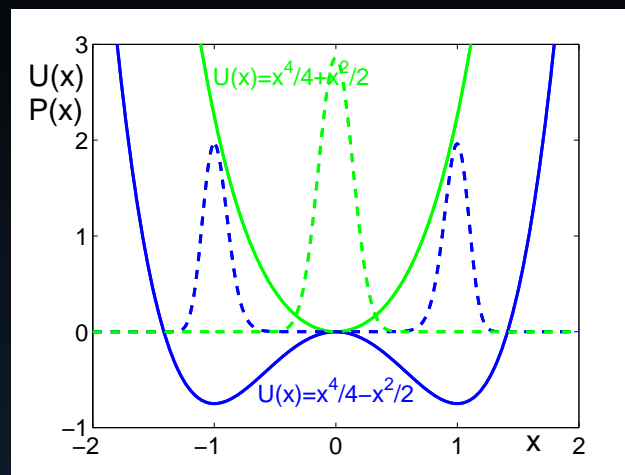
ekstrema potencjału:

$$U'(x) = x(x^2 - a) = 0$$

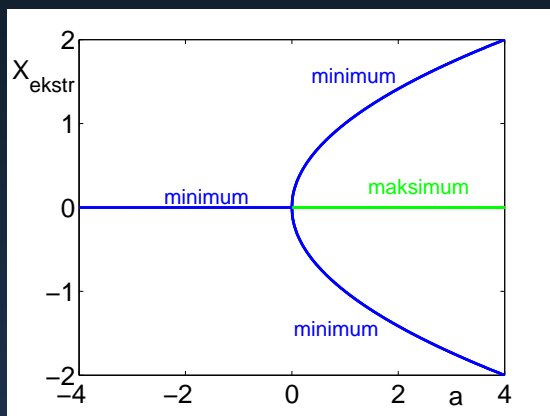
↓

$$x = 0, \quad a < 0;$$

$$x = 0, \pm\sqrt{a}, \quad a > 0.$$



bifurkacja



Ewolucja ze stanu niestabilnego

Np. $U(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}ax^2$

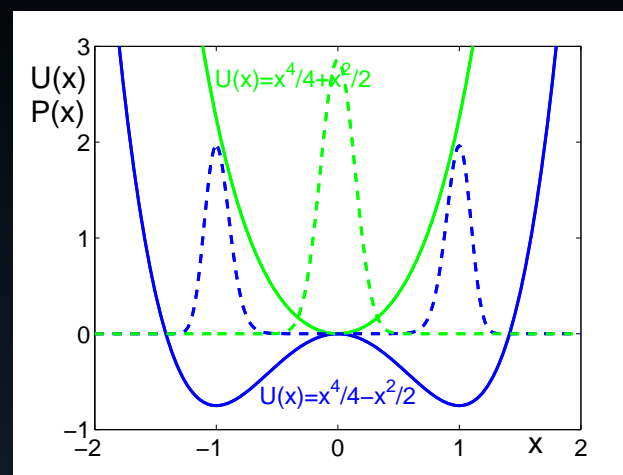
ekstrema potencjału:

$$U'(x) = x(x^2 - a) = 0$$

↓

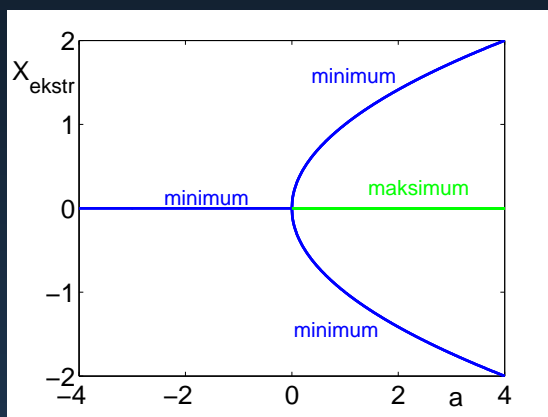
$$x = 0, \quad a < 0;$$

$$x = 0, \pm\sqrt{a}, \quad a > 0.$$



bifurkacja

nagłe przełączenie, np. $a = -1$ na $a = +1$
 $x = 0$ – **stan niestabilny**, $P(x, t = 0) \approx \delta(x)$



Ewolucja ze stanu niestabilnego

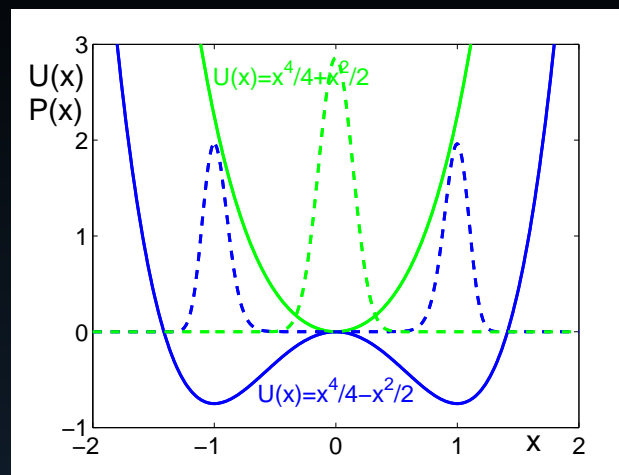
Np. $U(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}ax^2$
 ekstrema potencjału:

$$U'(x) = x(x^2 - a) = 0$$



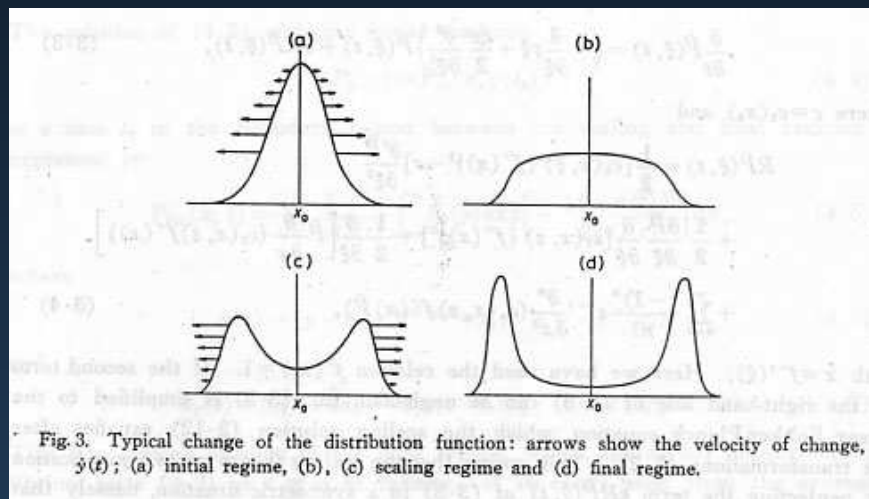
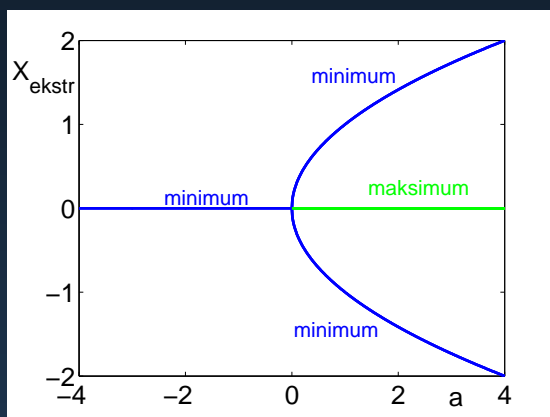
$$x = 0, \quad a < 0;$$

$$x = 0, \pm\sqrt{a}, \quad a > 0.$$



bifurkacja

nagłe przełączenie, np. $a = -1$ na $a = +1$
 $x = 0$ – **stan niestabilny**, $P(x, t = 0) \approx \delta(x)$



M.Suzuki, Progr. Theor. Phys. 56, 77 (1976)

Przejęciowa wielomodalność

Ale . . . czy zawsze taki scenariusz?

Przejęciowa wielomodalność

Ale ... czy zawsze taki scenariusz?

Np. $U(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{4}bx^4 - \frac{1}{2}ax^2$

dla $a > 0$ – potencjał bistabilny

dla $b < 0$ inna forma ewolucji !!!

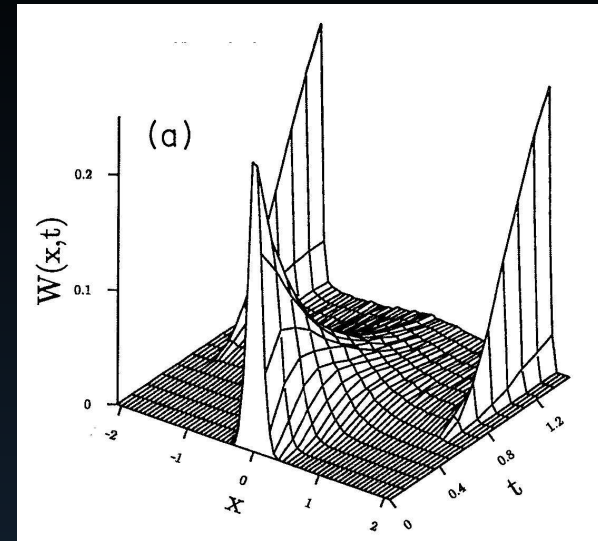
Prześciowa wielomodalność

Ale ... czy zawsze taki scenariusz?

Np. $U(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{4}bx^4 - \frac{1}{2}ax^2$

dla $a > 0$ – potencjał bistabilny

dla $b < 0$ inna forma ewolucji !!!



J.Iwaniszewski, Phys. Rev. A **45**, 8436 (1992)

Prześciowa wielomodalność

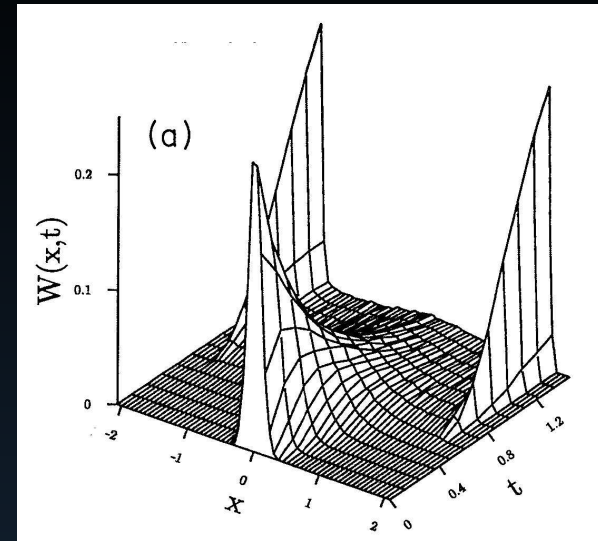
Ale ... czy zawsze taki scenariusz?

Np. $U(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{4}bx^4 - \frac{1}{2}ax^2$

dla $a > 0$ – potencjał bistabilny

dla $b < 0$ inna forma ewolucji !!!

prześciowa
wielomodalność



J.Iwaniszewski, Phys. Rev. A **45**, 8436 (1992)

Prześciowa wielomodalność

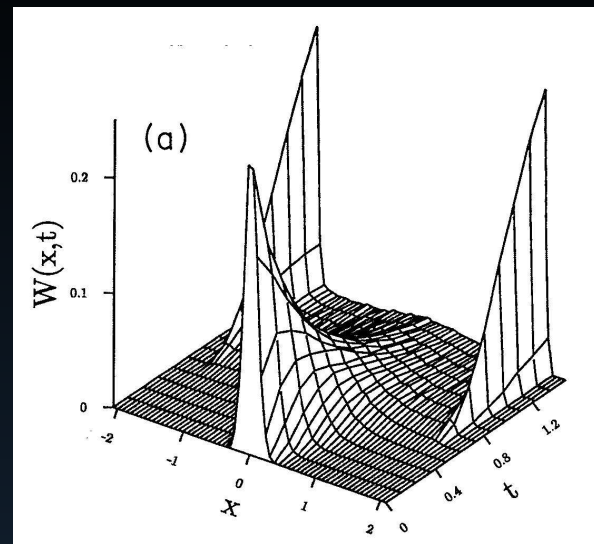
Ale ... czy zawsze taki scenariusz?

Np. $U(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{4}bx^4 - \frac{1}{2}ax^2$

dla $a > 0$ – potencjał bistabilny

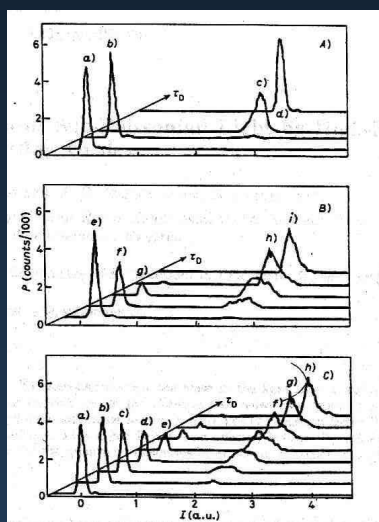
dla $b < 0$ inna forma ewolucji !!!

prześciowa
wielomodalność



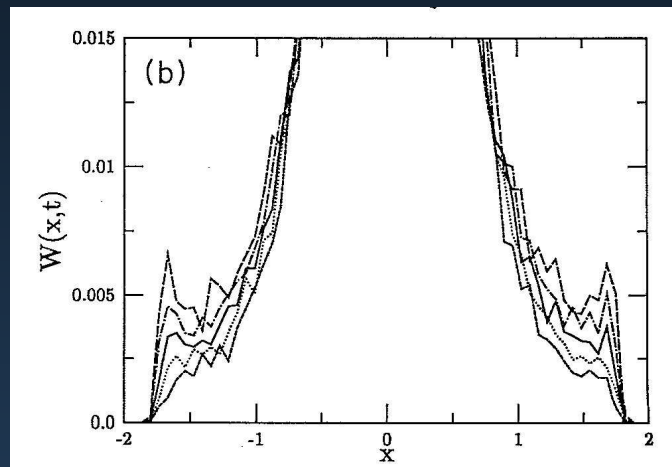
J.Iwaniszewski, Phys. Rev. A 45, 8436 (1992)

laser



E.Arimondo et al., Europhys. Lett. 4, 287 (1987)

układ elektroniczny



J.Iwaniszewski et al., Phys. Rev. E 50, 3538 (1994)

Praca magisterska

- Celem pracy jest zbadanie ewolucji ze stanu niestabilnego w obecności fluktuacji parametrów kontrolnych, np. dla $U(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}(a_0 + a_1\eta(t))x^2$, $\eta(t)$ – inny biały szum

Praca magisterska

- Celem pracy jest zbadanie ewolucji ze stanu niestabilnego w obecności fluktuacji parametrów kontrolnych, np. dla $U(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}(a_0 + a_1\eta(t))x^2$, $\eta(t)$ – inny biały szum
- Praca polega na napisaniu programu komputerowego dla metody macierzowych ułamków łańcuchowych i zastosowaniu go w analizie powyższego problemu

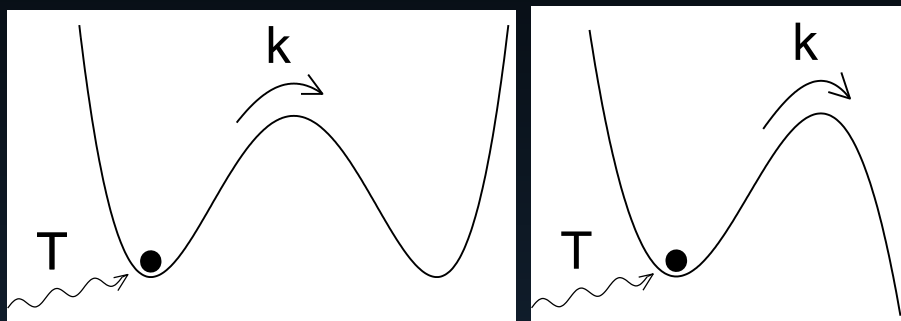
Praca magisterska

- Celem pracy jest zbadanie ewolucji ze stanu niestabilnego w obecności fluktuacji parametrów kontrolnych, np. dla $U(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}(a_0 + a_1\eta(t))x^2$, $\eta(t)$ – inny biały szum
- Praca polega na napisaniu programu komputerowego dla metody macierzowych ułamków łańcuchowych i zastosowaniu go w analizie powyższego problemu
- Od kandydata wymagana jest znajomość podstawowych pojęć i zasad mechaniki i termodynamiki (na poziomie wykładów z Fizyki Ogólnej), elementarna znajomość algebry i rachunku prawdopodobieństwa, podstawowe umiejętności dotyczące rachunku różniczkowego i całkowego (wykłady z analizy, algebry i MMF-u) oraz umiejętność programowania w Matlabie, Fortranie lub C.

ewentualny inny temat pracy

Ewolucja ze stanu metastabilnego

dla $t = 0$ układ w minimum potencjału — stan metastabilny

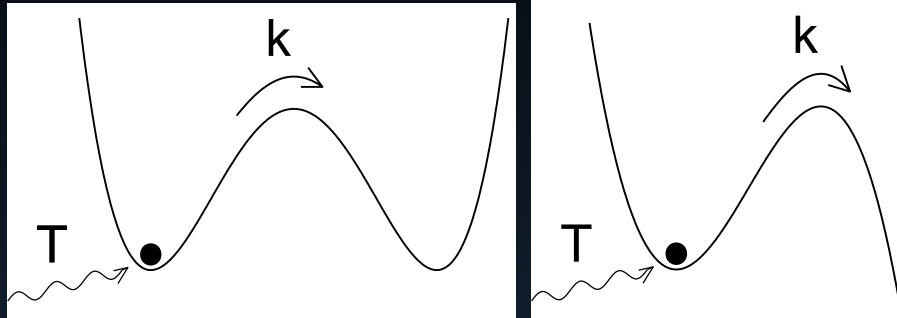


Problem:

Jak szybko układ opuszcza stan początkowy?

Ewolucja ze stanu metastabilnego

dla $t = 0$ układ w minimum potencjału — stan metastabilny



Problem:

Jak szybko układ opuszcza stan początkowy?

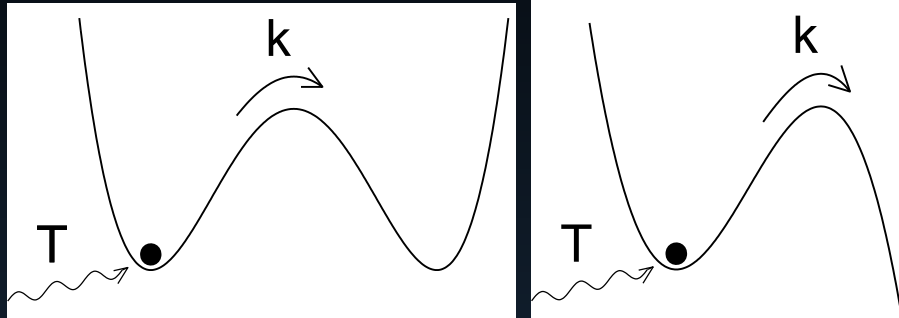
prawdop. przebywania w lewej jamie $P_L(t) = \int_{-\infty}^{max} dx P(x, t)$

$$\frac{dP_L(t)}{dt} \approx -kP_L(t)$$

k – stała rozpadu, stała szybkości reakcji
 k^{-1} – czas życia stanu metastabilnego

Ewolucja ze stanu metastabilnego

dla $t = 0$ układ w minimum potencjału — **stan metastabilny**



Problem:

Jak szybko układ opuszcza stan początkowy?

prawdop. przebywania w lewej jamie $P_L(t) = \int_{-\infty}^{max} dx P(x, t)$

$$\frac{dP_L(t)}{dt} \approx -kP_L(t)$$

k – stała rozpadu, stała szybkości reakcji
 k^{-1} – czas życia stanu metastabilnego

aktywacja termiczna

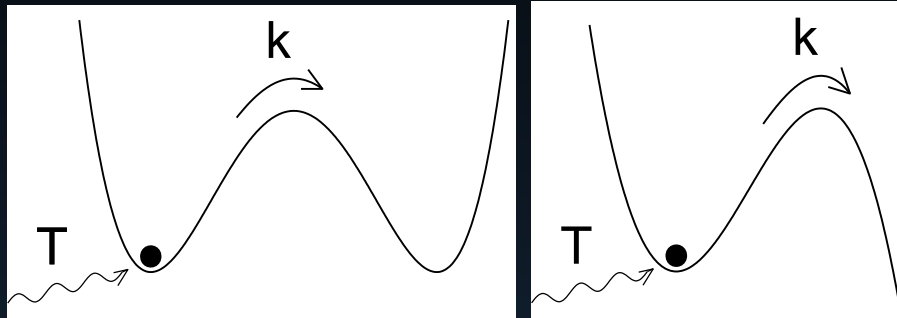
prawo Arrheniusa (1889)

$$k = A \exp(-\Delta U/kT)$$

ewentualny inny temat pracy

Ewolucja ze stanu metastabilnego

dla $t = 0$ układ w minimum potencjału — **stan metastabilny**



Problem:

Jak szybko układ opuszcza stan początkowy?

prawdop. przebywania w lewej jamie $P_L(t) = \int_{-\infty}^{max} dx P(x, t)$

$$\frac{dP_L(t)}{dt} \approx -kP_L(t) \quad \begin{array}{l} k - \text{stała rozpadu, stała szybkości reakcji} \\ k^{-1} - \text{czas życia stanu metastabilnego} \end{array}$$

aktywacja termiczna

prawo Arrheniusa (1889) $k = A \exp(-\Delta U/kT)$

problem do zbadania w pracy magisterskiej:

gigantyczne tłumienie aktywacji przez skorelowane z białym szumem $\xi(t)$ fluktuacje parametrów kontrolnych układu

A.J.R. Madureira , P. Hänggi, H.S. Wio, Phys. Lett. A 217, 248 (1996)

Plan pracy

Plan pracy

II 2006 (lub wcześniej) rozpoczęcie,

Plan pracy

II 2006 (lub wcześniej) rozpoczęcie,

do IV 2006 ewolucja przetłumionego oscylatora harmonicznego
(macierze 1×1) – wzory i program,

Plan pracy

II 2006 (lub wcześniej) rozpoczęcie,

do IV 2006 ewolucja przetłumionego oscylatora harmonicznego
(macierze 1×1) – wzory i program,

do VI 2006 ewolucja dla innych potencjałów (macierzowe ułamki
łańcuchowe) – uruchomienie programu,

Plan pracy

- II 2006 (lub wcześniej) rozpoczęcie,
- do IV 2006 ewolucja przetłumionego oscylatora harmonicznego (macierze 1×1) – wzory i program,
- do VI 2006 ewolucja dla innych potencjałów (macierzowe ułamki łańcuchowe) – uruchomienie programu,
- do XI 2006 analiza przejściowej wielomodalności (lub aktywacji termicznej) z szumem addytywnym,

Plan pracy

- II 2006 (lub wcześniej) rozpoczęcie,
- do IV 2006 ewolucja przetłumionego oscylatora harmonicznego (macierze 1×1) – wzory i program,
- do VI 2006 ewolucja dla innych potencjałów (macierzowe ułamki łańcuchowe) – uruchomienie programu,
- do XI 2006 analiza przejściowej wielomodalności (lub aktywacji termicznej) z szumem addytywnym,
- do II 2007 analiza przejściowej wielomodalności (lub aktywacji termicznej) z dwoma szumami: addytywnym i moltiplikatywnym,

Plan pracy

- II 2006 (lub wcześniej) rozpoczęcie,
- do IV 2006 ewolucja przetłumionego oscylatora harmonicznego (macierze 1×1) – wzory i program,
- do VI 2006 ewolucja dla innych potencjałów (macierzowe ułamki łańcuchowe) – uruchomienie programu,
- do XI 2006 analiza przejściowej wielomodalności (lub aktywacji termicznej) z szumem addytywnym,
- do II 2007 analiza przejściowej wielomodalności (lub aktywacji termicznej) z dwoma szumami: addytywnym i mультыplikatywnym,
- do IV 2007 ewentualne rozszerzenie tematyki,

Plan pracy

- II 2006 (lub wcześniej) rozpoczęcie,
- do IV 2006 ewolucja przetłumionego oscylatora harmonicznego (macierze 1×1) – wzory i program,
- do VI 2006 ewolucja dla innych potencjałów (macierzowe ułamki łańcuchowe) – uruchomienie programu,
- do XI 2006 analiza przejściowej wielomodalności (lub aktywacji termicznej) z szumem addytywnym,
- do II 2007 analiza przejściowej wielomodalności (lub aktywacji termicznej) z dwoma szumami: addytywnym i moltiplikatywnym,
- do IV 2007 ewentualne rozszerzenie tematyki,
- do VI 2007 pisanie pracy magisterskiej,

Plan pracy

- II 2006 (lub wcześniej) rozpoczęcie,
- do IV 2006 ewolucja przetłumionego oscylatora harmonicznego (macierze 1×1) – wzory i program,
- do VI 2006 ewolucja dla innych potencjałów (macierzowe ułamki łańcuchowe) – uruchomienie programu,
- do XI 2006 analiza przejściowej wielomodalności (lub aktywacji termicznej) z szumem addytywnym,
- do II 2007 analiza przejściowej wielomodalności (lub aktywacji termicznej) z dwoma szumami: addytywnym i moltiplikatywnym,
- do IV 2007 ewentualne rozszerzenie tematyki,
- do VI 2007 pisanie pracy magisterskiej,

VI 2007 **Egzamin magisterski**

Plan pracy

- II 2006 (lub wcześniej) rozpoczęcie,
- do IV 2006 ewolucja przetłumionego oscylatora harmonicznego (macierze 1×1) – wzory i program,
- do VI 2006 ewolucja dla innych potencjałów (macierzowe ułamki łańcuchowe) – uruchomienie programu,
- do XI 2006 analiza przejściowej wielomodalności (lub aktywacji termicznej) z szumem addytywnym,
- do II 2007 analiza przejściowej wielomodalności (lub aktywacji termicznej) z dwoma szumami: addytywnym i moltiplikatywnym,
- do IV 2007 ewentualne rozszerzenie tematyki,
- do VI 2007 pisanie pracy magisterskiej,

VI 2007 **Egzamin magisterski**