I. Kombinatoryka i prawdopodobieństwo

I.1 Mała Lusia bawi się literkami A,A,A,E,K,M,M,T,T,Y ustawiając je w różnej kolejności. Jakie jest prawdopodobieństwo ustawienia wyrazu MATEMATYKA?

I.2 Wśród funkcji $f : A \to A$, gdzie $A = \{-5, -2, 0, 2, 5\}$, ile jest funkcji

a) wszystkich,

b) stałych,

c) ściśle rosnących,

d) ściśle malejących,

e) o wartościach dodatnich,

f) o wartościach nieujemnych,

g) różnowartościowych,

h) bez miejsc zerowych,

i) z jednym miejscem zerowym,

j) z dwoma miejscami zerowymi,

k) z k miejscami zerowymi.

I.3 Egzaminator przygotował 30 pytań na egzamin. Każdy student losuje 5 pytań. Jeśli odpowie na wszystkie pytania otrzymuje ocenę b. dobrą, jeśli na 4 — dobrą, na 3 — dostateczną. W pozostałych przypadkach otrzymuje ocenę niedostateczną. Obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania przez studenta oceny

a) b. dobrej,

b) dobrej,

c) dostatecznej,

d) niedostatecznej,

jeśli student zna odpowiedzi na 60% pytań egzaminacyjnych.

I.4 Spośród 50 pytań egzaminacyjnych student, który zna odpowiedź na 25 pytań, losuje 3 pytania. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że student zna odpowiedź na co najmniej jedno pytanie.

I.5 Czy prawdopodobieństwa wygrania w loterii zawierającej n losów, z których jeden wygrywa oraz w loterii zawierającej $2n$ losów, z których 2 wygrywają są takie same, jeśli

a) kupujemy 1 los,

b) kupujemy 2 losy?

I.6 Na ile sposobów można włożyć k par skarpetek do n szuflad, jeżeli:

a) W jednej szufladzie zmieści się co najwyżej jedna para skarpet.

b) W jednej szufladzie zmieści się dowolna ilość par.

I.7 Rzucamy n razy dwiema idealnymi kostkami do gry. Obliczyć, dla jakich n prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej raz tej samej liczby oczek na obu kostkach jest mniejsze od $671/1296$.

I.8 Spośród 100 strzałów oddanych przez strzelca do celu przeciętnie 60 jest celnych. Ile powinien on oddać strzałów, aby prawdopodobieństwa trafienia celu było większe od 0.936?

I.9 Wyznaczyć n, tak aby w rzucie n kostkami do gry prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej jednej szóstki było większe od $1/6$.

I.10 Spośród wszystkich liczb czterocyfrowych o cyfrach ze zbioru $\{1, 2, 3\}$ losujemy jedną. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wszystkich cyfr wylosowanej liczby jest równa 7.

I.11 Niech Ω będzie zbiorem zdarzeń elementarnych i $A, B \subset \Omega$. Obliczyć $P(A \cap B)$ wiedząc, że $P(A \cup B) = 5/8$, $P(A) = 1/2$, $P(B') = 3/4$. Sprawdzić, czy zdarzenia A i B są niezależne?

I.12 Niech A, B będą zdarzeniami losowymi i $P(B) > 0$. Pokazać, że

$$P(A|B) \leqslant \frac{1 - P(A')}{P(B)}$$

I.13 Niech A, B będą zdarzeniami losowymi o prawdopodobieństwach $P(A) = 0.85$ oraz $P(B) = 0.75$. Udowodnić, że że prawdopodobieństwo warunkowe spełnia nierówność $P(A|B) \geqslant 0.8$.

I.14 Pokazać, że zdarzenia A i B są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy A' i B' są niezależne.

I.15 Uczniowie dojeżdżający do szkoły gimbusem zaobserwowali, że spóźnienie autobusu zależy od tego, który z trzech kierowców prowadzi autobus. Przeprowadzili badania statystyczne i obliczyli, że w przypadku, gdy autobus prowadzi kierowca A, spóźnienie zdarza się w 5% jego kursów, gdy prowadzi kierowca B w 20 % jego kursów, a gdy prowadzi kierowca C w 50% jego kursów. W ciągu 5-dniowego tygodnia nauki dwa razy prowadzi autobus kierowca A, dwa razy kierowca B i jeden raz kierowca C. Obliczyć prawdopodobieństwo spóźnienia się autobusu szkolnego w wybrany dzień.

I.16 W urnie znajduje się 6 kul białych i 4 czarne. Losujemy z urny 5 razy po 2 kule zwracając je do urny. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania pary kul różnych kolorów dokładnie 3 razy?

I.17 Po zbadaniu produkcji pewnego przedsiębiorstwa okazało się, że 96% jego wyrobów nadaje się do użytku, z tego 62.5 % jest pierwszego gatunku. Obliczyc prawdopodobieństwo tego, że wśród 3 losowo wybranych wyrobów dwa są pierwszego gatunku.

I.18 W grupie 30 sportowców jest 20 narciarzy, 6 skoczków i 4 saneczkarzy. Prawdopodobieństwo zakwalifikowania się na mistrzostwa świata są następujące: dla narciarzy 0.5, dla skoczków 0.8, dla saneczkarzy 0.9. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany sportowiec jest zakwalifikowany do mistrzostw?

I.19 W magazynie znajdują się żarówki wyprodukowane przez zakłady Z_1, Z_2, Z_3. Stanowią one odpowiednio 50%, 40%, 10% zapasów magazynowych. Wiadomo, że w produkcji zakładów Z_1, Z_2, Z_3 wadliwe żarówki stanowią odpowiednio 1%, 2% i 7%. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że

- **a**) kupując jedną żarówkę natrafimy na wadliwą,
- **b**) kupując 5 żarówek natrafimy na 3 wadliwe.

I.20 Dwie automatyczne obrabiarki A oraz B produkują jednakowe detale, które trafiają na ten sam przenośnik taśmowy. Produkcja obrabiarki A jest dwa razy większa niż produkcja obrabiarki B. Obrabiarka A produkuje 60% detali I gatunku, a obrabiarka B: 84% detali I gatunku. Wybrany detal z przenośnika okazał się I gatunku. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że detal ten został wyprodukowany przez obrabiarkę I.

I.21 Daltonistami jest średnio 5 mężczyzn na 100 i 2 kobiety na 1000. Z grupy, w której stosunek liczby kobiet do liczby mężczyzn wynosi 3/7, wybrano losowo 1 osobę. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że jest to mężczyzna, jeśli stwierdzono u niej daltonizm.

II. Zmienne losowe i ich rozkłady

II.1 Biatlonista oddaje 10 strzałów do celu. Prawdopodobieństwo trafienia jest za każdym razem takie samo i wynosi 4/5.

a) Wyznaczyć rozkład oraz wartość oczekiwaną liczby trafień,

b) Jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba trafień?

II.2 Student oddaje 5 rzutów do kosza. Prawdopodobieństwo trafienia jest za każdym razem takie samo i wynosi $p = 2/5$.

a) Wyznaczyć rozkład oraz wartość oczekiwaną liczby trafień,

b) Jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba trafień?

II.3 W urnie znajdują się 3 czarne i 2 białe kule. Wyjmujemy z urny po jednej kuli tak długo, dopóki nie wyciągniemy kuli białej. Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby losowań z urny.

II.4 Obsługa działa artyleryjskiego ma 4 pociski. Prawdopodobieństwa trafienia do celu jednym wystrzałem wynosi 0.8. Strzelanie kończy się w chwili trafienia lub wyczerpania pocisków. Wyznaczyć

a) rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej opisującej liczbę oddanych strzałów,

b) średnią liczbę oddanych strzałów.

II.5 Obsługa działa artyleryjskiego ma dużo pocisków. Prawdopodobieństwa trafienia do celu jednym wystrzałem wynosi 0.8. Strzelanie kończy się w chwili trafienia do celu. Wyznaczyć

a) rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej opisującej liczbę oddanych strzałów,

b) średnią liczbę oddanych strzałów.

II.6 Na zajęciach wychowania fizycznego panna Ewa rzuca piłki w kierunku kosza. Prawdopodobieństwa rzucenia kosza wynosi za każdym razem 0.2. Wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej opisującej liczbę oddanych rzutów oraz oczekiwaną liczbę rzutów, jeśli

a) panna Ewa rzuca tak długo, aż trafi,

b) panna Ewa rzuca do chwili trafienia, ale oddaje nie więcej niż 5 rzutów.

II.7 Rzucamy dwiema idealnymi kostkami do gry. Niech wynik tego doświadczenia będzie opisany jako para $(i, j) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$.

a) Niech zmienna losowa $f(i, j) = \sin(\frac{\pi}{2}\, i \cdot j)$. Podać zbiór wartości zmiennej f oraz jej rozkład.

b) Niech zmienna losowa $g(i, j) = i - j$. Podać zbiór wartości zmiennej g oraz jej rozkład.

II.8 Dana jest dyskretna zmienna losowa f o rozkładzie P

f_k	-2	-1	0	1	2
p_k	1/10	1/5	1/10	2/5	1/5

a) Naszkicować dystrybuantę zmiennej f.

b) Obliczyć $P(f < 0)$, $P(f \leqslant 0)$, $P(-1 \leqslant f < 2)$.

c) Wyznaczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej f.

d) Podać rozkład zmiennej losowej $g = 2f + 1$ i naszkicować jej dystrybuantę.

e) Podać rozkład zmiennej losowej $g = f^2$ i naszkicować jej dystrybuantę.

f) Pokazać bezpośrednim rachunkiem, że $\mathrm{Var}[f] = \mathbb{E}[f^2] - (\mathbb{E}[f])^2$.

II.9 Wyznaczyć wartość oczekiwaną i wariancję dla zmiennych losowych o rozkładzie:

a) równomiernym

f_i	f_1	f_2	$\ldots$	f_n
P_i	$1/n$	$1/n$	$\ldots$	$1/n$

b) jednopunktowym

f_i	x_1
P_i	1

c) zero-jedynkowym

f_i	0	1
P_i	p	$1-p$

d) dwumianowym: wartości $f_k = k$, $k = 0, 1, \ldots, N$ przyjmowane są z prawdopodobieństwami

$$P(k, N, p) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

e) Poissona: wartości $f_k = k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ przyjmowane są z prawdopodobieństwami

$$P(k, \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

f) geometrycznego (skończonego)

f_i	1	2	3	$\ldots$	$n-1$	n
P_i	p	$p(1-p)$	$p(1-p)^2$	$\ldots$	$p(1-p)^{n-2}$	$(1-p)^{n-1}$

g) geometrycznego (nieskończonego): wartości $f_k = k$, $k \in \mathbb{N}$ przyjmowane są z prawdopodobieństwami

$$P_k = p(1-p)^{k-1}$$

II.10 Dane są dwie niezależne zmienne losowe:

X:

x_i	-1	1	2
p_i	0.2	0.5	0.3

Y:

x_i	-2	0	2
p_i	0.1	0.2	0.7

Podać wartości i rozkłady zmiennych:

a) $U = X - Y$

b) $U = 2X + Y$

c) $U = X \cdot Y$

d) $U = X^2 + Y^2$

e) Wyznaczyć $\mathbb{E}[X \cdot Y]$ i porównać z iloczynem $\mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$.

II.11 Rozkład łączny dwóch zmiennych losowych X i Y ma postać

$y_i \backslash x_i$	-1	0	1
1	0.05	0.1	0.05
2	0.03	0.05	0.32
4	0.02	0.05	0.33

a) Znaleźć rozkłady brzegowe X oraz Y

b) Znaleźć wartości i rozkład $U = \log_2 Y$.

c) Znaleźć wartości i rozkład $U = X + 2Y$

d) Znaleźć wartości i rozkład $U = \cos(\pi XY)$

e) Wyznaczyć $\mathbb{E}[X \cdot Y]$ i $\mathbb{E}[X + Y]$.

II.12 Jaka jest oczekiwana wygrana w następującej grze: rzucamy N razy idealną monetą, przy czym, jeśli w k-tym rzucie wypadnie orzeł, to grający wygrywa 2^k PLN, jeśli reszka — grający nic nie wygrywa?

II.13 Zmienna losowa X ma rozkład Poissona z wartością średnią $\lambda = 3$. Podać rozkład zmiennej losowej:

a) $U = 2X$

b) $U = \sqrt{X}$

c) $U = \ln X$.

II.14 Zmienna losowa X ma rozkład geometryczny:

$$P(X = k) = \frac{1}{5}\Big(\frac{4}{5}\Big)^{k-1}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Wyznaczyć rozkłady zmiennych losowych:

a) $U = e^X$

b) $U = \cos(\pi X)$

c) $U = \sin(\pi X/2) + \cos(\pi X/2)$.

II.15 Dana jest funkcja:

$$\rho_\triangle(x) = \begin{cases} \sqrt{3}\Big(\frac{a}{2} - x\Big) & 0 \leqslant x \leqslant \frac{a}{2} \\ \sqrt{3}\Big(\frac{a}{2} + x\Big) & -\frac{a}{2} \leqslant x \leqslant 0 \\ 0 & |x| > \frac{a}{2} \end{cases}$$

a) Dobrać parametr a tak, aby $\rho_\triangle(x)$ była gęstością prawdopodobieństwa rozkładu trójkątnego

b) Obliczyć wartość średnią i wariancję tego rozkładu

c) Podać wzór na dystrybuantę tego rozkładu

d) Przyjmując, że ciągła zmienna losowa X ma podany rozkład trójkątny, obliczyć

$$P(-a/4 \leqslant X \leqslant a/4).$$

II.16 Dana jest funkcja z parametrem $\lambda > 0$:

$$\rho(x) = \begin{cases} c \cdot e^{-x/\lambda} & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0\,. \end{cases}$$

a) Dobrać parametr c tak, aby $\rho(x)$ była gęstością prawdopodobieństwa rozkładu wykładniczego

b) Obliczyć wartość średnią i wariancję tego rozkładu

c) Podać wzór na dystrybuantę tego rozkładu

d) Przyjmując, że ciągła zmienna losowa X ma podany rozkład wykładniczy, obliczyć

$$P(0 \leqslant X \leqslant \lambda).$$

II.17 W pewnej miejscowości temperatura t mierzona w stopniach Celsjusza w dniu 1 kwietnia o świcie ma rozkład dany gęstością $\rho(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|}$. Wyznaczyć prawdopodobieństwo $P(|t| < 1)$.

II.18 Metro odjeżdża ze stacji dokładnie co 7 minut. Zakładając, że rozkład dotarcia pasażera na stację jest jednostajny, obliczyć

a) średni czas oczekiwania na metro przez pasażera

b) wariancję czasu oczekiwania

c) prawdopodobieństwo, że pasażer będzie czekał na metro więcej niż 4 minuty.

II.19 Prawdopodobieństwo awarii urządzenia ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda = 5$ dni.

a) Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że bezawaryjny czas pracy urządzenia wynosi co najmniej 7 dni.

b) Po jakim czasie prawdopodobieństwo awarii urządzenia osiąga wartość 0.9?

II.20 Prawdopodobieństwo awarii autobusu w funkcji pokonywanych kilometrów ma rozkład wykładniczy z wartością średnią $\lambda = 20000$ km.

a) Obliczyć prawdopodobieństwo awarii podczas pierwszych $l = 30000$ km.

b) Wyznaczyć prawdopodobieństwo braku awarii do momentu przejechania $l = 5000$ km.

c) Po ilu przejechanych kilometrach prawdopodobieństwo awarii osiągnie 0.95?

II.21 Pokazać, że dla zmiennej losowej X o rozkładzie Gaussa o wartości średniej $\bar{x}$ i wariancji σ^2

$$\begin{aligned} P(\bar{x} - t\sigma < X < \bar{x} + t\sigma) &= 2G(t) - 1 \;=\; \mathrm{erf}(t)\,, \\ P(X < \bar{x} \pm t\sigma) &= G(\pm t)\,, \\ P(\bar{x} \pm t\sigma < X) &= 1 - G(\pm t)\,, \end{aligned}$$

gdzie $G(x)$ jest dystrybuantą standardowego rozkładu Gaussa $N(0,1)$, a

$$\mathrm{erf}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{-u^2/2} du$$

jest funkcją błędu.

II.22 Srednia statystyczna długość zapałki wynosi 45 mm z odchyleniem standardowym 3 mm. Zakładając, że rozkład długości zapałek opisany jest rozkładem normalnym, obliczyć:

a) ile zapałek w pudełku (40 szt.) ma długość większą niż 46.5 mm

b) ile zapałek w pudełku (40 szt.) ma długość krótszą niż 42 mm

c) ile zapałek w pudełku (40 szt.) ma długość l w przedziale 43 mm $< l <$ 47 mm.

II.23 Srednia statystyczna ilość zapałek w pudełku wynosi 38 sztuk z odchyleniem standardowym 4 sztuki. Zakładając, że rozkład ilości zapałek opisany jest rozkładem normalnym, obliczyć:

a) ile pudełek zapałek w dużej paczce (50 szt.) ma liczbę zapałek większą niż 46,

b) ile pudełek zapałek w dużej paczce (50 szt.) ma liczbę zapałek mniejszą niż 26,

c) ile pudełek zapałek w dużej paczce (50 szt.) ma liczbę zapałek pomiędzy 36, a 42.

II.24 Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości

$$\rho(x) = \begin{cases} 12x(1-x)^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$$

Wyznaczyć gęstości zmiennych losowej:

a) $U = 2X$

b) $U = X^2$

c) $U = \sqrt{X}$

d) $U = 2^X$.

II.25 Fabryka produkuje sześcienne pustaki. Ich krawędzie l mają długości opisane rozkładem jednostajnym na przedziale $18 \leqslant l \leqslant 22$ cm.

a) Obliczyć średnią objętość i pole powierzchni pustaka.

b) Wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa objętości pustaka.

c) Wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa powierzchni pustaka.

d) Obliczyć prawdopodobieństwo, że pustaki mają objętość większą niż 410 cm^3.

e) Obliczyć prawdopodobieństwo, że pustaki mają objętość z przedziału $395 \leqslant V \leqslant 405$ cm^3.