

I. Analiza danych

I.1 W pewnym punkcie sieci elektrycznej mierzono co godzinę istniejące napięcie w V. Otrzymano w ten sposób 25 danych:

$$225, 223, 224, 220, 221, 218, 215, 219, 220, 221, 222, 220, 222, 220, 219 \quad (1)$$
$$223, 224, 217, 218, 219, 216, 210, 218, 221, 225$$

- Obliczyć na podstawie powyższych danych średnią wartość napięcia i jego wariancję.
- Obliczyć na podstawie powyższych danych medianę, odchylenie przeciętne od mediany, kwartył górny i dolny oraz odchylenie ćwiartkowe.
- Obliczyć dla powyższych danych skośność i kurtozę.

I.2 Poniższa tablica przedstawia procentową zawartość skrobi w partii 80 ziemniaków:

% skrobi	liczba
9–11	1
11–13	2
13–15	7
15–17	20
17–19	30
19–21	16
21–23	3
23–25	1

- Na podstawie danych w tabeli skonstruować szereg rozdzielczy i na jego podstawie narysować histogram.
- Dla szeregu rozdzielczego policzyć średnią arytmetyczną i wariancję.
- Dla szeregu rozdzielczego policzyć medianę i odchylenie przeciętne od mediany.
- Dla szeregu rozdzielczego obliczyć skośność i kurtozę.

I.3 Z partii bawełny pobrano próbkę złożoną z 64 włókien, a następnie zmierzono ich długość otrzymując:

$$23, 8, 15, 35, 21, 20, 10, 4, 28, 12, 9, 7, 24, 25, 31, 26, 23, 17, 13, 33, 29, \quad (2)$$
$$27, 24, 22, 32, 16, 9, 29, 22, 20, 8, 16, 21, 25, 31, 29, 23, 15, 32, 22, 23,$$
$$19, 24, 15, 21, 20, 29, 27, 23, 19, 16, 18, 24, 31, 28, 21, 8, 17, 24, 13, 12, 18, 23, 25$$

- Obliczyć na podstawie powyższych danych średnią długość włókna i jego wariancję.
- Obliczyć na podstawie powyższych danych medianę, odchylenie przeciętne od mediany, kwartył górny i dolny oraz odchylenie ćwiartkowe.
- Obliczyć dla powyższych danych skośność i kurtozę.
- Na podstawie powyższych danych zbudować szereg rozdzielczy o liczbie klas $k = 8$ i początku I klasy 3.5. Wyniki zebrać w tabeli.
- Na podstawie szeregu rozdzielczego narysować histogram.

f) Dla szeregu rozdzielczego policzyć średnią arytmetyczną i wariancję. Porównać ze średnią długością włókna i jego wariancją policzoną na podstawie danych.

g) Dla szeregu rozdzielczego obliczyć skośność i kurtozę.

h) Na podstawie powyższych danych zbudować szereg rozdzielczy o liczbie klas $k = 3$. Wyniki zebrać w tabeli. Obliczyć średnią arytmetyczną i wariancję nowego szeregu rozdzielczego i porównać je z wynikami poprzednimi.

I.4 Na podstawie danych w tabeli ocen uczniów i ich liczebności, obliczyć medianę, odchylenie przeciętne od mediany, kwartyle i odchylenie ćwiartkowe.

ocena ucznia	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6
liczebność	5	3	7	6	14	11	10	14	6	4	3

I.5 Rajd Barbórki składał się z 4 odcinków specjalnych każdy o tej samej długości l . Dane dotyczące średniej prędkości załogi na każdym z odcinków są następujące:

odcinek	pr. średnia [km/h]
I	50
II	40
III	120
IV	100

Jaka była średnia prędkość załogi w całym rajdzie?

I. Kombinatoryka i prawdopodobieństwo

I.1 Mała Luska bawi się literkami A,A,A,E,K,M,M,T,T,Y ustawiając je w różnej kolejności. Jakie jest prawdopodobieństwo ustawienia wyrazu MATEMATYKA?

I.2 Na ile sposobów można włożyć k par skarpetek do n szuflad, jeżeli:

- W jednej szufladzie zmieści się co najwyżej jedna para skarpet.
- W jednej szufladzie zmieści się dowolna ilość par.

I.3 Wśród funkcji $f : A \rightarrow A$, gdzie $A = \{-5, -2, 0, 2, 5\}$, ile jest funkcji

- | | |
|-------------------------------|--------------------------------|
| a) wszystkich, | g) różnowartościowych, |
| b) stałych, | h) bez miejsc zerowych, |
| c) ściśle rosnących, | i) z jednym miejscem zerowym, |
| d) ściśle malejących, | j) z dwoma miejscami zerowymi, |
| e) o wartościach dodatnich, | k) z k miejscami zerowymi. |
| f) o wartościach nieujemnych, | |

I.4 Egzaminator przygotował 30 pytań na egzamin. Każdy student losuje 5 pytań. Jeśli odpowie na wszystkie pytania otrzymuje ocenę b. dobrą, jeśli na 4 — dobrą, na 3 — dostateczną. W pozostałych przypadkach otrzymuje ocenę niedostateczną. Obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania przez studenta oceny

- a) b. dobrej, c) dostatecznej,
b) dobrej, d) niedostatecznej,

jeśli student zna odpowiedzi na 60% pytań egzaminacyjnych.

I.5 Spośród 50 pytań egzaminacyjnych student, który zna odpowiedź na 25 pytań, losuje 3 pytania. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że student zna odpowiedź na co najmniej jedno pytanie.

I.6 Czy prawdopodobieństwa wygrania w loterii zawierającej n losów, z których jeden wygrywa oraz w loterii zawierającej $2n$ losów, z których 2 wygrywają są takie same, jeśli

- a) kupujemy 1 los,
b) kupujemy 2 losy?

I.7 Rzucamy n razy dwiema idealnymi kostkami do gry. Obliczyć, dla jakich n prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej raz tej samej liczby oczek na obu kostkach jest mniejsze od $671/1296$.

I.8 Spośród 100 strzałów oddanych przez strzelca do celu przeciętnie 60 jest celnych. Ile powinien on oddać strzałów, aby prawdopodobieństwa trafienia celu było większe od 0.936?

I.9 Wyznaczyć n , tak aby w rzucie n kostkami do gry prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej jednej szóstki było większe od $1/6$.

I.10 Spośród wszystkich liczb czterocyfrowych o cyfrach ze zbioru $\{1, 2, 3\}$ losujemy jedną. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wszystkich cyfr wylosowanej liczby jest równa 7.

I.11 Niech Ω będzie zbiorem zdarzeń elementarnych i $A, B \subset \Omega$. Obliczyć $P(A \cap B)$ wiedząc, że $P(A \cup B) = 5/8$, $P(A) = 1/2$, $P(B) = 3/4$. Sprawdzić, czy zdarzenia A i B są niezależne?

I.12 Niech A, B będą zdarzeniami losowymi i $P(B) > 0$. Pokazać, że

$$P(A|B) \leq \frac{1 - P(A')}{P(B)}$$

I.13 Niech A, B będą zdarzeniami losowymi o prawdopodobieństwach $P(A) = 0.85$ oraz $P(B) = 0.75$. Udowodnić, że że prawdopodobieństwo warunkowe spełnia nierówność $P(A|B) \geq 0.8$.

I.14 Pokazać, że zdarzenia A i B są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy A' i B' są niezależne.

I.15 Uczniowie dojeżdżający do szkoły gimbusem zaobserwowali, że spóźnienie autobusu zależy od tego, który z trzech kierowców prowadzi autobus. Przeprowadzili badania statystyczne i obliczyli, że w przypadku, gdy autobus prowadzi kierowca A, spóźnienie zdarza się w 5% jego kursów, gdy prowadzi kierowca B w 20 % jego kursów, a gdy prowadzi kierowca C w 50% jego kursów. W ciągu 5-dniowego tygodnia nauki dwa razy prowadzi autobus kierowca A, dwa razy kierowca B i jeden raz kierowca C. Obliczyć prawdopodobieństwo spóźnienia się autobusu szkolnego w wybrany dzień.

I.16 W urnie znajduje się 6 kul białych i 4 czarne. Losujemy z urny 5 razy po 2 kule zwracając je do urny. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania pary kul różnych kolorów dokładnie 3 razy?

I.17 Po zbadaniu produkcji pewnego przedsiębiorstwa okazało się, że 96% jego wyrobów nadaje się do użytku, z tego 62.5 % jest pierwszego gatunku. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że wśród 3 losowo wybranych wyrobów dwa są pierwszego gatunku.

I.18 W grupie 30 sportowców jest 20 narciarzy, 6 skoczków i 4 saneczkarzy. Prawdopodobieństwo zakwalifikowania się na mistrzostwa świata są następujące: dla narciarzy 0.5, dla skoczków 0.8, dla saneczkarzy 0.9. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany sportowiec jest zakwalifikowany do mistrzostw?

I.19 W magazynie znajdują się żarówki wyprodukowane przez zakłady Z_1, Z_2, Z_3 . Stanowią one odpowiednio 50%, 40%, 10% zapasów magazynowych. Wiadomo, że w produkcji zakładów Z_1, Z_2, Z_3 wadliwe żarówki stanowią odpowiednio 1%, 2% i 7%. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że

- a) kupując jedną żarówkę natrafimy na wadliwą,
- b) kupując 5 żarówek natrafimy na 3 wadliwe.

I.20 Dwie automatyczne obrabiarki A oraz B produkują jednakowe detale, które trafiają na ten sam przenośnik taśmowy. Produkcja obrabiarki A jest dwa razy większa niż produkcja obrabiarki B. Obrabiarka A produkuje 60% detali I gatunku, a obrabiarka B: 84% detali I gatunku. Wybrany detal z przenośnika okazał się I gatunku. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że detal ten został wyprodukowany przez obrabiarkę I.

I.21 Daltonistami jest średnio 5 mężczyzn na 100 i 2 kobiety na 1000. Z grupy, w której stosunek liczby kobiet do liczby mężczyzn wynosi $3/7$, wybrano losowo 1 osobę. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że jest to mężczyzna, jeśli stwierdzono u niej daltonizm.

II. Zmienne losowe i ich rozkłady

II.1 Biatlonista oddaje 10 strzałów do celu. Prawdopodobieństwo trafienia jest za każdym razem takie samo i wynosi $4/5$.

- a) Wyznaczyć rozkład oraz wartość oczekiwaną liczby trafień,
- b) Jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba trafień?

II.2 Student oddaje 5 rzutów do kosza. Prawdopodobieństwo trafienia jest za każdym razem takie samo i wynosi $p = 2/5$.

- a) Wyznaczyć rozkład oraz wartość oczekiwaną liczby trafień,
- b) Jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba trafień?

II.3 W urnie znajdują się 3 czarne i 2 białe kule. Wyjmujemy z urny po jednej kuli tak długo, dopóki nie wyciągniemy kuli białej. Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby losowań z urny.

II.4 Obsługa dział artyleryjskiego ma 4 pociski. Prawdopodobieństwa trafienia do celu jednym wystrzałem wynosi 0.8. Strzelanie kończy się w chwili trafienia lub wyczerpania pocisków. Wyznaczyć

- a) rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej opisującej liczbę oddanych strzałów,
- b) średnią liczbę oddanych strzałów.

II.5 Obsługa dział artyleryjskiego ma dużo pocisków. Prawdopodobieństwa trafienia do celu jednym wystrzałem wynosi 0.8. Strzelanie kończy się w chwili trafienia do celu. Wyznaczyć

- a) rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej opisującej liczbę oddanych strzałów,
- b) średnią liczbę oddanych strzałów.

II.6 Na zajęciach wychowania fizycznego panna Ewa rzuca piłki w kierunku kosza. Prawdopodobieństwa rzucenia kosza wynosi za każdym razem 0.2. Wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej opisującej liczbę oddanych rzutów oraz oczekiwaną liczbę rzutów, jeśli

- a) panna Ewa rzuca tak długo, aż trafi,
- b) panna Ewa rzuca do chwili trafienia, ale oddaje nie więcej niż 5 rzutów.

II.7 Rzucamy dwiema idealnymi kostkami do gry. Niech wynik tego doświadczenia będzie opisany jako para $(i, j) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$.

- a) Niech zmienna losowa $f(i, j) = \sin(\frac{\pi}{2} i \cdot j)$. Podać zbiór wartości zmiennej f oraz jej rozkład.
- b) Niech zmienna losowa $g(i, j) = i - j$. Podać zbiór wartości zmiennej g oraz jej rozkład.

II.8 Dana jest dyskretna zmienna losowa f o rozkładzie P

f_k	-2	-1	0	1	2
p_k	1/10	1/5	1/10	2/5	1/5

- a) Naszkicować dystrybuantę zmiennej f .
- b) Obliczyć $P(f < 0)$, $P(f \leq 0)$, $P(-1 \leq f < 2)$.
- c) Wyznaczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej f .
- d) Podać rozkład zmiennej losowej $g = 2f + 1$ i naszkicować jej dystrybuantę.
- e) Podać rozkład zmiennej losowej $g = f^2$ i naszkicować jej dystrybuantę.
- f) Pokazać bezpośrednim rachunkiem, że $\text{Var}[f] = \mathbb{E}[f^2] - (\mathbb{E}[f])^2$.

II.9 Wyznaczyć wartość oczekiwaną i wariancję dla zmiennych losowych o rozkładzie:

- a) równomiernym

f_i	f_1	f_2	\dots	f_n
P_i	1/n	1/n	\dots	1/n

- b) jednopunktowym

f_i	x_1
P_i	1

- c) zero-jedynkowym

f_i	0	1
P_i	p	$1 - p$

- d) dwumianowym: wartości $f_k = k$, $k = 0, 1, \dots, N$ przyjmowane są z prawdopodobieństwami

$$P(k, N, p) = \binom{N}{k} p^k (1 - p)^{N-k}$$

e) Poissona: wartości $f_k = k, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ przyjmowane są z prawdopodobieństwami

$$P(k, \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

f) geometrycznego (skończonego)

f_i	1	2	3	...	$n-1$	n
P_i	p	$p(1-p)$	$p(1-p)^2$...	$p(1-p)^{n-2}$	$(1-p)^{n-1}$

g) geometrycznego (nieskończonego): wartości $f_k = k, k \in \mathbb{N}$ przyjmowane są z prawdopodobieństwami

$$P_k = p(1-p)^{k-1}$$

II.10 Dane są dwie niezależne zmienne losowe:

$$X : \begin{array}{c|c|c|c} x_i & -1 & 1 & 2 \\ \hline p_i & 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{array} \quad Y : \begin{array}{c|c|c|c} x_i & -2 & 0 & 2 \\ \hline p_i & 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{array}$$

Podać wartości i rozkłady zmiennych:

a) $U = X - Y$

c) $U = X \cdot Y$

b) $U = 2X + Y$

d) $U = X^2 + Y^2$

e) Wyznaczyć $\mathbb{E}[X \cdot Y]$ i porównać z iloczynem $\mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$.

II.11 Rozkład łączny dwóch zmiennych losowych X i Y ma postać

$y_i \backslash x_i$	-1	0	1
1	0.05	0.1	0.05
2	0.03	0.05	0.32
4	0.02	0.05	0.33

a) Znaleźć rozkłady brzegowe X oraz Y

d) Znaleźć wartości i rozkład $U = \cos(\pi XY)$

b) Znaleźć wartości i rozkład $U = \log_2 Y$.

c) Znaleźć wartości i rozkład $U = X + 2Y$

e) Wyznaczyć $\mathbb{E}[X \cdot Y]$ i $\mathbb{E}[X + Y]$.

II.12 Jaka jest oczekiwana wygrana w następującej grze: rzucamy N razy idealną monetą, przy czym, jeśli w k -tym rzucie wypadnie orzeł, to grający wygrywa 2^k PLN, jeśli reszka — grający nic nie wygrywa?

II.13 Zmienna losowa X ma rozkład Poissona z wartością średnią $\lambda = 3$. Podać rozkład zmiennej losowej:

a) $U = 2X$

b) $U = \sqrt{X}$

c) $U = \ln X$.

II.14 Zmienna losowa X ma rozkład geometryczny:

$$P(X = k) = \frac{1}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Wyznaczyć rozkłady zmiennych losowych:

a) $U = e^X$

c) $U = \sin(\pi X/2) + \cos(\pi X/2)$.

b) $U = \cos(\pi X)$

II.15 Dana jest funkcja:

$$\rho_{\Delta}(x) = \begin{cases} \sqrt{3}\left(\frac{a}{2} - x\right) & 0 \leq x \leq \frac{a}{2} \\ \sqrt{3}\left(\frac{a}{2} + x\right) & -\frac{a}{2} \leq x \leq 0 \\ 0 & |x| > \frac{a}{2} \end{cases}$$

- Dobrać parametr a tak, aby $\rho_{\Delta}(x)$ była gęstością prawdopodobieństwa rozkładu trójkątnego
- Obliczyć wartość średnią i wariancję tego rozkładu
- Podać wzór na dystrybuantę tego rozkładu
- Przyjmując, że ciągła zmienna losowa X ma podany rozkład trójkątny, obliczyć

$$P(-a/4 \leq X \leq a/4).$$

II.16 Dana jest funkcja z parametrem $\lambda > 0$:

$$\rho(x) = \begin{cases} c \cdot e^{-x/\lambda} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

- Dobrać parametr c tak, aby $\rho(x)$ była gęstością prawdopodobieństwa rozkładu wykładniczego
- Obliczyć wartość średnią i wariancję tego rozkładu
- Podać wzór na dystrybuantę tego rozkładu
- Przyjmując, że ciągła zmienna losowa X ma podany rozkład wykładniczy, obliczyć

$$P(0 \leq X \leq \lambda).$$

II.17 W pewnej miejscowości temperatura t mierzona w stopniach Celsjusza w dniu 1 kwietnia o świcie ma rozkład dany gęstością $\rho(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|}$. Wyznaczyć prawdopodobieństwo $P(|t| < 1)$.

II.18 Metro odjeżdża ze stacji dokładnie co 7 minut. Zakładając, że rozkład dotarcia pasażera na stację jest jednostajny, obliczyć

- średni czas oczekiwania na metro przez pasażera
- wariancję czasu oczekiwania
- prawdopodobieństwo, że pasażer będzie czekał na metro więcej niż 4 minuty.

II.19 Prawdopodobieństwo awarii urządzenia ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda = 5$ dni.

- Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że bezawaryjny czas pracy urządzenia wynosi co najmniej 7 dni.
- Po jakim czasie prawdopodobieństwo awarii urządzenia osiąga wartość 0.9?

II.20 Prawdopodobieństwo awarii autobusu w funkcji pokonywanych kilometrów ma rozkład wykładniczy z wartością średnią $\lambda = 20000$ km.

- Obliczyć prawdopodobieństwo awarii podczas pierwszych $l = 30000$ km.

- b) Wyznaczyć prawdopodobieństwo braku awarii do momentu przejechania $l = 5000$ km.
- c) Po ilu przejechanych kilometrach prawdopodobieństwo awarii osiągnie 0.95?

II.21 Pokazać, że dla zmiennej losowej X o rozkładzie Gaussa o wartości średniej \bar{x} i wariancji σ^2

$$\begin{aligned} P(\bar{x} - t\sigma < X < \bar{x} + t\sigma) &= 2G(t) - 1 = \operatorname{erf}(t), \\ P(X < \bar{x} \pm t\sigma) &= G(\pm t), \\ P(\bar{x} \pm t\sigma < X) &= 1 - G(\pm t), \end{aligned}$$

gdzie $G(x)$ jest dystrybuantą standardowego rozkładu Gaussa $N(0, 1)$, a

$$\operatorname{erf}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{-u^2/2} du$$

jest funkcją błędu.

II.22 Średnia statystyczna długość zapalki wynosi 45 mm z odchyleniem standardowym 3 mm. Zakładając, że rozkład długości zapalek opisany jest rozkładem normalnym, obliczyć:

- a) ile zapalek w pudełku (40 szt.) ma długość większą niż 46.5 mm
- b) ile zapalek w pudełku (40 szt.) ma długość krótszą niż 42 mm
- c) ile zapalek w pudełku (40 szt.) ma długość l w przedziale $43 \text{ mm} < l < 47 \text{ mm}$.

II.23 Średnia statystyczna ilość zapalek w pudełku wynosi 38 sztuk z odchyleniem standardowym 4 sztuki. Zakładając, że rozkład ilości zapalek opisany jest rozkładem normalnym, obliczyć:

- a) ile pudełek zapalek w dużej paczce (50 szt.) ma liczbę zapalek większą niż 46,
- b) ile pudełek zapalek w dużej paczce (50 szt.) ma liczbę zapalek mniejszą niż 26,
- c) ile pudełek zapalek w dużej paczce (50 szt.) ma liczbę zapalek pomiędzy 36, a 42.

II.24 Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości

$$\rho(x) = \begin{cases} 12x(1-x)^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$$

Wyznaczyć gęstości zmiennych losowej:

- a) $U = 2X$
- b) $U = X^2$
- c) $U = \sqrt{X}$
- d) $U = 2^X$.

II.25 Fabryka produkuje sześciennie pustaki. Ich krawędzie l mają długości opisane rozkładem jednostajnym na przedziale $18 \leq l \leq 22$ cm.

- a) Obliczyć średnią objętość i pole powierzchni pustaka.
- b) Wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa objętości pustaka.
- c) Wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa powierzchni pustaka.
- d) Obliczyć prawdopodobieństwo, że pustaki mają objętość większą niż 410 cm^3 .
- e) Obliczyć prawdopodobieństwo, że pustaki mają objętość z przedziału $395 \leq V \leq 405 \text{ cm}^3$.