1. Pokazać, że miejscem geometrycznym punktów o współrzędnych (x, y), których suma odległości od ustalonych dwóch punktów (ognisk) o współrzędnych $(-c, 0)$ oraz $(c, 0)$ jest równa $2a$, $(a > c > 0)$, jest krzywa o równaniu
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$
Nazywamy ją *elipsą*!
2. Pokazać, że krzywa o równaniu parametrycznym $\vec{r}(t) = [2^t + 2^{-t}, 2^t - 2^{-t}]$ jest hiperbolą.
3. Wyznaczyć długość łuku krzywej łańcuchowej $y = a\cosh(x/a)$ od punktu $(0, a)$ do punktu (x, y). (Odp. $l = a\sinh(x/a)$).
4. Wyznaczyć równanie prostej stycznej i normalnej do krzywej $\vec{\gamma}(t) = [at\cos t, at\sin t]$, $t \in [0, \infty)$, w dowolnym jej punkcie $p = \vec{\gamma}(t_0)$.
5. Dana jest elipsa o równaniu
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$
Wyznaczyć
   a) krzywiznę w dowolnym jej punkcie,
   b) współrzędne środka krzywizny.
   c) Pokazać, że środki krzywizn elipsy leżą na astroidzie o równaniu
$$\left(\frac{5x}{9}\right)^{2/3} + \left(\frac{4y}{9}\right)^{2/3} = 1.$$
6. Wyznaczyć równanie krzywej będącej zbiorem środków krzywizn (tzw. ewoluta danej krzywej) dla krzywej łańcuchowej $y = \cosh(x)$.
7. Wyznaczyć równanie powierzchni obrotowej powstałej z obrotu krzywej $x = \sin z$, $z \in [0, \pi]$ wokół osi Z.
8. Niech
$$\boldsymbol{e}_+(u) = [\cos u, \sin u, 0]\,, \quad \boldsymbol{e}_-(u) = [-\sin u, \cos u, 0]\,, \quad \boldsymbol{e}_3 = [0, 0, 1]\,.$$
Wyznaczyć punkty osobliwe powierzchni zadanej równaniem
$$\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{e}_+(v) + (u + v)\boldsymbol{e}_-(v) + (u + 2v)\boldsymbol{e}_3\,.$$
9. Wyznaczyć punkty nieregularności (osobliwe) powierzchni $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2z^2 - 2(x^2 + y^2) = 0\right\}$.
10. Dla powierzchni $\boldsymbol{r}(u_1, u_2) = [u_1 + 2u_2, u_1 - u_2, 2u_1^2 - u_2^2]$ wyznaczyć tensor metryczny, jego wyznacznik i odwrotny tensor metryczny.
11. Dla powierzchni bocznej walca o promieniu R określonej jako $\boldsymbol{r}(\varphi, z) = [R\cos\varphi, R\sin\varphi, z]$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, $z \in (0, 1)$, wyznaczyć krzywiznę Gaussa oraz krzywizne średnią.
12. Dla powierzchni $\boldsymbol{r}(u_1, u_2) = [u_1, u_1u_2, u_2]$ wyznaczyć
   a) symbole Christoffela oraz równania linii geodezyjnej,
   b) macierz II formy charakterystycznej powierzchni oraz macierz odwzorowania Weingartena,
   c) krzywiznę Gaussa oraz krzywiznę średnią,
   d) składowe tensora krzywizny oraz tensora Ricciego,
   e) skalar krzywizny i porównać go z krzywizną Gaussa,
   f) równania dewiacji geodezyjnej (nie rozwiązywać ich!).
13. (*) Pokazać, że przesunięcie równoległe pola wektorowego $\boldsymbol{v} = (v^k)$ zachowuje jego długość, tzn.
$$\frac{d}{dt}(g_{kl}v^kv^l) = \frac{d}{dt}(v^kv_k) = 0\,.$$