

Jacek Jurkowski

**Elementy geometrii różniczkowej
z prostymi zastosowaniami**

Toruń, 2017

Spis treści

Rozdział 1. Krzywe na płaszczyźnie i w przestrzeni	5
1.1. Sposoby opisu krzywych	5
1.2. Wektor styczny i normalny do krzywej	7
1.3. Długość łuku krzywej	9
1.4. Krzywizna krzywej płaskiej	11
1.5. Krzywe w przestrzeni	13
1.6. Łuki i rozmaiwości wymiaru 1	17
Rozdział 2. Powierzchnie w przestrzeni trójwymiarowej	21
2.1. Równania powierzchni	21
Równanie parametryczne	21
Równanie algebraiczne	23
2.2. Płaszczyzna styczna do powierzchni	23
2.3. Gładkie odwzorowania powierzchni	26
2.4. Tensor metryczny	27
2.5. Równanie geodezyjnej	29
2.6. Idea krzywizny Gaussa	32
2.7. Własności przekształcenia sferycznego	33
2.8. Krzywizna normalna, Gaussa i krzywizny główne	36
2.9. Współczynniki koneksji metrycznej. Równania strukturalne	39
2.10. Przesunięcie równoległe i pochodna kowariantna	40
2.11. Dewiacja geodezyjna i tensor krzywizny	44
Rozdział 3. Powierzchnie wielowymiarowe	49
3.1. Rozmaiwości różniczkowe	49
3.2. Pola tensorowe i formy różniczkowe	51

Rozdział 1

Krzywe na płaszczyźnie i w przestrzeni

1.1. Sposoby opisu krzywych

- (1) jako wykres funkcji $y = f(x)$ lub $x = f(y)$, np. $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $x = y^2 - y$, itp.
(2) poprzez równanie uwikłane $f(x, y) = 0$, w szczególności przez *równanie algebraiczne*, tzn. $W(x, y) = 0$, gdzie W jest wielomianem, np.

- elipsa: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,
- liść Kartezjusza: $x^3 + y^3 - 3axy = 0$,
- cisoida Dioklesa: $x(x^2 + y^2) = 2ay^2$,
- dwa ostrza: $(x^2 - a^2)(x - a)^2 + (y^2 - a^2)^2 = 0$,
- astroida: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Krzywe algebraiczne stopnia 2 są sklasyfikowane i mogą być jedną z krzywych: parabola, elipsa, hiperbola, pęk prostych. Wiele z krzywych algebraicznych powstaje jako zbiór punktów o określonych własnościach geometrycznych, np.

- parabola jest zbiorem punktów równoodległych od zadanego punktu na płaszczyźnie (ognisko) oraz od zadanej prostej nieprzechodzącej przez ten punkt (kierownica),
 - elipsa jest zbiorem punktów na płaszczyźnie, których suma odległości od dwóch ustalonych punktów (ognisk) jest równa podwojonej odległości pomiędzy nimi,
 - astroida jest krzywą jaką zakreśla ustalony punkt mniejszego okręgu toczącego się po obwodzie większego okręgu po jego wewnętrznej stronie.
- (3) poprzez równanie w zmiennych biegunowych $r = f(\varphi)$, np.
- spirale (gdy f jest monotoniczną funkcją φ), np. $r = a\varphi^p$, $r = ae^{-\varphi}$,
 - liście: $r = a \sin(p\varphi)$.
- (4) poprzez równania parametryczne:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in I, \end{cases}$$

gdzie I jest pewnym przedziałem zmienności parametru t . Opis parametryczny krzywej jest niejednoznaczny, tzn. krzywa ma więcej niż jedną parametryzację, np.

- elipsa

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t, \quad t \in [0, 2\pi], \end{cases} \quad \begin{cases} x = a \cos \omega t \\ y = b \sin \omega t, \quad t \in [0, 2\pi/\omega], \end{cases}$$

- cisoida Dioklesa:

$$\begin{cases} x = \frac{2at^2}{1+t^2} \\ y = \frac{2at^3}{1+t^2}, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

— liść Kartezjusza:

$$\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3}, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

— astroida:

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Opisy krzywych są równoważne w otoczeniach punktów nieosobliwych (regularnych). Równoważność ta jest lokalna z uwagi na twierdzenie o funkcjach uwikłanych, które opisują np. krzywe algebraiczne

Tw. 1.1 (o funkcji uwikłanej). *Niech (x_0, y_0) będzie punktem takim, że $f(x_0, y_0) = 0$. Jeśli funkcja $f(x, y)$ ma ciągle pochodne cząstkowe w pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0) oraz jeśli $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$, wówczas*

- i) *istnieje jednoznaczna gałąź funkcji uwikłanej $y = h(x)$ określona w dostatecznie małym otoczeniu x_0 , spełniająca tam równanie $f(x, h(x)) = 0$;*
- ii) *funkcja h jest ciągła w ww. otoczeniu x_0 i posiada tam ciągłą pochodną daną wzorem*

$$y'(x) = -\frac{\partial_x f}{\partial_y f}.$$

Punkty osobliwe wymagają szczegółowych badań. Wśród najczęściej spotykanych można wymienić

— węzły: np. punkt $(0, 0)$ liścia Kartezjusza. Zauważmy, że dla $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$

$$\partial_x f(0, 0) = \partial_y f(0, 0) = 0,$$

— ostrza (punkt zwrotu): np. punkty $(0, \pm a)$, $(\pm a, 0)$ astroidy. Zauważmy, że w tym przypadku $f(x, y) = x^{2/3} + y^{2/3} - a^{2/3}$ oraz

$$\partial_x f = \frac{2}{3}x^{-1/3}, \quad \partial_y f = \frac{2}{3}y^{-1/3}$$

i w punktach osobliwych pochodne te albo znikają albo są nieokreślone.

DEF. 1.1. Krzywą klasy C^k na płaszczyźnie nazywamy zbiór punktów $\{\gamma(t) \in \mathbb{R}^2 : t \in I\}$, dla którego istnieje parametryzacja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ klasy C^k przyjmująca w danym układzie odniesienia postać

$$\gamma(t) = [x(t), y(t)] = [\gamma_1(t), \gamma_2(t)].$$

Parametryzację $\gamma(t)$ nazywamy *regularną*, jeśli $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ dla każdego $t \in I$.

Przypadek $k = 0$ odpowiada krzywej ciągłej. Dla $k > 0$ opis parametryczny krzywej jest różniczkowalny. Na ogół będziemy zajmować się *krzywymi gładkimi*, tzn. klasy C^∞ .

DEF. 1.2. Równaniem (algebraicznym, uwikłanym) krzywej (hodografem krzywej) $\gamma(t)$ nazywać będziemy równanie $f(x, y) = 0$, jakie spełnia krzywa po wyrugowaniu parametru t z równań $x = \gamma_1(t)$ oraz $y = \gamma_2(t)$, $t \in I$.

Niech np. γ_1 będzie odwracalne, wówczas $t = \gamma_1^{-1}(x)$ i w konsekwencji $y = \gamma_2(\gamma_1^{-1}(x))$. Zatem $f(x, y) = (\gamma_2 \circ \gamma_1^{-1})(x) - y$.

Jeśli $\gamma(t)$ określa zależność położenia od czasu, to równanie krzywej określa tor tego ruchu.

PRZYKŁAD 1.1. Wyznaczyć równania algebraiczne następujących krzywych:

$$\begin{cases} x = a \cosh t \\ y = b \cosh t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \mapsto \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$\gamma(t) = [3 \sin^2 t, 5 \cos^2 t], \quad t \in [0, \pi/2] \mapsto y = 5 - \frac{5}{3}x, \quad x \in [0, 3].$$

$$\gamma(t) = \left[\frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}, \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} \right], \quad t \geq 0 \mapsto x^2 + y^2 = 1, \quad x, y \geq 0.$$

1.2. Wektor styczny i normalny do krzywej

DEF. 1.3. Jeśli krzywa jest klasy co najmniej C^1 , to wektor $\dot{\gamma}(t_0) = [\dot{\gamma}_1(t_0), \dot{\gamma}_2(t_0)]$, $t_0 \in I$, nazywamy *wektorem stycznym* do krzywej w punkcie $p = \gamma(t_0)$.

Jednostkowym wektorem stycznym jest wektor

$$T(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} \quad (1.1)$$

Jednostkowym *wektorem normalnym* N nazywamy unormowany wektor prostopadły do wektora stycznego, taki aby wraz z nim tworzył dodatnio zorientowaną bazę (reper Freneta), tj. $\det[T, N] > 0$.

Długość i zwrot wektora stycznego zależą od wyboru parametryzacji, ale jego kierunek jest ustalony przez prostą styczną do krzywej w danym punkcie. Jeśli krzywa jest zorientowana, to także zwrot wektora stycznego nie zależy od parametryzacji.

Równanie parametryczne prostej stycznej w punkcie $\gamma(t_0)$ ma postać

$$r(\lambda) = \gamma(t_0) + \lambda \dot{\gamma}(t_0) = [\gamma_1(t_0) + \lambda \dot{\gamma}_1(t_0), \gamma_2(t_0) + \lambda \dot{\gamma}_2(t_0)], \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

W szczególności jej współczynnik kierunkowy określony jest jako

$$\frac{\dot{\gamma}_2(t_0)}{\dot{\gamma}_1(t_0)} = \frac{y - \gamma_2(t_0)}{x - \gamma_1(t_0)}.$$

PRZYKŁAD 1.2. Niech $\gamma(t) = [\sin t, \sin 2t]$, $t \in [0, 2\pi]$. Zauważmy, że krzywa wielokrotnie przechodzi przez punkt $[0, 0] = \gamma(0) = \gamma(\pi) = \gamma(2\pi)$. Jednak $\dot{\gamma}(0) = [1, 2]$, a $\dot{\gamma}(\pi) = [-1, 2]$.

PRZYKŁAD 1.3. Wektor styczny do krzywej

$$\gamma(t) = [e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t], \quad t \in \mathbb{R}$$

jest postaci

$$\dot{\gamma}(t) = [-e^{-t}(\cos t + \sin t), e^{-t}(\cos t - \sin t)],$$

jego długość $|\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{2}e^{-t}$, zaś jednostkowy wektor styczny

$$T(t) = \left[-\sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right), \sin\left(\frac{\pi}{4} - t\right) \right].$$

Wektorem normalnym do krzywej $\gamma(t)$ jest

$$N(t) = \frac{[-\dot{\gamma}_2(t), \dot{\gamma}_1(t)]}{|\dot{\gamma}(t)|}. \quad (1.2)$$

Jeśli krzywa określona jest równaniem uwikłanym $f(x, y) = 0$, to

$$0 = df(x, y) = \partial_x f dx + \partial_y f dy \quad (1.3)$$

i w konsekwencji (co wynika także z tw. o funkcji uwikłanej)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{\partial_x f}{\partial_y f}. \quad (1.4)$$

Powyższy wzór określa bezpośrednio współczynnik kierunkowy prostej stycznej do krzywej $f(x, y) = 0$. Dodatkowo z (1.3) wynika, że

$$\partial_x f \dot{x} + \partial_y f \dot{y} = 0, \quad (1.5)$$

co oznacza, że wektor gradientu $\nabla f = [\partial_x f, \partial_y f]$ jest prostopadły do wektora stycznego. Unormowany wektor gradientu będzie zatem wektorem normalnym do krzywej,

$$N = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{[\partial_x f, \partial_y f]}{|\nabla f|},$$

podczas gdy

$$T = \frac{[-\partial_y f, \partial_x f]}{|\nabla f|}$$

będzie wektorem stycznym.

Pamiętając, że współczynnik kierunkowy prostej stycznej dany jest jako (1.4)

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial_x f}{\partial_y f}$$

a współczynnik kierunkowy prostej normalnej spełnia

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = -\frac{dx}{dy} = \frac{\partial_y f}{\partial_x f}$$

otrzymamy

Tw. 1.2 (prosta styczna i normalna).

(1) Prosta styczna w punkcie (x_0, y_0) do krzywej określonej funkcją uwikłaną $f(x, y) = 0$ ma równanie

$$\partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

(2) Prosta normalna w punkcie (x_0, y_0) do krzywej określonej funkcją uwikłaną $f(x, y) = 0$ ma równanie

$$\partial_y f(x_0, y_0)(x - x_0) - \partial_x f(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Podobne twierdzenie dla krzywej zadanej parametrycznie jest następujące:

Tw. 1.3 (prosta styczna i normalna).

(1) Prosta styczna w punkcie (x_0, y_0) do krzywej $\gamma(t) = [\gamma_1(t), \gamma_2(t)]$ ma równanie

$$\frac{\dot{\gamma}_2(t_0)}{\dot{\gamma}_1(t_0)} = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

gdzie $(x_0, y_0) = [\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0)]$ oraz

(2) Prosta normalna w punkcie (x_0, y_0) do krzywej $\gamma(t) = [\gamma_1(t), \gamma_2(t)]$ ma równanie

$$\dot{\gamma}_2(t_0)(y - y_0) + \dot{\gamma}_1(t_0)(x - x_0) = 0.$$

PRZYKŁAD 1.4. Równanie prostej stycznej i normalnej do liścia Kartezjusza $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$.

PRZYKŁAD 1.5. Równanie prostej stycznej i normalnej do krzywej

$$\gamma(t) = [at \cos t, at \sin t].$$

1.3. Długość łuku krzywej

DEF. 1.4. Długością l krzywej określonej parametryzacją $\gamma(t), t \in [t_1, t_2]$ nazywamy

$$l = \int_{\gamma} dl = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{\gamma}_1(t)^2 + \dot{\gamma}_2(t)^2} dt.$$

Z twierdzenia o zamianach zmiennej w całce oznaczonej wynika, że długość krzywej nie zależy od parametryzacji.

Dla krzywej będącej wykresem funkcji $y = f(x)$ dla $x \in [a, b]$ mamy zatem

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

PRZYKŁAD 1.6. Długość łuku krzywej $y = a \cosh \frac{x}{a}$ od punktu $(0, a)$ do (x, y) wynosi $l = a \sinh \frac{x}{a}$.

Dla biegunowego opisu krzywej mamy

$$\gamma(t) = [\gamma_1(t), \gamma_2(t)] = [r(t) \cos \varphi(t), r(t) \sin \varphi(t)]$$

zatem

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= [\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi] \\ |\dot{\gamma}|^2 &= (\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi)^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2. \end{aligned}$$

Długość łuku wynosi

$$l = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} dt = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2} d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(r')^2 + r^2} d\varphi,$$

gdzie $r' = \frac{dr}{d\varphi}$ oraz $\varphi_1 = \varphi(t_1), \varphi_2 = \varphi(t_2)$.

PRZYKŁAD 1.7. Długość łuku spirali $r = a\varphi$ od punktu $(0, 0)$ do dowolnego innego (r, φ) ma postać

$$l = \frac{a}{2} \left[\varphi \sqrt{1 + \varphi^2} + \ln \left(\varphi + \sqrt{1 + \varphi^2} \right) \right].$$

DEF. 1.5. Parametryzację krzywej $\gamma : [s_1, s_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ nazywamy łukową, jeśli dla każdego s_1, s_2 długość łuku pomiędzy $\gamma(s_1)$ oraz $\gamma(s_2)$ wynosi $l = \Delta s = s_2 - s_1$.

Tw. 1.4. $\gamma(s)$ jest parametryzacją łukową wtedy i tylko wtedy, gdy $|\gamma'(s)| = 1$ dla każdego s .

Dowód: $\Leftarrow$ oczywiste.

$\Rightarrow$ Jeśli $\gamma(s)$ jest parametryzacją łukową, to dla każdego s, s_1

$$\int_{s_1}^s |\gamma'(s)| ds = s - s_1.$$

Obliczając pochodną po s mamy $|\gamma'(s)| = 1$ dla dowolnego s . □

Tw. 1.5. Każda krzywa regularna ma parametryzację łukową.

Dowód: Niech $\gamma(t) = [\gamma_1(t), \gamma_2(t)]$ będzie parametryzacją regularną, niech $t > t_1$. Określmy

$$s(t) = \int_{t_1}^t |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

Ponieważ

$$\frac{ds}{dt} = |\dot{\gamma}(t)| > 0, \tag{1.6}$$

to $s(t)$ jest funkcją odwracalną (jako funkcja ściśle monotoniczna), zatem istnieje $t(s)$. Określmy $\tilde{\gamma}(s) := \gamma(t(s))$. Wówczas $\tilde{\gamma}$ jest parametryzacją łukową. Rzeczywiście

$$|\tilde{\gamma}'(s)| = \left| \frac{d\gamma}{dt} \frac{dt}{ds} \right| = \frac{\left| \frac{d\gamma}{dt} \right|}{\left| \frac{ds}{dt} \right|} = \frac{\left| \frac{d\gamma}{dt} \right|}{\left| \frac{d\gamma}{dt} \right|} = 1.$$

□

PRZYKŁAD 1.8. Reper Freneta dla elipsy $\gamma(t) = [a \cos t, b \sin t]$, $t \in [0, 2\pi]$.

PRZYKŁAD 1.9. Parametryzacja łukowa dla okręgu $\gamma(t) = [R \cos \omega t, R \sin \omega t]$, $t \in [0, 2\pi/\omega]$.

PRZYKŁAD 1.10. Parametryzacja łukowa ewolwenty okręgu

$$\gamma(t) = [a(\cos t + t \sin t), a(\sin t - t \cos t)]$$

ma postać

$$\gamma(s) = \left[a \left(\cos \sqrt{\frac{2s}{a}} + \sqrt{\frac{2s}{a}} \sin \sqrt{\frac{2s}{a}} \right), a \left(\sin \sqrt{\frac{2s}{a}} - \sqrt{\frac{2s}{a}} \cos \sqrt{\frac{2s}{a}} \right) \right].$$

1.4. Krzywizna krzywej płaskiej

Niech $\gamma(s)$ będzie parametryzacją łukową krzywej oraz $p = \gamma(s_0)$. Niech $\Delta_p\phi$ oznacza zmianę kąta wektora stycznego w punkcie p oraz w punkcie sąsiednim, tzn.

$$\Delta_p\phi = \angle(\gamma'(s_0), \gamma'(s_0 + \Delta s)).$$

DEF. 1.6 (Geometryczna definicja krzywizny). Krzywizną krzywej płaskiej w punkcie $p = \gamma(s_0)$ nazywamy

$$K(p) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta_p\phi}{\Delta s}.$$

Przyjmujemy, że krzywizna dla krzywej płaskiej jest dodatnia, gdy krzywa odchyła się lokalnie w lewo oraz ujemna, gdy odchyła się w prawo. Pokażemy, że krzywizna związana jest z długością wektora $\gamma''(s)$. Ponieważ $\gamma'(s) \cdot \gamma'(s) = 1$ dla każdego s , zatem po zróżniczkowaniu

$$\gamma''(s) \cdot \gamma'(s) = 0.$$

Wektory $\gamma''(s)$ oraz $\gamma'(s)$ są prostopadłe w parametryzacji łukowej. W konsekwencji $\gamma''(s)$ jest współliniowy z wektorem normalnym N . Współczynnik proporcjonalności to nic innego jak krzywizna!

Tw. 1.6. Jeśli $\gamma(s)$ jest parametryzacją łukową krzywej płaskiej klasy C^2 oraz $p = \gamma(s_0)$, to

$$\gamma''(s_0) = K(p)N(s_0),$$

gdzie $N(s_0)$ jest jednostkowym wektorem normalnym do krzywej γ w punkcie p określonym przez (1.2), takim że wraz z wektorem stycznym $T(s_0)$ w tym punkcie (1.1) tworzy on reper Freneta.

Dowód: Reper Freneta $\{T(s), N(s)\}$ w dowolnym punkcie tworzy bazę ortonormalną na płaszczyźnie zatem

$$T(s_0 + \Delta s) = (T(s_0 + \Delta s) \cdot T(s_0))T(s_0) + (T(s_0 + \Delta s) \cdot N(s_0))N(s_0),$$

gdzie

$$\begin{aligned} T(s_0 + \Delta s) \cdot T(s_0) &= \cos \Delta_p\phi, \\ T(s_0 + \Delta s) \cdot N(s_0) &= \cos(\pi/2 - \Delta_p\phi) = \sin \Delta_p\phi. \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} \gamma''(s_0) &= \frac{dT}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{T(s_0 + \Delta s) - T(s_0)}{\Delta s} \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\cos \Delta_p\phi - 1}{\Delta s} T(s_0) + \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta_p\phi}{\Delta s} N(s_0) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta_p\phi}{\Delta_p\phi} \frac{\Delta_p\phi}{\Delta s} N(s_0) \\ &= K(p)N(s_0), \end{aligned}$$

bowiem

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\cos \Delta_p\phi - 1}{\Delta s} = \lim_{\Delta_p\phi \rightarrow 0} \frac{\cos \Delta_p\phi - 1}{\Delta_p\phi} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta_p\phi}{\Delta s} = 0.$$

□

Z powyższego twierdzenia wynika zatem, że w dowolnym punkcie krzywej regularnej $|K(p)| = |\gamma''(s)|$.

DEF. 1.7 (Wektor krzywizny). Wektor krzywizny w punkcie $p = \gamma(s)$ określamy jako

$$K(p) = \gamma''(s) = K(p)N(s). \quad (1.7)$$

PRZYKŁAD 1.11. Wyznaczyć krzywiznę okręgu o promieniu R sparametryzowanego łukowo jako

$$\gamma(s) = [R \cos(s/R), R \sin(s/R)], \quad s \in [0, 2\pi R].$$

Związek (1.7) obowiązuje jednakże tylko dla parametryzacji łukowej. Ogólnie w dowolnej parametryzacji $\gamma(t)$ mamy

$$K(p) = \frac{d}{ds} \left(\frac{d}{ds} \gamma(s) \right) = \frac{dt}{ds} \frac{d}{dt} \left(\frac{dt}{ds} \frac{d}{dt} \gamma(t) \right),$$

gdzie $p = \gamma(t)$ oraz na mocy (1.6)

$$\frac{dt}{ds} = |\dot{\gamma}(t)|^{-1}.$$

Zatem

$$K(p) = \frac{1}{|\dot{\gamma}(t)|} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} \right) = \frac{1}{|\dot{\gamma}(t)|^2} \left[\ddot{\gamma}(t) - \frac{\dot{\gamma}(t) \cdot \ddot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|^2} \dot{\gamma}(t) \right], \quad (1.8)$$

bowiem, pamiętając, że $|\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{\dot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t)}$, mamy

$$\frac{d}{dt} \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} = -\frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|^2} \frac{d}{dt} |\dot{\gamma}(t)| + \frac{\ddot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} = -\frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|^2} \frac{\dot{\gamma}(t) \cdot \ddot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} + \frac{\ddot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}. \quad (1.9)$$

Zauważmy, że wyrażenie w nawiasie kwadratowym w (1.8) jest składową wektora przyspieszenia $\ddot{\gamma}(t)$ prostopadłą do wektora prędkości $\dot{\gamma}(t)$. Jednocześnie, dzięki $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$, otrzymamy

$$\begin{aligned} |K|^2 &= \frac{|\ddot{\gamma}|^2}{|\dot{\gamma}|^4} - \frac{(\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma})^2}{|\dot{\gamma}|^6} = \frac{(\ddot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma})(\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma}) - (\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma})(\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma})}{|\dot{\gamma}|^6} \\ &= \frac{|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|^2}{|\dot{\gamma}|^6}. \end{aligned}$$

Relacja

$$|K(p)| = \frac{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|}{|\dot{\gamma}(t)|^3}, \quad (1.10)$$

jest słuszna także dla krzywych w przestrzeni $\mathbb{R}^3$, bowiem użyte relacje w żaden sposób nie korzystają z zerowania się trzeciej składowej wektora parametryzacji!

PRZYKŁAD 1.12. Wyznaczyć krzywiznę elipsy sparametryzowanej jako

$$\gamma(t) = [a \cos(t), b \sin(t)], \quad t \in [0, 2\pi].$$

PRZYKŁAD 1.13. Niech krzywa regularna będzie zadana w postaci równania algebraicznego (uwikłanego) $f(x, y) = 0$. Jej (jeden z wielu) uwikłany opis parametryczny określony jest przez układ równań (por. 1.5)

$$\begin{cases} \dot{x} = -\partial_y f \\ \dot{y} = \partial_x f \end{cases}$$

Aby wyznaczyć krzywiznę, która w tej notacji przybiera postać,

$$|K| = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

wyznaczamy

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -(\partial_{xy}^2 f \dot{x} + \partial_{yy}^2 f \dot{y}) \\ \ddot{y} &= \partial_{xx}^2 f \dot{x} + \partial_{xy}^2 f \dot{y}.\end{aligned}$$

Ostatecznie

$$|K| = \frac{|(\partial_{xx}^2 f)(\partial_y f)^2 - 2(\partial_{xy}^2 f)(\partial_x f)(\partial_y f) + (\partial_{yy}^2 f)(\partial_x f)^2|}{|\nabla f|^3}.$$

PRZYKŁAD 1.14. Wyznaczyć krzywiznę liścia Kartezjusza $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ w punkcie $(3a/2, 3a/2)$.

Ponadto, zauważmy, że

Tw. 1.7 (Równania Freneta). Jeśli $\gamma(s)$ jest parametryzacją łukową krzywej płaskiej, to

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} T \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & K \\ -K & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Dowód: Pokazaliśmy, że $T'(s) = K(p)N(s)$. Wystarczy zatem pokazać, że $N'(s) = -K(p)T(s)$. W ogólności

$$N' = \alpha_1 T + \alpha_2 N,$$

gdzie $\alpha_1 = T \cdot N'$ oraz $\alpha_2 = N \cdot N'$. Ponieważ $N \cdot N = 1$, to $N \cdot N' = \alpha_2 = 0$. Dalej $N \cdot T = 0$, zatem

$$N' \cdot T + T' \cdot N = 0$$

i w konsekwencji $\alpha_1 = T \cdot N' = -N \cdot T' = -KN \cdot N = -K$. $\square$

1.5. Krzywe w przestrzeni

Równanie parametryczne krzywej w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ma postać

$$\gamma(t) = [\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)], \quad t \in I.$$

PRZYKŁAD 1.15. Równanie helisy o promieniu R i skoku $2\pi b$ ma postać

$$\gamma(t) = [R \cos t, R \sin t, bt], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Helisa ta leży na powierzchni walca $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2, z \in \mathbb{R}\}$.

PRZYKŁAD 1.16. Pokazać, że krzywa

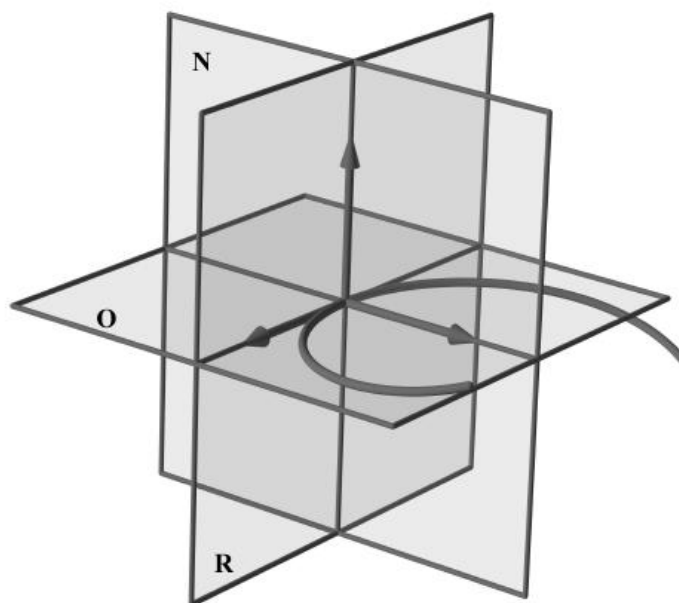
$$\gamma(t) = [a \sin^2 t, b \sin t \cos t, c \cos t], \quad t \in [0, 2\pi]$$

leży na powierzchni trójosiowej elipsoidy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

PRZYKŁAD 1.17. Dana jest krzywa:

$$\gamma(t) = [e^t \cos t, e^t \sin t, e^t], \quad t \in [-\pi, \pi].$$



Rysunek 1.1. Reper (trójscian) Freneta wraz z charakterystycznymi płaszczyznami: ściśle styczną (osculating plane) (O), normalną (normal plane) (N), prostującą (rectifying plane) (R)

- (1) Wyznaczyć wektor styczny do krzywej w $t = 0$.
- (2) Obliczyć jej długość.
- (3) Wyznaczyć parametryzację łukową tej krzywej.

DEF. 1.8. *Reperem Freneta* krzywej w $\mathbb{R}^3$ o parametryzacji łukowej $\gamma(s)$ nazywamy układ wersorów $\{T, N, B\}$, gdzie

$$T(s) = \gamma'(s), \quad N(s) = \frac{T'(s)}{|T'(s)|}, \quad B(s) = T(s) \times N(s).$$

Wersory te nazywa się odpowiednio: stycznym, normalnym i binormalnym.

Krzywą, dla której reper Freneta stanowi w każdym punkcie bazę w $\mathbb{R}^3$ nazywamy *biregularną*.

Zauważmy, że

$$B' = T' \times N + T \times N' = T \times N'.$$

Zatem wektor B' jest prostopadły zarówno do B , jak i do T . Zatem musi być współliniowy z N .

Tw. 1.8. *Dla krzywej biregularnej w dowolnej parametryzacji $\gamma(t)$ wersory Freneta mają postać:*

$$T(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}, \quad B(t) = \frac{\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|}, \quad (1.12)$$

$$N(t) = B(t) \times T(t) \quad (1.13)$$

$$= \frac{(\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)) \times \dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)| |\dot{\gamma}(t)|} = \frac{|\dot{\gamma}(t)|}{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|} \left[\ddot{\gamma}(t) - \frac{\dot{\gamma}(t) \cdot \ddot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|^2} \dot{\gamma}(t) \right]. \quad (1.14)$$

Dowód: Aby pokazać (1.13), zauważmy, że z definicji $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$ oraz prostopadłości wektorów $\mathbf{T}$ i $\mathbf{N}$ wynika, że

$$\mathbf{B} \times \mathbf{T} = (\mathbf{T} \times \mathbf{N}) \times \mathbf{T} = -\mathbf{T} \times (\mathbf{T} \times \mathbf{N}) = -(\mathbf{N}(\mathbf{N} \cdot \mathbf{T}) - \mathbf{N}|\mathbf{T}|^2) = \mathbf{N}.$$

(1.14) wynika ze wzoru na podwójny iloczyn wektorowy

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

Podkreślmy, że wzór (1.14) wynika także bezpośrednio z (1.7) oraz (1.8). $\square$

PRZYKŁAD 1.18. Reper Freneta dla helisy $\gamma(t) = [R \cos t, R \sin t, bt]$, $t \in \mathbb{R}$ ma postać

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &= \frac{[-R \sin t, R \cos t, b]}{\sqrt{R^2 + b^2}}, \\ \mathbf{N}(t) &= [-\cos t, -\sin t, 0], \\ \mathbf{B}(t) &= \frac{[b \sin t, -b \cos t, R]}{\sqrt{R^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

Parametryzacja łukowa helisy jest postaci:

$$\gamma(s) = \left[R \cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}, R \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{R^2 + b^2}} \right]. \quad (1.15)$$

Krzywizna helisy jest stała i wynosi

$$K(p) = |\gamma''(s)| = \frac{R}{R^2 + b^2}.$$

Równania Freneta (1.11) można uogólnić na przypadek krzywej w przestrzeni przyjmując w parametryzacji łukowej relacje

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & K & 0 \\ -K & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

Funkcja τ jest wówczas drugą wielkością charakteryzującą krzywiznę krzywej w $\mathbb{R}^3$ określoną jako współczynnik proporcjonalności w relacji $\mathbf{B}' = -\tau \mathbf{N}$.

DEF. 1.9. Skręceniem krzywej nazywamy funkcję $\tau(p) = -\mathbf{B}'(s) \cdot \mathbf{N}(s)$, gdzie $p = \gamma(s)$.

Tw. 1.9. Skręcenie krzywej biregularnej dane jest w dowolnej parametryzacji jako

$$\tau(p) = \frac{(\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)) \cdot \ddot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|^2}.$$

PRZYKŁAD 1.19. Skręcenie dla helisy jest stałe i wynosi

$$\tau(p) = \frac{b}{R^2 + b^2}.$$

Mamy następujące własności związane z funkcjami krzywizny $K(p)$ i $\tau(p)$:

FAKT 1. Skręcenie krzywej znika tożsamościowo wtedy i tylko wtedy, gdy krzywa jest płaska.

Rzeczywiście, jeśli $\tau \equiv 0$, to z (1.16) wynika, że $\mathbf{B}'(s) = 0$ i $\mathbf{B}(s) = \mathbf{B}_0$ jest stałym wektorem. Ponieważ $\mathbf{B}_0 = \mathbf{T} \times \mathbf{N} = \gamma'(s) \times \gamma''(s)/K$, to $\gamma'(s) \perp \mathbf{B}_0$. Dalej

$$0 = \gamma'(s) \cdot \mathbf{B}_0 = \frac{d}{ds}(\gamma(s) \cdot \mathbf{B}_0).$$

Zatem $\gamma(s) \cdot \mathbf{B}_0 = \text{const.} = \gamma(s_0) \cdot \mathbf{B}_0$. W konsekwencji

$$(\gamma(s) - \gamma(s_0)) \cdot \mathbf{B}_0 = 0$$

i $\gamma(s)$ leży w płaszczyźnie prostopadłej do $\mathbf{B}_0$.

FAKT 2. Krzywizna znika tożsamościowo, wtedy i tylko wtedy, gdy krzywa jest (fragmentem) prostą.

Znikanie krzywizny oznacza, że $\gamma''(s) = 0$, co oznacza, że $\gamma'(s) = \mathbf{v}$ jest stałym wektorem i w konsekwencji

$$\gamma(s) = (s - s_0)\mathbf{v} + \gamma(s_0).$$

Powyższa parametryzacja opisuje prostą (lub jej fragment).

FAKT 3. Jeśli skręcenie krzywej znika tożsamościowo i jej krzywizna K jest stała, to krzywa jest (fragmentem) okręgiem o promieniu $1/K$.

Zauważmy, że wektor $\mathbf{r}(s) = \gamma(s) + \frac{1}{K(p)}\mathbf{N}(s)$ opisuje położenie środka krzywizny $\gamma(s)$ w punkcie $p = \gamma(s)$. Jeśli krzywizna jest stała, to

$$\mathbf{r}'(s) = \gamma'(s) + \frac{1}{K}\mathbf{N}'(s) = \gamma'(s) + \frac{1}{K}(-K\mathbf{T}) = \gamma'(s) - \gamma'(s) = 0.$$

Zatem $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_0$ ma stałe położenie i jednocześnie $|\gamma(s) - \mathbf{r}_0| = 1/K$. Zatem $\gamma(s)$ jest okręgiem (lub jego fragmentem) o środku w $\mathbf{r}_0$ i promieniu $1/K$.

FAKT 4. Jeśli skręcenie i krzywizna krzywej są stałe, to krzywa jest (fragmentem) helisy.

Zauważmy najpierw, że dla helisy mamy stałą krzywiznę i skręcenie dane przez

$$K = \frac{R}{R^2 + b^2}, \quad \tau = \frac{b}{R^2 + b^2}.$$

Zatem przy zadanym K i τ parametry helisy są wyznaczone przez

$$b = \frac{\tau}{K^2 + \tau^2}, \quad R = \frac{K}{K^2 + \tau^2}.$$

Niech $\gamma(s)$ będzie parametryzacją łukową krzywej o stałej krzywiznie K i skręceniu τ . Zauważmy, że na podstawie (1.16)

$$\frac{d}{ds}(\tau\mathbf{T} + K\mathbf{B}) = \tau K\mathbf{N} - K\tau\mathbf{N} = 0$$

zatem wektor $\mathbf{v} = \tau\mathbf{T} + K\mathbf{B}$ pozostaje stały. Niech wyznacza on kierunek $\mathbf{e}_3 = [0, 0, 1]$ układu współrzędnych:

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{\tau}{\sqrt{K^2 + \tau^2}}\mathbf{T} + \frac{K}{\sqrt{K^2 + \tau^2}}\mathbf{B}. \quad (1.17)$$

Jeśli parametryzacja $\gamma(s)$ miałyby opisywać helisę, to, używając argumentów dynamicznych, można by było rozłożyć $\gamma(s)$ na jednostajny ruch postępowy w kierunku $\mathbf{e}_3$, który zgodnie z (1.15) byłby postaci

$$\frac{bs}{\sqrt{R^2 + b^2}}\mathbf{e}_3 = \frac{\tau s}{\sqrt{K^2 + \tau^2}}\mathbf{e}_3$$

oraz na ruch po okręgu (lub jego fragmencie) w płaszczyźnie prostopadłej do e_3 ,

$$\mathbf{r}(s) = \gamma(s) - \frac{\tau s}{\sqrt{K^2 + \tau^2}} \mathbf{e}_3.$$

Do pokazania pozostaje zatem, że $\mathbf{r}(s)$ opisuje tenże ruch po okręgu. Zauważmy, że

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{r}(s) \cdot \mathbf{e}_3) = \mathbf{r}'(s) \cdot \mathbf{e}_3 = \left(\gamma'(s) - \frac{\tau}{\sqrt{K^2 + \tau^2}} \mathbf{e}_3 \right) \cdot \mathbf{e}_3 = T \cdot \mathbf{e}_3 - \frac{\tau}{\sqrt{K^2 + \tau^2}}.$$

Uwzględniając (1.17) otrzymamy

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{r}(s) \cdot \mathbf{e}_3) = \frac{\tau}{\sqrt{K^2 + \tau^2}} |T|^2 - \frac{\tau}{\sqrt{K^2 + \tau^2}} = 0.$$

Zatem $\mathbf{r}(s) \cdot \mathbf{e}_3 = \text{const} = \mathbf{r}(s_0) \cdot \mathbf{e}_3$. Wybierzmy układ odniesienia, tak aby $\mathbf{r}(s_0)$ był jego początkiem. W takim układzie odniesienia $\mathbf{r}(s) \cdot \mathbf{e}_3 = 0$, zatem krzywa $\mathbf{r}(s)$ leży w płaszczyźnie prostopadłej do e_3 . Pozostaje do wykazania, że $\mathbf{r}(s)$ ma stałą krzywiznę. W tym celu obliczmy

$$\mathbf{r}'(s) = T(s) - \frac{\tau}{\sqrt{K^2 + \tau^2}} \mathbf{e}_3$$

oraz $\mathbf{r}''(s) = KN(s)$ i zauważmy, że

$$|\mathbf{r}'(s)|^2 = 1 + \frac{\tau^2}{K^2 + \tau^2} - \frac{2\tau}{\sqrt{K^2 + \tau^2}} T(s) \cdot \mathbf{e}_3 = \frac{K^2}{K^2 + \tau^2} \neq 1,$$

co oznacza, że parametryzacja przy użyciu s nie jest łukowa dla krzywej $\mathbf{r}(s)$. Niemniej krzywiznę możemy obliczyć na podstawie ogólnego wzoru (1.10). Otrzymamy

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(s) \times \mathbf{r}''(s) &= \left[T(s) - \frac{\tau}{\sqrt{K^2 + \tau^2}} \mathbf{e}_3 \right] \times KN(s) = KB(s) - \frac{K\tau}{\sqrt{K^2 + \tau^2}} \mathbf{e}_3 \times N(s) \\ &= KB(s) - \frac{K\tau}{\sqrt{K^2 + \tau^2}} \left[\frac{\tau}{\sqrt{K^2 + \tau^2}} \mathbf{B}(s) + \frac{K}{\sqrt{K^2 + \tau^2}} (-T(s)) \right] \\ &= \frac{K^3}{K^2 + \tau^2} \mathbf{B}(s) + \frac{K^2\tau}{K^2 + \tau^2} T(s). \end{aligned}$$

Ostatecznie krzywizna K_1 krzywej $\mathbf{r}(s)$ dana jest przez

$$K_1 = \frac{|\mathbf{r}'(s) \times \mathbf{r}''(s)|}{|\mathbf{r}'(s)|^3} = \frac{K^2 + \tau^2}{K}.$$

Zatem $\mathbf{r}(s)$ opisuje okrąg (lub jego fragment) o promieniu $K/(K^2 + \tau^2)$ w płaszczyźnie prostopadłej do e_3 .

FAKT 5. Funkcje $K(p)$ oraz $\tau(p)$ określają krzywą w $\mathbb{R}^3$ z dokładnością do afinicznego przekształcenia $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $h(x) = Rx + a$, gdzie $a \in \mathbb{R}^3$ oraz $R \in \text{SO}(3)$ jest obrotem (właściwym) w $\mathbb{R}^3$.

1.6. Łuki i rozmaitości wymiaru 1

DEF. 1.10. *Homeomorfizmem* zbiorów X i Y nazywamy ciągłe przekształcenie $h : X \rightarrow Y$, które jest bijekcją (różnowartościowe i na) i istnieje do niego ciągłe przekształcenie odwrotne.

Odwzorowanie zbioru otwartego $f : G \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest *dyfeomorfizmem*, jeśli jest różnowartościowe, nieosobliwe (rzęd różniczki df jest k), klasy C^1 (gładkie) oraz odwrotne do niego jest ciągłe.

Z nieosobliwości f wynika, że dyfeomorfizm istnieje tylko przy $m \geq k$. Przy $m = k$ każde różnowartościowe i nieosobliwe (nieznikający jacobian $\det df$) odwzorowanie klasy C^1 jest dyfeomorfizmem oraz odwzorowanie odwrotne też jest dyfeomorfizmem.

DEF. 1.11. Łukiem L nazywamy dyfeomorficzny obraz przedziału otwartego $I \subset \mathbb{R}$, tzn. $L = h(I)$, gdzie $h : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest dyfeomorfizmem.

PRZYKŁAD 1.20. Sprawdzić, czy następujące krzywe są łukami:

- (1) krzywa określona parametrycznie jako $\gamma(t) = [t, t^3]$, $t \in \mathbb{R}$,
- (2) krzywa określona parametrycznie jako $\gamma(t) = [t^2, t^6]$, $t \in \mathbb{R}$,
- (3) krzywa określona parametrycznie jako $\gamma(t) = [R \cos t, R \sin t]$, $t \in [0, 2\pi]$,
- (4) krzywa określona parametrycznie jako $\gamma(t) = [R \cos t, R \sin t]$, $t \in (0, 4\pi)$,
- (5) helisa $\gamma(t) = [R \cos t, R \sin t, bt]$, $t \in \mathbb{R}$.

PRZYKŁAD 1.21. Niech S^1 oznacza jednostkowy okrąg. Odwzorowanie $h : (-\pi, \pi] \rightarrow S^1$ określone jako

$$h(t) = [\cos t, \sin t]$$

jest różniczkowalną bijekcją. Czy odwzorowanie odwrotne do niego jest ciągłe?

Rozw. h jako bijekcja ma odwzorowanie odwrotne $h^{-1} : S^1 \rightarrow (-\pi, \pi]$. Pamiętając, że $\arctg : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ możemy zapisać

$$h^{-1}(x, y) = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x} & x > 0 \\ \pi + \arctg \frac{y}{x} & x < 0, y \geq 0 \\ -\pi + \arctg \frac{y}{x} & x < 0, y < 0. \end{cases}$$

Funkcja h^{-1} nie jest jednak ciągła w $(-1, 0)$! Rzeczywiście

$$h^{-1}(-1, y) = \begin{cases} \pi + \arctg(-y) & y \geq 0 \\ -\pi + \arctg(-y) & y < 0. \end{cases}$$

i w konsekwencji

$$\lim_{y \rightarrow \pm 0} h^{-1}(-1, y) = \pm \pi.$$

Zatem funkcja odwrotna nie jest ciągła w $(-1, 0)$. Funkcja odwrotna do funkcji ciągłej nie musi być ciągła! $\square$

DEF. 1.12. *Rozmaitością różniczkową wymiaru 1* nazywamy zbiór L , który jest sumą pewnej rodziny łuków L_α otwartych względem L ,

$$L = \bigcup_{\alpha} L_{\alpha},$$

tzn. istnieją zbiory otwarte $I_\alpha \subset \mathbb{R}$ oraz dyfeomorfizmy $h_\alpha : I_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^m$, takie że stanowią one pokrycie L .

Pary (I_α, h_α) nazywamy *mapami*, a zbiór map $\{(I_\alpha, h_\alpha)\}$ tworzy *atlas* rozmaitości wymiaru 1.

PRZYKŁAD 1.22. Jednostkowy okrąg o środku w początku układu współrzędnych jest 1-wymiarową rozmaitością. Atlas tworzą np. mapy $\{(I_1, h_1), (I_2, h_2)\}$, gdzie $h_1 : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $h_2 : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $h_1(t) = h_2(t) = [\cos t, \sin t]$.

FAKT 1. Każdy łuk jest rozmaitością wymiaru 1, która ma tylko jedną mapę.

FAKT 2. Jeśli krzywa jest rozmaitością wymiaru 1, to w każdym jej punkcie można wyznaczyć prostą styczną.

FAKT 3. Niech krzywa określona będzie jako $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$. Jeśli $f : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (G – zbiór otwarty w $\mathbb{R}^2$) jest odwzorowaniem klasy C^1 i $\nabla f(x, y) \neq 0$ wzdłuż całej krzywej, to krzywa jest rozmaitością wymiaru 1. Zatem regularność krzywej gwarantuje, że jest ona rozmaitością wymiaru 1.

Rozdział 2

Powierzchnie w przestrzeni trójwymiarowej

W tym rozdziale rozpatrywać będziemy powierzchnie zanurzone w $\mathbb{R}^3$. Od dostatecznej regularnej powierzchni będziemy wymagać, aby w każdym jej punkcie istniała jednoznacznie określona płaszczyzna styczna i aby lokalnie powierzchnia była homeomorficzna (dyfeomorficzna) ze zbiorem otwartym na płaszczyźnie.

2.1. Równania powierzchni

Przypomnijmy podstawowe fakty związane z różniczkowaniem odwzorowań $F : G \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$.

DEF. 2.1 (Różniczka i różniczkowalność odwzorowań). Odwzorowanie $F : G \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest różniczkowalne w punkcie $x_0 \in G$, jeśli istnieje jego różniczka $dF|_{x_0}$, tzn. liniowe przekształcenie $dF|_{x_0} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ takie że

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{|h|} (F(x_0 + h) - F(x_0) - dF|_{x_0}(h)) = 0.$$

FAKT 2.1. Jeśli G jest zbiorem otwartym (otoczeniem) w $\mathbb{R}^k$ i funkcja $F : G \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in G$, to

- (1) F ma dokładnie jedną różniczkę w punkcie x_0 ,
- (2) istnieją pochodne cząstkowe $\partial_i F_j(x_0)$ i macierz różniczki (macierz Jacobiego) ma postać

$$dF|_{x_0} = [\partial_i F_j], \quad i = 1, \dots, k, \quad j = 1, \dots, m,$$

gdzie j numeruje wiersze oraz i numeruje kolumny,

- (3) działanie różniczki na wektor $h \in \mathbb{R}^k$ opisuje mnożenie macierzy, tzn.

$$(dF|_{x_0}(h))_j = \sum_{i=1}^k \partial_i F_j(x_0) h_i.$$

Aby odwzorowanie $F : G \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ było różniczkowalne w punkcie x_0 wystarczy aby istniały pochodne cząstkowe i były ciągłe w x_0 . Jeśli $k = m$, to macierz Jacobiego jest kwadratowa i jej wyznacznik $\det dF|_{x_0}$ nazywamy jacobianem odwzorowania F w punkcie x_0 .

Omówimy dwa najważniejsze sposoby określania powierzchni:

Równanie parametryczne

DEF. 2.2. Równaniem parametrycznym powierzchni S nazywamy gładkie odwzorowanie $r : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ zbioru otwartego $U \subseteq \mathbb{R}^2$, takie że $\text{rank } dr(u, v) = 2$ dla każdego $(u, v) \in U$ oraz $r(U) = S$,

$$r(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)], \quad (u, v) \in U.$$

Odwzorowanie $\mathbf{r}$ nazywamy (globalną) *parametryzacją powierzchni*, a samą powierzchnię nazywamy *płatem*.

Ustalmy v_0 . Odwzorowanie $u \mapsto \mathbf{r}(u, v_0)$ definiuje krzywą na powierzchni S , którą nazywać będziemy *linią współrzędnościową* przy ustalonym $v = v_0$. Pochodna $\partial_u \mathbf{r}$ opisuje zatem wektory styczne do omawianej linii współrzędnościowej. Podobnie odwzorowanie $v \mapsto \mathbf{r}(u_0, v)$ przy ustalonym $u = u_0$ definiuje drugą krzywą współrzędnościową na powierzchni S , a $\partial_v \mathbf{r}$ opisuje wektory styczne do niej. Obie krzywe tworzą krzywoliniową siatkę współrzędnych na S odpowiadającą współrzędnym w U .

FAKT 2.2. Następujące warunki są równoważne:

- (1) $\text{rank } d\mathbf{r} = 2$,
- (2) wektory $\partial_u \mathbf{r}$ oraz $\partial_v \mathbf{r}$ są liniowo niezależne w każdym punkcie powierzchni,
- (3) $\partial_u \mathbf{r} \times \partial_v \mathbf{r} \neq \mathbf{0}$.

Wykres funkcji $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ określony jako $W_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in U\}$ (przez jawną postać jednej ze zmiennych wyrażonych jako funkcje pozostałych) wprowadza parametryzację postaci

$$\mathbf{r}(u, v) = [u, v, f(u, v)], \quad (u, v) \in U.$$

Zauważmy, że

$$d\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \partial_u f & \partial_v f \end{bmatrix}$$

i w każdym punkcie $\text{rank } d\mathbf{r} = 2$.

PRZYKŁAD 2.1. Parametryzacja $\mathbf{r}_g(x, y) = [x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}]$ z obszaru $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\}$ opisuje górną połowę sfery, a parametryzacja $\mathbf{r}_d(x, y) = [x, y, -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}]$ z tego samego obszaru U — jej dolną połowę.

Niech $\gamma(u) = [r(u), 0, z(u)]$ będzie regularną krzywą na płaszczyźnie XZ, dla której $r(u) > 0$. Krzywą tę możemy obrócić wokół osi Z otrzymując *powierzchnię obrotową* o równaniu parametrycznym

$$\mathbf{r}(u, \theta) = [r(u) \cos \theta, r(u) \sin \theta, z(u)], \quad (u, \theta) \in \mathbb{R} \times (0, 2\pi).$$

Odwzorowanie $\mathbf{r}(u, \theta)$ jest dyfeomorfizmem. Rzeczywiście

$$d\mathbf{r}(u, \theta) = \begin{bmatrix} r'(u) \cos \theta & -r(u) \sin \theta \\ r'(u) \sin \theta & r(u) \cos \theta \\ z'(u) & 1 \end{bmatrix}$$

i $\text{rank } d\mathbf{r} = 2$, chyba że

$$\begin{cases} r'(u) = 0 \\ z'(u) = 0 \end{cases}$$

co jest wykluczone przez regularność krzywej.

PRZYKŁAD 2.2. Zauważmy, że sfera o środku w początku układu współrzędnych i promieniu R powstaje z obrotu półokręgu $\gamma(u) = [R \cos u, 0, R \sin u]$, $u \in [-\pi/2, \pi/2]$ wokół osi Z o kąt $\theta \in [0, 2\pi)$. Odwzorowanie

$$\mathbf{r}(u, \theta) = [R \cos u \cos \theta, R \cos u \sin \theta, R \sin u], \quad (u, \theta) \in [-\pi/2, \pi/2] \times [0, 2\pi)$$

opisuje zatem sferę. Nie jest to jednak jej parametryzacja w sensie Def. 2.2, gdyż $U = [-\pi/2, \pi/2] \times [0, 2\pi)$ nie jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^2$! Problemy te sugerują, że sfera nie jest płatem!

Równanie algebraiczne

Dla $f : G \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ zbiór $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0\}$ (poziomica zerowa) określa powierzchnię dwuwymiarową.

DEF. 2.3. Spójna powierzchnia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0\}$ jest regularna, jeśli funkcja $f : G \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładka i $\nabla f \neq 0$ dla każdego punktu $(x, y, z) \in S$. Zapisujemy wówczas, że $S = f^{-1}(0)$.

Każda powierzchnia regularna jest lokalnie wykresem pewnej funkcji $g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

PRZYKŁAD 2.3. Płaszczyzna w $\mathbb{R}^3$ jest wyznaczona przez wektor normalny $\mathbf{n}$. Zatem równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $\mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}^3$ jest postaci

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0 \iff n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0.$$

PRZYKŁAD 2.4. Jednostronny stożek określony jest jako $S_g = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$. Mamy $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} - z$ i pochodne cząstkowe

$$\partial_x f = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \partial_y f = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

nie są określone w $(0, 0, 0)$. Funkcja f nie jest zatem gładka, a jednostronny stożek nie jest powierzchnią regularną!

Można próbować temu zaradzić wprowadzając alternatywny opis jednostronnego stożka jako górną połówkę całego stożka

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2, z \geq 0\}.$$

Wówczas wprowadzicie $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ jest gładka, ale $\nabla f(0, 0, 0) = 0$.

PRZYKŁAD 2.5. Elipsoida trójosiowa

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

jest powierzchnią regularną. Rzeczywiście $S = f^{-1}(0)$, gdzie

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1.$$

Funkcja f jest gładka oraz

$$\nabla f(x, y, z) = \left[\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2} \right] \neq 0$$

na całej powierzchni S .

2.2. Płaszczyzna styczna do powierzchni

Niech $S \subset \mathbb{R}^3$ będzie regularną powierzchnią i niech $p = \mathbf{r}(\mathbf{u}) \in S$ będzie jej dowolnym punktem leżącym w mapie $(\mathbf{r}, U)$.

DEF. 2.4. Wektor $\mathbf{v}$ jest styczny do powierzchni S w punkcie p , jeśli istnieje krzywa na S $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$, taka że $\gamma(0) = p$ oraz $\dot{\gamma}(0) = \mathbf{v}$.

Zbiór wszystkich wektorów stycznych w punkcie p tworzy *płaszczyznę styczną*, która jest izomorficzna (równoległa do) z 2-wymiarową podprzestrzenią wektorową nazywaną *przestrzenią styczną* $T_p S$.

Tw. 2.1. Przestrzeń styczna $T_p S$ jest wyznaczona przez obraz różniczki parametryzacji lokalnej mapy, tzn.

$$T_p S = \text{Im } dr|_u = dr|_u(\mathbb{R}^2) = \{v \in \mathbb{R}^3 : \exists w \in \mathbb{R}^2 \quad v = dr|_u(w)\}.$$

Dowód: Zwróćmy uwagę, że dzięki warunkowi $\text{rank } dr = 2$, obrazem różniczki jest 2-wymiarowa podprzestrzeń w $\mathbb{R}^3$. Niech $w \in \text{Im } dr|_u$. Wektor w wyznacza w obszarze U prostą $u + tw$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Jej obrazem w parametryzacji $r : U \rightarrow S$ jest krzywa

$$\gamma_w(t) = r(u + tw),$$

dla której $\gamma_w(0) = r(u) = p$ oraz $\dot{\gamma}_w(0) = dr|_u(w)$. Jednocześnie $\dot{\gamma}_w(0)$ wyznacza wektor z przestrzeni stycznej $v \in T_p S$. Zatem

$$\text{Im } dr|_u \subseteq T_p S. \quad (2.1)$$

Odwrotnie, niech $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ będzie krzywą wyznaczającą wektor styczny $v = \dot{\gamma}(0)$ w punkcie $p = \gamma(0)$. Dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ można przyjąć, że $\gamma(-\varepsilon, \varepsilon) \subset r(U)$. Wówczas $\gamma_v = r^{-1} \circ \gamma : U \rightarrow U$ jest krzywą na U taką że

$$\gamma_v(0) = r^{-1}(\gamma(0)) = r^{-1}(p) = u.$$

Przyjmijmy $\dot{\gamma}_v(0) = w$. W konsekwencji relacji $\gamma(t) = r \circ \gamma_v(t)$ mamy

$$\dot{\gamma}(0) = dr|_u(\dot{\gamma}_v(0)) = dr|_u(w).$$

Zatem wektor styczny $\dot{\gamma}(0) \in T_p S$ wyznacza w i $T_p S \subseteq \text{Im } dr|_u$. Uwzględniając (2.1) otrzymamy

$$T_p S = \text{Im } dr|_u.$$

□

Aby wyznaczyć płaszczyznę styczną w punkcie $p \in S$ należy przestrzeń styczną zaczepić w punkcie p dokonując przesunięcia o wektor r_0 określający położenie punktu p .

PRZYKŁAD 2.6. Niech

$$r(\theta, \varphi) = [\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta], \quad (\theta, \varphi) \in D = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$$

będzie parametryzacją płata na jednostkowej sferze. Odwzorowania

$$\gamma(\theta) = r(\theta, \varphi) \Big|_{\varphi=\text{const}}, \quad \gamma(\varphi) = r(\theta, \varphi) \Big|_{\theta=\text{const}}$$

określają siatkę linii współrzędnych na sferze, a wektory

$$e_\theta = \dot{\gamma}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{bmatrix}, \quad e_\varphi = \dot{\gamma}(\varphi) = \begin{bmatrix} -\sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

są styczne do tych linii w dowolnym punkcie $(\theta, \varphi) \in r(D)$. Na regularnym płacie $\{e_\theta, e_\varphi\}$ są one liniowo niezależne i napinają przestrzeń styczną,¹ tzn.

$$T_p S = \text{Span}\{e_\theta, e_\varphi\} = \{v \in \mathbb{R}^3 : v = v_1 e_\theta + v_2 e_\varphi, v_1, v_2 \in \mathbb{R}\}.$$

¹ Nie jest tak jednak na całej sferze! Na biegunie północnym $r(0, 0) = [0, 0, 1]$, e_φ jest wektorem zerowym i nie rozpina zatem przestrzeni stycznej!

Tę samą przestrzeń styczną otrzymamy używając Tw. 2.1 i obliczając $\text{Im } d\mathbf{r}|_{(\theta,\varphi)}(\mathbb{R}^2)$, gdzie

$$d\mathbf{r}|_{(\theta,\varphi)} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -\sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi \\ -\sin \theta & 0 \end{bmatrix}$$

Niech $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(\pi/4, 0) = [1, 0, 1]/\sqrt{2}$. Wówczas

$$d\mathbf{r}|_{(\pi/4,0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

oraz

$$\mathbf{e}_\theta(\pi/4, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_\varphi(\pi/4, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Niech $\mathbf{v} = [v_1, v_2] \in \mathbb{R}^2$. Wówczas wektory z $\mathbb{R}^3$ postaci

$$d\mathbf{r}|_{(\pi/4,0)}(\mathbf{v}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ -v_1 \end{bmatrix}$$

należą do przestrzeni stycznej w punkcie $[1, 0, 1]/\sqrt{2}$. Zauważmy, że są one postaci

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ -v_1 \end{bmatrix} = v_1 \mathbf{e}_\theta(\pi/4, 0) + v_2 \mathbf{e}_\varphi(\pi/4, 0).$$

Równanie przestrzeni stycznej najwygodniej wyznaczyć znajdując wektor prostopadły do niej

$$\mathbf{n} = \sqrt{2} \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wówczas przestrzeń styczna ma równanie $x + z = 0$, a płaszczyzna styczna do sfera w punkcie $[1, 0, 1]/\sqrt{2}$ ma równanie

$$x - \frac{1}{\sqrt{2}} + z - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \iff x + z = \sqrt{2}.$$

PRZYKŁAD 2.7. Niech

$$\mathbf{r}(u, v) = [u, v, R^2 - u^2 - v^2], \quad (u, v) \in D = \{(u, v) : u^2 + v^2 < R^2\}$$

będzie parametryzacją stożka parabolicznego. Wyznaczyć

- (1) Macierz różniczki parametryzacji i jej moduł,
- (2) Wektory styczne do linii współrzędnych,
- (3) Przestrzeń i powierzchnię styczną w dowolnym punkcie $p = \mathbf{r}(u_0, v_0)$,
- (4) Równanie powierzchni stycznej w układzie XYZ.

Zauważmy, że ogólnie dla regularnej powierzchni S i punktu $p = \mathbf{r}_0$ w lokalnej mapie $(\mathbf{r}, U)$ wektory $\partial_1 \mathbf{r}|_{\mathbf{r}_0}$ i $\partial_2 \mathbf{r}|_{\mathbf{r}_0}$ rozpinają płaszczyznę styczną w punkcie $\mathbf{r}_0$ i wektor $\partial_1 \mathbf{r}|_{\mathbf{r}_0} \times \partial_2 \mathbf{r}|_{\mathbf{r}_0}$ jest do niej normalny. Zatem płaszczyzna styczna ma równanie

$$(\partial_1 \mathbf{r}|_{\mathbf{r}_0} \times \partial_2 \mathbf{r}|_{\mathbf{r}_0}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0.$$

PRZYKŁAD 2.8. Niech $\mathbf{r}(u) = [u, h(u)]$, gdzie $h : U \rightarrow \mathbb{R}$. Wówczas

$$\partial_1 \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_1 h \end{bmatrix}, \quad \partial_2 \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_2 h \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r} = \begin{bmatrix} -\partial_1 h \\ -\partial_2 h \\ 1 \end{bmatrix}$$

i ostatecznie równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $p = \mathbf{r}_0$ ma postać

$$\partial_1 h(\mathbf{u}_0)(x - x_0) + \partial_2 h(\mathbf{u}_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Niech $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0\} = f^{-1}(0)$ będzie regularną powierzchnią.

TW. 2.2. Przestrzeń styczna w punkcie $p \in S$ jest wyznaczona przez jądro różniczki funkcji f w punkcie p , tzn.

$$T_p S = \text{Ker } df|_p.$$

Dowód: Rozpocznijmy od wyjaśnienia powyższego zapisu. Mamy

$$\text{Ker } df|_p = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : df|_p(\mathbf{v}) = 0\} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \partial_1 f(p)v_1 + \partial_2 f(p)v_2 + \partial_3 f(p)v_3 = 0\}.$$

Zatem należy pokazać, że $T_p S$ składa się z wektorów $\mathbf{v}$ prostopadłych do $\nabla f(p)$.

Niech $\mathbf{v} \in T_p S$ i krzywa $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ będzie taka, że $\gamma(0) = p$ oraz $\dot{\gamma}(0) = \mathbf{v}$. Ponieważ krzywa leży na powierzchni S , to $f(\gamma(t)) = 0$. Zatem

$$0 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\gamma(t)) = \nabla f(\gamma(0)) \cdot \dot{\gamma}(0) = \nabla f(p) \cdot \mathbf{v}.$$

W konsekwencji $\mathbf{v} \perp \nabla f(p)$ i $T_p S = \text{Ker } df|_p$ jako 2-wymiarowe podprzestrzenie. $\square$

Równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $p = \mathbf{r}_0$ do powierzchni $S = f^{-1}(0)$ ma zatem postać

$$df|_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \nabla f|_{\mathbf{r}_0} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0.$$

PRZYKŁAD 2.9. Dla sfery $S^1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$, gradient $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$ w punkcie $p = \mathbf{r}_0$ jest $\nabla f|_{\mathbf{r}_0} = 2\mathbf{r}_0$. Zatem równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $p = \mathbf{r}_0$ jest postaci

$$2\mathbf{r}_0 \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0 \iff xx_0 + yy_0 + zz_0 = R^2.$$

2.3. Gładkie odwzorowania powierzchni

DEF. 2.5. Niech $S \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią regularną i niech $p \in S$. Funkcję $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy gładką w otoczeniu punktu $p \in S$, jeśli istnieje lokalna parametryzacja otoczenia punktu $p \in r(U)$ taka że $f \circ r : U \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładka.

Funkcja gładka w jednej parametryzacji jest także gładka w innej parametryzacji, a więc pojęcie to nie zależy od wyboru parametryzacji.

DEF. 2.6. Niech S_1 i $S_2 \subset \mathbb{R}^3$ będą dwoma regularnymi powierzchniami. Funkcję $F : S_1 \rightarrow S_2$ nazywamy gładką w otoczeniu $\mathbf{r}_1(U)$, jeśli funkcja

$$\mathbf{r}_2^{-1} \circ F \circ \mathbf{r}_1 : U \rightarrow V$$

jest gładka.

W szczególności różniczką funkcji $F : S_1 \rightarrow S_2$ w punkcie $p = \mathbf{r}_1(\mathbf{u})$ jest

$$dF|_p = d(\mathbf{r}_2^{-1} \circ F \circ \mathbf{r}_1)|_{\mathbf{u}} \quad (2.2)$$

Różniczką $dF : T_p S_1 \rightarrow T_{F(p)} S_2$ wyznacza tzw. *odwzorowanie styczne* wektorów z przestrzeni stycznych.

2.4. Tensor metryczny

Niech $\mathbf{r}(u^1, u^2)$ będzie parametryzacją powierzchni regularnej S . Wówczas wektory styczne do linii współrzędnych $\partial_1 \mathbf{r}$ oraz $\partial_2 \mathbf{r}$ są liniowo niezależne w punktach $p \in S$, ale niekoniecznie prostopadłe. Iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^3$ indukuje iloczyn skalarny wektorów stycznych $\mathbf{v}_1 = \sum_i v_1^i \partial_i \mathbf{r}$, $\mathbf{v}_2 = \sum_j v_2^j \partial_j \mathbf{r}$ w $T_p S$ jako

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle_p := \sum_{i,j} v_1^i v_2^j (\partial_i \mathbf{r}|_p \cdot \partial_j \mathbf{r}|_p) = \sum_{ij} g_{ij}(p) v_1^i v_2^j$$

gdzie współczynniki²

$$g_{ij}(p) := \partial_i \mathbf{r}|_p \cdot \partial_j \mathbf{r}|_p, \quad i, j = 1, 2,$$

tworzą pole macierzy (na S lub U w zależności od potrzeb i wygody!)

$$\mathcal{G}(p) = [g_{ij}(p)] = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, następujące własności macierzy $\mathcal{G}$:

- (1) macierz $\mathcal{G}$ jest symetryczna,
- (2) $g_{11} = \partial_1 \mathbf{r} \cdot \partial_1 \mathbf{r} > 0$ oraz

$$g := \det \mathcal{G} = (\partial_1 \mathbf{r} \cdot \partial_1 \mathbf{r})(\partial_2 \mathbf{r} \cdot \partial_2 \mathbf{r}) - (\partial_1 \mathbf{r} \cdot \partial_2 \mathbf{r})^2 > 0$$

na mocy nierówności Schwartza. Zatem macierz $\mathcal{G}$ jest dodatnio określona.

- (3) Słuszna jest relacja

$$g = (\partial_1 \mathbf{r} \cdot \partial_1 \mathbf{r})(\partial_2 \mathbf{r} \cdot \partial_2 \mathbf{r}) - (\partial_1 \mathbf{r} \cdot \partial_2 \mathbf{r})^2 = |\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r}|^2.$$

- (4) Niech $w(u^1, u^2) = [w^1(u^1, u^2), w^2(u^1, u^2)]$ będzie zamianą parametryzacji S . W parametryzacji (w^1, w^2) mamy

$$\tilde{g}_{ij} := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w^j} = \sum_{k,m=1}^2 \frac{\partial u^k}{\partial w^i} \frac{\partial u^m}{\partial w^j} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^k} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^m} = \sum_{k,m=1}^2 \frac{\partial u^k}{\partial w^i} \frac{\partial u^m}{\partial w^j} g_{km}.$$

Zwykle stosuje się konwencję sumacyjną, w myśl której po powtarzającym się na różnym poziomie indeksie wykonywane jest sumowanie. Pozwala to na skrócenie zapisu i niezapisywanie symboli sum! Wzór

$$\tilde{g}_{ij} = \frac{\partial u^k}{\partial w^i} \frac{\partial u^m}{\partial w^j} g_{km}$$

określa regułę transformacji *tensora dwukrotnie kowariantnego*.

² W tradycyjnej notacji wprowadzonej przez Gaussa $g_{11} = E(u^1, u^2)$, $g_{12} = g_{21} = F(u^1, u^2)$, $g_{22} = G(u^1, u^2)$ były funkcjami na U nie na S .

DEF. 2.7 (Tensor metryczny i I forma podstawowa). Macierz $\mathcal{G}$ nazywa się *tensorem metrycznym*, natomiast formę kwadratową na S

$$I_1|_p(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_p, \quad \mathbf{v} \in T_p S$$

nazywa się *I formą podstawową powierzchni*.

Znajomość formy podstawowej $I_1(\mathbf{v})$ jest równoważna znajomości iloczynu skalarnego $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle_p$ i pozwala na obliczanie długości krzywych na S . Niech $\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow S$ będzie krzywą na S , $\gamma(t) = \mathbf{r}(u^1(t), u^2(t))$. Długość tej krzywej określa wzór

$$L(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{I_1(\dot{\gamma}(t))} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{11}(\dot{u}^1)^2 + 2g_{12}\dot{u}^1\dot{u}^2 + g_{22}(\dot{u}^2)^2} dt,$$

gdzie g_{ij} są funkcjami (u^1, u^2) , a zatem funkcjami parametru t .

Tensor metryczny pozwala zapisać pole płata $\mathbf{r}(U)$ jako

$$\iint_{\mathbf{r}(U)} dS = \iint_U |\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r}| du^1 du^2 = \iint_U \sqrt{g} du^1 du^2.$$

Ponieważ $g > 0$, to istnieje macierz odwrotna $\mathcal{G}^{-1} = [g^{ij}]$, gdzie $g^{ij}g_{jk} = \delta_k^i$. Reguła transformacyjna dla współczynników $\mathcal{G}^{-1} = [g^{ij}]$ jest postaci

$$\tilde{g}^{ij} = \frac{\partial w^i}{\partial u^k} \frac{\partial w^j}{\partial u^m} g^{km}$$

co uzasadnia, że $\mathcal{G}^{-1}$ jest *tensorem dwukrotnie kontrawariantnym*.

PRZYKŁAD 2.10. Dla płata sfery z Przykładu 2.6 mamy

$$\partial_\theta \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{bmatrix}, \quad \partial_\varphi \mathbf{r} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$g_{ij}(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

oraz

$$dl^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

PRZYKŁAD 2.11. Dla powierzchni $\mathbf{r}(u^1, u^2) = [u^1, u^2, R^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2]$ mamy

$$\partial_1 \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2u^1 \end{bmatrix}, \quad \partial_2 \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2u^2 \end{bmatrix},$$

zatem

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} 1 + 4(u^1)^2 & 4u^1 u^2 \\ 4u^1 u^2 & 1 + 4(u^2)^2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G}^{-1} = \frac{1}{\det \mathcal{G}} \begin{bmatrix} 1 + 4(u^2)^2 & -4u^1 u^2 \\ -4u^1 u^2 & 1 + 4(u^1)^2 \end{bmatrix},$$

gdzie $\det \mathcal{G} = 1 + 4(u^1)^2 + 4(u^2)^2$.

2.5. Równanie geodezyjnej

Niech

$$\mathcal{L}[u, \dot{u}] = \int_{t_1}^{t_2} f(u(t), \dot{u}(t)) dt$$

będzie funkcjonalem zależnym od funkcji $u(t)$ i jej pochodnej $\dot{u}(t)$ po parametrze t . Rachunek wariacyjny daje odpowiedź na pytanie o równanie, jakie spełnia funkcja $u(t)$, która ekstremalizuje funkcjonal $\mathcal{L}$.

Wariacją funkcjonálu $\mathcal{L}$ nazywamy przyrost wartości

$$\delta \mathcal{L} = \mathcal{L}[u + \delta u, \dot{u} + \delta \dot{u}] - \mathcal{L}[u, \dot{u}]$$

dla takiej niewielkiej zmiany postaci funkcji δu , która znika na brzegach, tzn.

$$\delta u(t_1) = \delta u(t_2) = 0. \quad (2.3)$$

Funkcjonal $\mathcal{L}$ będzie przyjmował wartość ekstremalną, jeśli $\delta \mathcal{L} = 0$. Zauważmy, że

$$\delta \mathcal{L} = \int_{t_1}^{t_2} \left(f(u + \delta u, \dot{u} + \delta \dot{u}) - f(u(t), \dot{u}(t)) \right) dt,$$

gdzie

$$f(u + \delta u, \dot{u} + \delta \dot{u}) = f(u, \dot{u}) + \partial_u f \delta u + \partial_{\dot{u}} f \delta \dot{u}.$$

Zatem

$$\delta \mathcal{L} = \int_{t_1}^{t_2} [\partial_u f \delta u + \partial_{\dot{u}} f \delta \dot{u}] dt.$$

Aby wyrazić $\delta \mathcal{L}$ tylko przy użyciu δu całkujemy przez części

$$\delta \mathcal{L} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\partial_u f \delta u - \underbrace{\frac{d}{dt} \partial_{\dot{u}} f \delta u}_{=0} \right) dt + \underbrace{\partial_{\dot{u}} f \delta u \Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\partial_u f - \frac{d}{dt} \partial_{\dot{u}} f \right) \delta u dt,$$

gdzie ostatni człon znika na mocy (2.3). Zatem $\delta \mathcal{L} = 0$, jeśli

$$\partial_u f - \frac{d}{dt} \partial_{\dot{u}} f = 0. \quad (2.4)$$

Rozwiązanie powyższego zwyczajnego równania liniowego daje funkcję $u(t)$, która ekstremalizuje funkcjonal $\mathcal{L}[u, \dot{u}]$. Jeśli funkcji $u(t)$ jest więcej, tzn. $\mathbf{u}(t) = [u^1(t), \dots, u^m(t)]$, wówczas (2.4) przyjmuje postać układu równań Eulera-Lagrange'a

$$\partial_{u^k} f - \frac{d}{dt} \partial_{\dot{u}^k} f = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (2.5)$$

Powracając do problemu najkrótszej (w sensie metryki zadawanej przez g) krzywej łączącej punkty $\mathbf{r}(u^1(t_1), u^2(t_1))$ oraz $\mathbf{r}(u^1(t_2), u^2(t_2))$ mamy

$$\mathcal{L}[u^1, \dot{u}^1, u^2, \dot{u}^2] = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}(u^1, u^2) \dot{u}^i \dot{u}^j} dt.$$

Zatem dla

$$f(u^1, \dot{u}^1, u^2, \dot{u}^2) = \sqrt{g_{ij}(u^1, u^2) \dot{u}^i \dot{u}^j}$$

otrzymamy dla $k = 1, 2$

$$\begin{aligned}\partial_{u^k} f &= \frac{1}{2G} \partial_k g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j \\ \partial_{\dot{u}^k} f &= \frac{1}{2G} g_{ij} (\delta_{ik} \dot{u}^j + \dot{u}^i \delta_{jk}) = \frac{1}{2G} (g_{kj} \dot{u}^j + g_{ik} \dot{u}^i),\end{aligned}$$

gdzie $\partial_k = \partial_{u^k}$ oraz $G(t) = \sqrt{g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j}$. Zatem (2.5) przyjmują postać

$$\frac{1}{G} \partial_k g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j - \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{G} (g_{kj} \dot{u}^j + g_{ik} \dot{u}^i) \right] = 0.$$

Aby uprościć otrzymane równania wprowadzamy nowy parametr τ , tak aby $d\tau = G(t)dt$. Wówczas

$$\partial_k g_{ij} \frac{du^i}{d\tau} \frac{du^j}{d\tau} - \frac{d}{d\tau} \left[g_{kj} \frac{du^j}{d\tau} + g_{ik} \frac{du^i}{d\tau} \right] = 0. \quad (2.6)$$

Ponieważ

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau} \left[g_{kj} \frac{du^j}{d\tau} + g_{ik} \frac{du^i}{d\tau} \right] &= \partial_i g_{kj} \frac{du^i}{d\tau} \frac{du^j}{d\tau} + \partial_j g_{ik} \frac{du^j}{d\tau} \frac{du^i}{d\tau} + g_{kj} \frac{d^2 u^j}{d\tau^2} + g_{ik} \frac{d^2 u^i}{d\tau^2} \\ &= (\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ik}) \frac{du^i}{d\tau} \frac{du^j}{d\tau} + 2g_{kj} \frac{d^2 u^j}{d\tau^2},\end{aligned}$$

to (2.6) przyjmie postać

$$(\partial_k g_{ij} - \partial_i g_{kj} - \partial_j g_{ik}) \frac{du^i}{d\tau} \frac{du^j}{d\tau} - 2g_{kj} \frac{d^2 u^j}{d\tau^2} = 0$$

i ostatecznie otrzymamy równanie różniczkowe geodezyjnej w postaci

$$g_{kj} \frac{d^2 u^j}{d\tau^2} + \underbrace{\frac{1}{2} (\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij})}_{\Gamma_{k|ij}} \frac{du^i}{d\tau} \frac{du^j}{d\tau} = 0, \quad k = 1, 2, \quad (2.7)$$

gdzie $\Gamma_{k|ij}$ są symbolami Christoffela (współczynnikami koneksji) I rodzaju lub

$$\frac{d^2 u^k}{d\tau^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{d\tau} \frac{du^j}{d\tau} = 0, \quad k = 1, 2,$$

gdzie

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k g^{mk} (\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij})$$

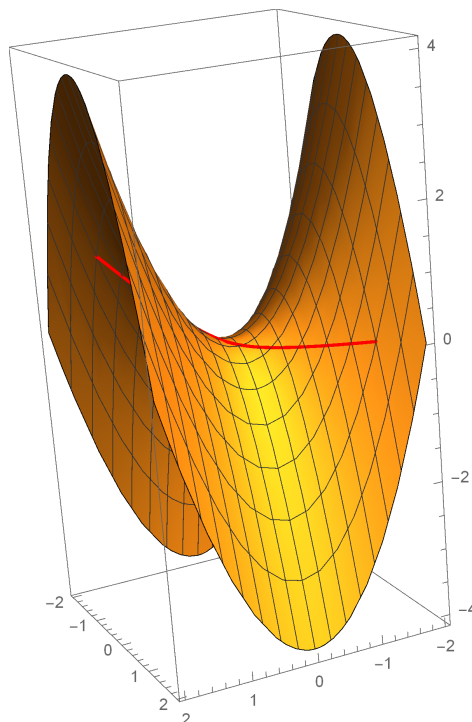
są współczynnikami Christoffela II rodzaju.

PRZYKŁAD 2.12. Wyznamy równania linii geodezyjnej dla powierzchni

$$\mathbf{r}(u_1, u_2) = [u_1, u_2, u_1^2 - u_2^2].$$

Wektory styczne do linii współrzędnych mają postać $\partial_1 \mathbf{r} = [1, 0, 2u_1]$, $\partial_2 \mathbf{r} = [0, 1, -2u_2]$. Stąd tensor metryczny i odwrotny do niego

$$\mathcal{G}(u_1, u_2) = \begin{bmatrix} 1 + 4u_1^2 & -4u_1 u_2 \\ -4u_1 u_2 & 1 + 4u_2^2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G}^{-1}(u_1, u_2) = \frac{1}{g} \begin{bmatrix} 1 + 4u_2^2 & 4u_1 u_2 \\ 4u_1 u_2 & 1 + 4u_1^2 \end{bmatrix},$$



Rysunek 2.1. Krzywa geodezyjna na powierzchni $r(u_1, u_2) = [u_1, u_2, u_1^2 - u_2^2]$ łącząca punkty $r(1.5, -1)$ oraz $r(-1.5, 1.5)$.

gdzie $g = 1 + 4u_1^2 + u_2^2$. W konsekwencji niezerowymi symbolami Christoffela

$$\Gamma_{k|ij} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij})$$

są $\Gamma_{1|11} = -\Gamma_{1|22} = 4u_1$, $\Gamma_{2|22} = -\Gamma_{2|11} = 4u_2$. Niezerowymi współczynnikami Christoffela II rodzaju są natomiast $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = 4u_1/g$, $\Gamma_{22}^2 = -\Gamma_{11}^2 = 4u_2/g$. Ostatecznie równania geodezyjnej są postaci

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + \frac{4u_1}{1 + 4u_1^2 + 4u_2^2}(\dot{u}_1^2 - \dot{u}_2^2) &= 0 \\ \ddot{u}_2 - \frac{4u_2}{1 + 4u_1^2 + 4u_2^2}(\dot{u}_1^2 - \dot{u}_2^2) &= 0 \end{aligned}$$

Rozwiązania tych równań w postaci pokazuje Rys. 2.1.

PRZYKŁAD 2.13. Wyznaczyć symbole Christoffela I i II rodzaju oraz równania linii geodezyjnej dla powierzchni

$$r(u_1, u_2) = [u_1, u_2, u_1 u_2].$$

PRZYKŁAD 2.14. Pokazać, że jeżeli linie współrzędnych są prostopadłe w każdym punkcie powierzchni S , tzn.

$$g = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{bmatrix},$$

to współczynniki Christoffela przyjmują postać:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}\partial_1 \ln g_{11}, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2}\partial_2 \ln g_{11}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2g_{11}}\partial_1 g_{22}$$

oraz

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} \partial_2 \ln g_{22}, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} \partial_1 \ln g_{22}, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2g_{22}} \partial_2 g_{11}.$$

PRZYKŁAD 2.15. Wykorzystując wyniki z poprzedniego Przykładu, pokazać, że równania geodezyjnych na sferze mają postać

$$\ddot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 = 0, \quad \ddot{\varphi} + 2 \operatorname{ctg} \theta \dot{\theta} \dot{\varphi} = 0.$$

2.6. Idea krzywizny Gaussa

W dowolnym punkcie $p = \mathbf{r}(\mathbf{u}) \in S$ jednostkowy wektor normalny do regularnej powierzchni S może być wyznaczony jako

- $\mathbf{n}_p = \frac{\partial_1 \mathbf{r}|_p \times \partial_2 \mathbf{r}|_p}{|\partial_1 \mathbf{r}|_p \times \partial_2 \mathbf{r}|_p|}$, gdy $p \in \mathbf{r}(U)$ i powierzchnia opisana jest parametrycznie oraz
- $\mathbf{n}_p = \frac{\nabla f|_p}{|\nabla f|_p|}$, gdy $p \in f^{-1}(0)$, a powierzchnia opisana przy pomocy równania.

Wektor normalny nie jest jednak określony jednoznacznie.

DEF. 2.8. *Orientacją* powierzchni S nazywa się wybór wektora normalnego $\mathbf{n}_p$ w każdym punkcie $p \in S$ w taki sposób, aby przyporządkowanie $p \mapsto \mathbf{n}_p$ było ciągłe.

Powierzchnię, na której można wprowadzić orientację, nazywa się *orientowalną*.

Każdy płat jest orientowalny, ale nie każda powierzchnia regularna jest orientowalna np. wstęga Möbiusa nie jest orientowalna³

$$\mathbf{r}(u_1, u_2) = \left[\cos u_1 + u_2 \cos \frac{u_1}{2} \cos u_1, \sin u_1 + u_2 \cos \frac{u_1}{2} \sin u_1, u_2 \sin \frac{u_1}{2} \right], \quad u_1, u_2 \in \mathbb{R}.$$

Jeśli pole wektorów $\mathbf{n}_p$ zadaje orientację, to pole $-\mathbf{n}_p$ zadaje orientację przeciwną. Spójna powierzchnia może mieć tylko te dwie orientacje.

Niech S będzie powierzchnią orientowalną z orientacjąadaną przez pole wektorów normalnych $\mathbf{n}_p$. Każdemu z nich, jako wektorowi o długości 1, odpowiada punkt s na jednostkowej sferze S^2 , dla którego $\mathbf{n}_p$ jest wektorem radialnym.

DEF. 2.9 (Odwzorowanie Gaussa). Odwzorowanie $N : p \in S \mapsto S^2 \ni s \equiv \mathbf{n}(p)$ przyporządkowujące punktowi p powierzchni S punkt $s \in S^2$ na sferze wyznaczony przez wektor radialny $\mathbf{n}(p)$ zaczepiony w środku sfery, nazywa się *odwzorowaniem sferycznym* lub *odwzorowaniem Gaussa*.

$N : S \rightarrow S^2$ jest gładkim odwzorowaniem dwóch powierzchni, o ile przyporządkowanie $p \mapsto \mathbf{n}(p)$ jest gładkie.

PRZYKŁAD 2.16. Odwzorowanie sferyczne dla płaszczyzny jest odwzorowaniem stałym: każdemu punktowi płaszczyzny odpowiada ten sam punkt na sferze.

Odwzorowanie sferyczne dla sfery jest identycznością.

Krzywiznę powierzchni w punkcie $p \in S$ Gauss wyobrażał sobie następująco: powierzchnia jest w okolicy punktu p tym bardziej zakrzywiona, im większym zmianom ulega wektor normalny do powierzchni w okolicy punktu p mierzony (z użyciem przekształcenia sferycznego) jako fragment powierzchni sfery.

³ $\mathbf{r}(\mathbb{R}^2)$ nie jest otwarte w $\mathbb{R}^3$, zatem to nie jest dyfeomorfizm!

Dokładniej: Niech $D_\epsilon \subset \mathbb{R}^2$ będzie otwartym dyskiem o promieniu ϵ i niech $p = \mathbf{r}(0, 0) \in S$. Wówczas krzywiznę Gaussa K_G (z dokładnością do znaku) można rozumieć jako

$$|K_G(p)| = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{|(N \circ \mathbf{r})(D_\epsilon)|}{|\mathbf{r}(D_\epsilon)|},$$

gdzie $|\cdot|$ oznacza pole powierzchni zbioru. Precyzyjną definicję odłożymy na później (Def. 2.14).

2.7. Własności przekształcenia sferycznego

Różniczka $dN_p : T_p S \rightarrow T_s S^2$ wyznacza, zgodnie z (2.2), odwzorowanie styczne przestrzeni wektorowych $T_p S$ oraz $T_s S^2$. Ponieważ $\mathbf{n}_p$ jest prostopadły zarówno do $T_p S$ jak i do $T_s S^2$, obie te przestrzenie mają to samo nachylenie w przestrzeni $\mathbb{R}^3$, są zatem izomorficzne.

DEF. 2.10. Liniowe przekształcenie $dN_p : T_p S \rightarrow T_s S^2 \simeq T_p S$ nazywa się operatorem Weingartena.

LEMAT 1. Operator Weingartena jest symetryczny względem indukowanego iloczynu skalarnego na S , tzn.

$$\langle dN_p(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle_p = \langle \mathbf{v}, dN_p(\mathbf{w}) \rangle_p. \quad (2.8)$$

Dowód: Jeśli $\mathbf{v} = \mathbf{w}$, to równość (2.8) wynika z symetryczności iloczynu skalarnego. Niech $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$. Równość (2.8) wystarczy sprawdzić na wektorach bazowych. Mamy

$$\forall \mathbf{w} \in T_p S \quad dN_p(\mathbf{w}) = \partial_1 \mathbf{n}_p w^1 + \partial_2 \mathbf{n}_p w^2.$$

W szczególności dla $\partial_1 \mathbf{r}|_p \equiv [1, 0]$ oraz $\partial_2 \mathbf{r}|_p \equiv [0, 1]$ mamy

$$dN_p(\partial_1 \mathbf{r}|_p) = \partial_1 \mathbf{n}_p, \quad dN_p(\partial_2 \mathbf{r}|_p) = \partial_2 \mathbf{n}_p \quad (2.9)$$

Różniczkując warunki ortogonalności

$$\begin{cases} \langle \partial_1 \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle_p = 0 \\ \langle \partial_2 \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle_p = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \langle \partial_2 \partial_1 \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle_p + \langle \partial_1 \mathbf{r}, \partial_2 \mathbf{n} \rangle_p = 0 \\ \langle \partial_1 \partial_2 \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle_p + \langle \partial_2 \mathbf{r}, \partial_1 \mathbf{n} \rangle_p = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

i odejmując je stronami otrzymamy

$$\langle \partial_1 \mathbf{r}, \partial_2 \mathbf{n} \rangle_p = \langle \partial_2 \mathbf{r}, \partial_1 \mathbf{n} \rangle_p = \langle \partial_1 \mathbf{n}, \partial_2 \mathbf{r} \rangle_p.$$

Z drugiej strony

$$\langle \partial_1 \mathbf{r}, dN(\partial_2 \mathbf{r}) \rangle_p = \langle \partial_1 \mathbf{r}, \partial_2 \mathbf{n} \rangle_p = \langle \partial_1 \mathbf{n}, \partial_2 \mathbf{r} \rangle_p = \langle dN(\partial_1 \mathbf{r}), \partial_2 \mathbf{r} \rangle_p,$$

co dowodzi, że dN_p jest symetryczny na wektorach bazowych. $\square$

Zatem wartości własne operatora Weingartena są rzeczywiste, a jego unormowane wektory własne tworzą bazę ortonormalną w każdej przestrzeni stycznej $T_p S$. Wykorzystamy te własności w dalszej części.

Nietrudno wyznaczyć macierz operatora Weingartena $\mathcal{N} = [\mathcal{N}_{ij}]$ w bazie $\{\partial_1 \mathbf{r}|_p, \partial_2 \mathbf{r}|_p\}$. Z definicji macierzy odwzorowania

$$dN(\partial_j \mathbf{r}) = \sum_i \mathcal{N}_{ji} \partial_i \mathbf{r}$$

zatem

$$\langle \partial_m \mathbf{r}, dN(\partial_j \mathbf{r}) \rangle_p = \sum_i \mathcal{N}_{ji} g_{im}. \quad (2.11)$$

Lewa strona na mocy (2.9) może być zapisana jako

$$\langle \partial_m \mathbf{r}, dN(\partial_j \mathbf{r}) \rangle_p = \langle \partial_m \mathbf{r}, \partial_j \mathbf{n} \rangle_p, \quad m, j = 1, 2.$$

Tradycyjnie (w notacji Gaussa) współczynniki te traktuje się jako funkcje na U oraz oznacza się jako

$$L(u^1, u^2) = \langle \partial_1 \mathbf{r}, \partial_1 \mathbf{n} \rangle_p, \quad M(u^1, u^2) = \langle \partial_1 \mathbf{r}, \partial_2 \mathbf{n} \rangle_p = \langle \partial_2 \mathbf{r}, \partial_1 \mathbf{n} \rangle_p, \quad N(u^1, u^2) = \langle \partial_2 \mathbf{r}, \partial_2 \mathbf{n} \rangle_p.$$

Zbierzmy je w macierz

$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}$$

i przepismy dzięki temu (2.11) jako $\mathcal{I} = \mathcal{G} \cdot \mathcal{N}$. W konsekwencji

$$\mathcal{N} = \mathcal{G}^{-1} \cdot \mathcal{I} = \frac{1}{g} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} = \frac{1}{g} \begin{bmatrix} GL - FM & GM - FN \\ EM - FL & EN - FM \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że niezmienniki przekształcenia dN_p określone przez $\det \mathcal{N}$ i $\text{tr} \mathcal{N}$ wynoszą odpowiednio

$$\det \mathcal{N} = \frac{LN - M^2}{GE - F^2}, \quad (2.12)$$

$$\text{tr} \mathcal{N} = \frac{GL - 2FM + EN}{GE - F^2} \quad (2.13)$$

Z uwagi na warunki ortogonalności (2.10) współczynniki L, M, N mogą być wyznaczone tylko w oparciu o znajomość parametryzacji. Rzeczywiście

$$\langle \partial_i \mathbf{r}, \partial_j \mathbf{n} \rangle_p = -\langle \mathbf{n}, \partial_{ij}^2 \mathbf{r} \rangle_p, \quad \text{oraz} \quad \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r},$$

zatem

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{\sqrt{g}} (\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r}) \cdot \partial_{11}^2 \mathbf{r} \\ M &= -\frac{1}{\sqrt{g}} (\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r}) \cdot \partial_{12}^2 \mathbf{r} \\ N &= -\frac{1}{\sqrt{g}} (\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r}) \cdot \partial_{22}^2 \mathbf{r} \end{aligned} \quad (2.14)$$

DEF. 2.11 (II forma podstawowa powierzchni). II formą podstawową powierzchni nazywamy formę kwadratową określoną na S jako

$$I_2|_p(\mathbf{v}) = -\langle dN_p(\mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle_p$$

Jeśli $\mathbf{v} = v^1 \partial_1 \mathbf{r} + v^2 \partial_2 \mathbf{r}$, to

$$\begin{aligned} I_2|_p(\mathbf{v}) &= -\langle v^1 dN(\partial_1 \mathbf{r}) + v^2 dN(\partial_2 \mathbf{r}), v^1 \partial_1 \mathbf{r} + v^2 \partial_2 \mathbf{r} \rangle_p \\ &= -[v^1 \ v^2] \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Powyższy wzór oznacza, że macierzą formy I_2 jest $-\mathcal{I}$.

PRZYKŁAD 2.17. Wyznamy przekształcenie sferyczne, operator Weingartena i jego macierz w bazie $\{\partial_1 \mathbf{r}, \partial_2 \mathbf{r}\}$ dla powierzchni

$$\mathbf{r}(u_1, u_2) = [u_1, u_2, u_1^2 - u_2^2].$$

Wektory styczne do linii współrzędnych mają postać $\partial_1 \mathbf{r} = [1, 0, 2u_1]$, $\partial_2 \mathbf{r} = [0, 1, -2u_2]$, a wektor normalny w punkcie $p = \mathbf{r}(u_1, u_2)$ jest

$$\mathbf{n}_{(u_1, u_2)} = \frac{\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r}}{|\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r}|} = \frac{[-2u_1, 2u_2, 1]}{\sqrt{g}},$$

gdzie $g = 1 + 4u_1^2 + 4u_2^2$. Zatem przekształcenie sferyczne $N : p = \mathbf{r}(u_1, u_2) \mapsto s \in S^2$, gdzie s określony jest przez wektor radialny $[-2u_1, 2u_2, 1]/\sqrt{g}$.

Aby wyznaczyć różniczkę $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ wyznaczmy

$$\partial_1 \mathbf{n}_{(u_1, u_2)} = -\frac{1}{2}g^{-3/2} \partial_1 g [-2u_1, 2u_2, 1] + g^{-1/2} [-2, 0, 0] = g^{-3/2} [-2(1 + 4u_2^2), -8u_1 u_2, -4u_1]$$

oraz

$$\partial_2 \mathbf{n}_{(u_1, u_2)} = -\frac{1}{2}g^{-3/2} \partial_2 g [-2u_1, 2u_2, 1] + g^{-1/2} [0, 2, 0] = g^{-3/2} [8u_1 u_2, 2(1 + 4u_1^2), -4u_2].$$

Zatem różniczka $\mathbf{n}_{(u_1, u_2)}$ w bazie zero-jedynkowej $\{e_1, e_2\}$ w $\mathbb{R}^2$ ma postać

$$d\mathbf{n}_{(u_1, u_2)} = g^{-3/2} \begin{bmatrix} -2(1 + 4u_2^2) & 8u_1 u_2 \\ -8u_1 u_2 & 2(1 + 4u_1^2) \\ -4u_1 & -4u_2 \end{bmatrix}$$

Ponieważ $d\mathbf{n}_{(u_1, u_2)}(e_1) = dN_p(\partial_1 \mathbf{r})$ oraz $d\mathbf{n}_{(u_1, u_2)}(e_2) = dN_p(\partial_2 \mathbf{r})$, to macierz odwzorowania Weingartena $\mathcal{N} = [\mathcal{N}_{ij}]$ można wyznaczyć z warunków

$$\begin{aligned} dN_p(\partial_1 \mathbf{r}) &= g^{-3/2} \begin{bmatrix} -2(1 + 4u_2^2) \\ -8u_1 u_2 \\ -4u_1 \end{bmatrix} = \mathcal{N}_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u_1 \end{bmatrix} + \mathcal{N}_{12} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2u_2 \end{bmatrix} \\ dN_p(\partial_2 \mathbf{r}) &= g^{-3/2} \begin{bmatrix} 8u_1 u_2 \\ 2(1 + 4u_1^2) \\ -4u_2 \end{bmatrix} = \mathcal{N}_{21} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u_1 \end{bmatrix} + \mathcal{N}_{22} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2u_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Stąd wynika

$$\mathcal{N} = g^{-3/2} \begin{bmatrix} -2(1 + 4u_2^2) & 8u_1 u_2 \\ -8u_1 u_2 & 2(1 + 4u_1^2) \end{bmatrix}.$$

Można także wykorzystać wzory (2.14), aby wyznaczyć macierz $\mathcal{I}$ złożoną z funkcji L, M, N , a następnie wykorzystać $\mathcal{N} = \mathcal{G}^{-1} \cdot \mathcal{I}$.

PRZYKŁAD 2.18. Wyznamy przekształcenie sferyczne, operator Weingartena i jego macierz w bazie $\{\partial_1 \mathbf{r}, \partial_2 \mathbf{r}\}$ dla powierzchni

$$\mathbf{r}(u_1, u_2) = [u_1, u_2, u_1 u_2].$$

2.8. Krzywizna normalna, Gaussa i krzywizny główne

Do określenia krzywizny powierzchni można wykorzystać krzywiznę krzywych leżących na tej powierzchni. Niech $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ będzie krzywą na S parametryzowaną łukowo, taką że $\gamma(0) = p$ oraz $\dot{\gamma}(0) = v \in T_p S$. Niech $n(p)$ będzie jednostkowym wektorem normalnym do powierzchni S w punkcie p oraz niech $N : S \rightarrow S^2$ będzie odwzorowaniem sferycznym tej powierzchni.

DEF. 2.12. Krzywizną normalną κ_n krzywej $\gamma(s)$ na S nazywamy rzut jej wektora przyspieszenia na kierunek normalny do powierzchni w danym punkcie $p = \gamma(s)$ wyznaczony przez $n(\gamma(s)) \equiv N(\gamma(s))$, tzn.

$$\kappa_n(s) = \langle \gamma''(s), n(\gamma(s)) \rangle_{\gamma(s)}.$$

Tw. 2.3 (Tw. Meusnier). *Krzywizna normalna krzywej $\gamma(s)$ jest wyznaczona przez II formę podstawową powierzchni, tzn.*

$$\kappa_n(s) = I_2|_{\gamma(s)}(\gamma'(s)). \quad (2.16)$$

Dowód: Ponieważ $\langle \gamma'(s), n(\gamma(s)) \rangle_p = 0$, to

$$\langle \gamma''(s), n(\gamma(s)) \rangle_p + \left\langle \gamma'(s), \frac{d}{ds} n(\gamma(s)) \right\rangle_p = 0.$$

Dodatkowo $dN_p(v) = \frac{d}{ds}|_{s=0} n(\gamma(s))$. W konsekwencji

$$I_2|_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle_p = -\left\langle \frac{d}{ds} n(\gamma(0)), \gamma'(0) \right\rangle_p = \langle \gamma''(0), n(\gamma(0)) \rangle_p.$$

Porównując z Def. 2.12, w której $p = \gamma(0)$, otrzymamy żadaną relację. $\square$

Przywołując Def. 1.8, dla krzywej biregularnej, możemy zapisać relację $\gamma''(s) = K(p)N(s)$, gdzie $K(p)$ jest krzywizną krzywej, a $N(s)$ wektorem normalnym (do krzywej). Wektory $N(s)$ oraz $n(\gamma(s))$ nie muszą być współliniowe! Zatem

$$\kappa_n(s) = K(s) \langle N(s), n(\gamma(s)) \rangle_{\gamma(s)}.$$

Dla krzywej parametryzowanej w dowolny sposób parametrem t mamy

$$\dot{\gamma}(t) = \gamma'(s) \frac{ds}{dt} = \gamma'(s) |\dot{\gamma}(t)|,$$

zatem $\gamma'(s) = \dot{\gamma}(t)/|\dot{\gamma}(t)|$. Wykorzystując (2.16) i pamiętając, że I_2 jest formą kwadratową otrzymamy

$$\kappa_n(t) = I_2|_{\gamma(t)} \left(\frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} \right) = \frac{1}{|\dot{\gamma}(t)|^2} I_2|_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) = \frac{I_2|_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))}{I_1|_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))}$$

Zatem krzywizna normalna w danym punkcie zależy od wyboru kierunku określonego przez wektory styczne do różnych krzywych. Wielkości

$$\kappa_{np}(v) = \frac{I_2|_p(v)}{I_1|_p(v)}$$

zależne o kierunku v charakteryzują krzywiznę w punkcie p .

DEF. 2.13 (Kierunki i krzywizny główne). Oznaczmy dwie wartości własne odwzorowania Weingartena $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ przez $\{-k_1, -k_2\}$, tzn.

$$dN_p(\mathbf{w}_i) = -k_i \mathbf{w}_i, \quad i = 1, 2.$$

Wówczas wielkości k_1, k_2 , $k_1 \leq k_2$, nazwiemy *krzywiznami głównymi* w punkcie p , a odpowiadające im jednostkowe wektory własne $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ — *kierunkami głównymi* w punkcie p .

Podstawowe własności kierunków i krzywizn głównych są następujące:

- (1) $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ tworzą ortonormalną bazę w $T_p S$.

Wynika to z symetryczności odwzorowania Weingartena.

- (2) Krzywizny główne są krzywiznami normalnymi dla kierunków głównych.

Rzeczywiście

$$\kappa_{np}(\mathbf{w}_j) = \frac{I_2|_p(\mathbf{w}_j)}{I_1|_p(\mathbf{w}_j)} = \frac{-\langle dN_p(\mathbf{w}_j), \mathbf{w}_j \rangle_p}{\langle \mathbf{w}_j, \mathbf{w}_j \rangle_p} = \frac{k_j \langle \mathbf{w}_j, \mathbf{w}_j \rangle_p}{\langle \mathbf{w}_j, \mathbf{w}_j \rangle_p} = k_j, \quad j = 1, 2.$$

- (3) Niech $\mathbf{e}$ będzie jednostkowym wektorem w $T_p S$ i niech $\cos \theta = \langle \mathbf{e}, \mathbf{w}_1 \rangle_p$ oraz $\sin \theta = \langle \mathbf{e}, \mathbf{w}_2 \rangle_p$. Wówczas słuszny jest wzór Eulera

$$\kappa_{np}(\mathbf{e}) = I_2 p(\mathbf{e}) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta.$$

Dla jednostkowego wektora $\mathbf{e} = \cos \theta \mathbf{w}_1 + \sin \theta \mathbf{w}_2$ mamy bowiem

$$\kappa_{np}(\mathbf{e}) = I_2 p(\mathbf{e}) = \langle k_1 \cos \theta \mathbf{w}_1 + k_2 \sin \theta \mathbf{w}_2, \cos \theta \mathbf{w}_1 + \sin \theta \mathbf{w}_2 \rangle_p = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta. \quad (2.17)$$

- (4) Zbiór wartości krzywizn normalnych na wektorach jednostkowych jest przedziałem $[k_1, k_2]$. Rzeczywiście z (2.17) wynika że

$$\kappa_{np}(\mathbf{e}) = k_1 + (k_2 - k_1) \sin^2 \theta.$$

Ponieważ $0 \leq \sin \theta \leq 1$, to $k_1 \leq \kappa_{np}(\mathbf{e}) \leq k_2$.

DEF. 2.14 (Krzywizna Gaussa i średnia). Niech S będzie zorientowaną powierzchnią oraz $N : S \rightarrow S^2$ jej odwzorowaniem sferycznym. *Krzywizną Gaussa* nazywamy funkcję $K_G : S \rightarrow \mathbb{R}$ określoną jako

$$K_G(p) = \det dN_p.$$

Krzywizną średnią nazywamy

$$\bar{K}(p) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} dN_p.$$

Na bazie (2.12) mamy zatem

$$K_G = k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{GE - F^2}, \quad (2.18)$$

$$\bar{K} = \frac{k_1 + k_2}{2} = -\frac{GL - 2FM + EN}{2(GE - F^2)}. \quad (2.19)$$

Przypominamy następującą geometryczną interpretację krzywizny Gaussa.

Tw. 2.4. Niech $D_\epsilon \subset \mathbb{R}^2$ będzie otwartym dyskiem o promieniu ϵ i niech $p = \mathbf{r}(0, 0) \in S$. Wówczas, jeśli $K_G(p) \neq 0$, to

$$|K_G(p)| = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{|(N \circ \mathbf{r})(D_\epsilon)|}{|\mathbf{r}(D_\epsilon)|},$$

gdzie $|\cdot|$ oznacza pole powierzchni zbioru.

Dowód: Idea dowodu opiera się na pokazaniu (z użyciem twierdzenia o wartości średniej dla całek wielokrotnych), że stosunek pól

$$\begin{aligned} |(N \circ \mathbf{r})(D_\epsilon)| &= \int_{D_\epsilon} |\partial_1(N \circ \mathbf{r}) \times \partial_2(N \circ \mathbf{r})| du_1 du_2 = \int_{D_\epsilon} |\det dN_{(u_1, u_2)}| |\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r}| du_1 du_2 \\ |\mathbf{r}(D_\epsilon)| &= \int_{D_\epsilon} |\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r}| du_1 du_2 \end{aligned}$$

w granicy niewielkiego dysku i przy założeniu gładkości odwzorowania $\mathbf{r}(u_1, u_2)$, wynosi $|\det dN_p| = |K_G(p)|$. $\square$

PRZYKŁAD 2.19. Wyznamy różne rodzaje krzywizn dla powierzchni

$$\mathbf{r}(u_1, u_2) = [u_1, u_2, u_1^2 - u_2^2].$$

Aby wyznaczyć krzywizny normalne $\kappa_{np}(\mathbf{v})$ obliczymy składowe L, M, N II formy podstawowej. Dla wektora $\mathbf{v} = v^1 \partial_1 \mathbf{r} + v^2 \partial_2 \mathbf{r}$ mamy na mocy (2.15)

$$I_{2p}(\mathbf{v}) = -(L(u_1, u_2)(v^1)^2 + 2M(u_1, u_2)v^1 v^2 + N(u_1, u_2)(v^2)^2),$$

gdzie

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{\sqrt{g}} (\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r}) \cdot \partial_{11}^2 \mathbf{r} = -2g^{-1/2}, \\ M &= -\frac{1}{\sqrt{g}} (\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r}) \cdot \partial_{12}^2 \mathbf{r} = 0 \\ N &= -\frac{1}{\sqrt{g}} (\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r}) \cdot \partial_{22}^2 \mathbf{r} = 2g^{-1/2}. \end{aligned}$$

Zatem krzywizny normalne określa wzór

$$\kappa_{np}(\mathbf{v}) = \frac{2(v^1)^2 - 2(v^2)^2}{\sqrt{g}|\mathbf{v}|^2} = \frac{2(v^1)^2 - 2(v^2)^2}{\sqrt{1 + 4u_1^2 + 4u_2^2}[(1 + 4u_1^2)(v^1)^2 - 8u_1 u_2 v^1 v^2 + (1 + 4u_2^2)(v^2)^2]}.$$

Aby wyznaczyć krzywiznę Gaussa i krzywizny główne przypomnijmy macierz odwzorowania Weingartena dla tej powierzchni

$$\mathcal{N} = g^{-3/2} \begin{bmatrix} -2(1 + 4u_2^2) & 8u_1 u_2 \\ -8u_1 u_2 & 2(1 + 4u_1^2) \end{bmatrix}.$$

Wielkość $K_G = \det \mathcal{N} = -4g^{-2}$ określa krzywiznę Gaussa, a $\bar{K} = -\frac{1}{2} \text{tr} \mathcal{N} = 4(u_2^2 - u_1^2)g^{-3/2}$ przedstawia krzywiznę średnią. Wartości własne tego odwzorowania spełniają równanie

$$x^2 + 8xg^{-3/2}(u_2^2 - u_1^2) - 4g^{-2} = 0. \quad (2.20)$$

Pierwiastki tego równania ze znakiem minus określają krzywizny główne. Zauważmy, że współczynniki tego równania dają się wyrazić przez K_G i $\bar{K}$. Rzeczywiście, (2.20) można przepisać jako

$$x^2 + 2\bar{K}x + K_G = 0,$$

a wówczas

$$k_{1,2} = \bar{K} \pm \sqrt{\bar{K}^2 - K_G^2}.$$

Można pokazać, że wyrażenia na $k_{1,2}$ są słuszne także w przypadku dowolnej powierzchni.

2.9. Współczynniki koneksji metrycznej. Równania strukturalne

W każdym punkcie $p \in S$ regularnej powierzchni mamy bazę $\{\partial_1 \mathbf{r}, \partial_2 \mathbf{r}\}$ w przestrzeni stycznej $T_p S$ oraz wektor normalny $\mathbf{n}_p$ prostopadły do $T_p S$. O własnościach geometrycznych powierzchni decydują iloczyny skalarne $\langle \partial_{ij}^2 \mathbf{r}, \partial_l \mathbf{r} \rangle_p, \langle \partial_{ijk}^3 \mathbf{r}, \partial_l \mathbf{r} \rangle_p, \dots$, które pozwalają wyznaczyć składowe wektorów $\partial_{ij}^2 \mathbf{r}, \partial_{ijk}^3 \mathbf{r}, \dots$ w bazie $\{\partial_1 \mathbf{r}, \partial_2 \mathbf{r}, \mathbf{n}\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Wiemy już, że

$$\partial_j \mathbf{n} = dN_p(\partial_j \mathbf{r}) = \sum_k \mathcal{N}_{kj} \partial_k \mathbf{r}, \quad (2.21)$$

gdzie $[\mathcal{N}_{ij}]$ jest macierzą przekształcenia liniowego dN_p w bazie $\{\partial_1 \mathbf{r}, \partial_2 \mathbf{r}\}$.

Niech

$$\partial_{ij}^2 \mathbf{r} = \Gamma_{ij}^1 \partial_1 \mathbf{r} + \Gamma_{ij}^2 \partial_2 \mathbf{r} + \mathcal{I}_{ij} \mathbf{n}, \quad (2.22)$$

gdzie $[\mathcal{I}_{ij}]$ jest macierzą II formy podstawowej. Zatem

$$\langle \partial_k \mathbf{r}, \partial_{ij}^2 \mathbf{r} \rangle_p = \sum_m \Gamma_{ij}^m \langle \partial_k \mathbf{r}, \partial_m \mathbf{r} \rangle_p = \sum_m \Gamma_{ij}^m g_{km} = \Gamma_{k|ij}.$$

Z drugiej strony różniczkowanie $g_{km} = \langle \partial_k \mathbf{r}, \partial_m \mathbf{r} \rangle_p$ daje

$$\partial_l g_{km} = \langle \partial_{kl}^2 \mathbf{r}, \partial_m \mathbf{r} \rangle_p + \langle \partial_k \mathbf{r}, \partial_{lm}^2 \mathbf{r} \rangle_p = \Gamma_{m|kl} + \Gamma_{k|lm}. \quad (2.23)$$

Biorąc cykliczne permutacje indeksów $\{lkm\}$ otrzymamy dwie dodatkowe relacje

$$\partial_k g_{ml} = \langle \partial_{mk}^2 \mathbf{r}, \partial_l \mathbf{r} \rangle_p + \langle \partial_m \mathbf{r}, \partial_{kl}^2 \mathbf{r} \rangle_p = \Gamma_{l|km} + \Gamma_{m|kl}, \quad (2.24)$$

$$\partial_m g_{lk} = \langle \partial_{ml}^2 \mathbf{r}, \partial_k \mathbf{r} \rangle_p + \langle \partial_l \mathbf{r}, \partial_{mk}^2 \mathbf{r} \rangle_p = \Gamma_{k|ml} + \Gamma_{l|mk}. \quad (2.25)$$

Dodając (2.23) oraz (2.24) i odejmując (2.25) otrzymamy symbole Christoffela I rodzaju

$$\Gamma_{m|kl} = \frac{1}{2} (\partial_l g_{km} + \partial_k g_{ml} - \partial_m g_{kl})$$

znane już ze wzoru (2.7). Symbole Christoffela Γ_{kl}^m II rodzaju mają zatem postać

$$\Gamma_{kl}^m = \sum_r g^{rm} \Gamma_{r|kl} = \frac{1}{2} \sum_r g^{rm} (\partial_l g_{kr} + \partial_k g_{rl} - \partial_r g_{kl}).$$

Oba rodzaje symboli Christoffela stanowią współczynniki koneksji metrycznej na powierzchni S : struktury, która umożliwia porównywanie obiektów wektorowych (tensorowych) w różnych punktach powierzchni. W ogólności, koneksja jest strukturą niezależną od tensora metrycznego, ale staje się z nim związana, jeśli zażądamy pewnych dodatkowych warunków przesunięcia równoległego (np. zachowanie długości wektora podczas przesuwania równoległego).

Niech teraz

$$\partial_{ijl}^3 \mathbf{r} = \sum_k A_{ijl}^k \partial_k \mathbf{r} + B_{ijl} \mathbf{n}.$$

Różniczkując (2.22) po u^l otrzymamy

$$\partial_{ijl}^3 \mathbf{r} = \partial_l \left[\sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k \mathbf{r} + \mathcal{I}_{ij} \mathbf{n} \right] = \sum_k \left(\partial_l \Gamma_{ij}^k \partial_k \mathbf{r} + \Gamma_{ij}^k \partial_{kl}^2 \mathbf{r} \right) + \partial_l \mathcal{I}_{ij} \mathbf{n} + \mathcal{I}_{ij} \partial_l \mathbf{n}$$

Wykorzystując powtórnie (2.22) i (2.21) otrzymamy

$$\partial_{ijl}^3 \mathbf{r} = \sum_k \left(\partial_l \Gamma_{ij}^k + \sum_r \Gamma_{ij}^r \Gamma_{rl}^k + \mathcal{I}_{ij} \mathcal{N}_{kl} \right) \partial_k \mathbf{r} + \left(\sum_k \Gamma_{ij}^k \mathcal{I}_{kl} + \partial_l \mathcal{I}_{ij} \right) \mathbf{n}.$$

W konsekwencji

$$\begin{aligned} A_{ijl}^k &= \partial_l \Gamma_{ij}^k + \sum_r \Gamma_{ij}^r \Gamma_{rl}^k + \mathcal{I}_{ij} \mathcal{N}_{kl} \\ B_{ijl} &= \sum_k \Gamma_{ij}^k \mathcal{I}_{kl} + \partial_l \mathcal{I}_{ij}. \end{aligned}$$

Założenie o gładkości parametryzacji implikuje symetrię wielkości A oraz B w dolnych wskaźnikach, w szczególności $A_{ijl}^k = A_{ilj}^k$ oraz $B_{ijl} = B_{ilj}$. Wykorzystując pierwszy z nich otrzymamy tożsamość Gaussa

$$\partial_l \Gamma_{ij}^k - \partial_j \Gamma_{il}^k + \sum_r \left(\Gamma_{ij}^r \Gamma_{rl}^k - \Gamma_{il}^r \Gamma_{rj}^k \right) = -(\mathcal{I}_{ij} \mathcal{N}_{kl} - \mathcal{I}_{il} \mathcal{N}_{kj}), \quad k, i, j, l = 1, 2, \quad (2.26)$$

która wskazuje na to, że symbole Christoffela, składowe macierzy przekształcenia Weingartena oraz składowe II formy podstawowej nie mogą być zupełnie dowolne: łączą je pewne warunki zgodności. W szczególności dla $l = k = 1$ oraz $j = i = 2$ prawa strona (2.26) przyjmie postać

$$-(\mathcal{I}_{22} \mathcal{N}_{11} - \mathcal{I}_{21} \mathcal{N}_{12}) = -\frac{1}{g} \left[-N(GL - FM) + M(GM - FN) \right] = \frac{1}{g} G(NL - M^2) = GK_G,$$

gdzie wykorzystaliśmy znane już relacje

$$\mathcal{I} = - \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}, \quad \mathcal{N} = \frac{1}{g} \begin{bmatrix} GL - FM & GM - FN \\ EM - FL & EN - FM \end{bmatrix}$$

oraz wzór (2.18) na krzywiznę Gaussa.

Tw. 2.5 (Egremium Gaussa). *Krzywizna Gaussa wyraża się wyłącznie przez składowe I formy podstawowej (składowe tensora metrycznego) i ma postać⁴*

$$K_G = \frac{1}{G} \left[\partial_1 \Gamma_{22}^1 - \partial_2 \Gamma_{21}^1 + \sum_r \left(\Gamma_{22}^r \Gamma_{r1}^1 - \Gamma_{21}^r \Gamma_{r2}^1 \right) \right]. \quad (2.27)$$

Z warunków symetrii $B_{ijl} = B_{ilj}$ wynikają tożsamości Codazzi-Mainarda postaci

$$\sum_r \left(\Gamma_{jl}^r \mathcal{I}_{ir} - \Gamma_{il}^r \mathcal{I}_{jr} \right) = \partial_j \mathcal{I}_{il} - \partial_i \mathcal{I}_{jl}, \quad i, j, l = 1, 2.$$

2.10. Przesunięcie równoległe i pochodna kowariantna

DEF. 2.15. Polem wektorowym wzdłuż krzywej $\gamma : (a, b) \rightarrow S$ na powierzchni S sparametryzowanej przez $\mathbf{r}(u^1, u^2)$ nazywamy gładkie odwzorowanie $\mathbf{v} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$, takie że $\mathbf{v}_t \in T_{\gamma(t)} S$ dla każdego $t \in (a, b)$. Zatem

$$\mathbf{v}_t = v^1(t) \partial_1 \mathbf{r}|_{\gamma(t)} + v^2(t) \partial_2 \mathbf{r}|_{\gamma(t)}.$$

Pochodna tego odwzorowania, mierząca zmiany pola wektorowego wzdłuż krzywej,

$$\dot{\mathbf{v}}_t = \frac{d}{dt} \mathbf{v}_t = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}_{t+\epsilon} - \mathbf{v}_t}{\epsilon}$$

nie jest na ogół polem wektorowym, bo nie wiadomo jak odjąć wektory określone w różnych punktach krzywej. Aby to było wykonalne, należy najpierw przemieścić jeden z wektorów wzdłuż krzywej tak, aby oba wektory zaczepiony były w tym samym punkcie.

⁴ W bardziej współczesnym sformułowaniu oznacza to, że dwie powierzchnie o tej samej krzywiznie Gaussa są lokalnie izometryczne!

DEF. 2.16. Pochodną kowariantną pola wektorowego v jest pole wektorowe Dv określone jako

$$Dv_t = \pi_{\gamma(t)}(\dot{v}_t),$$

gdzie $\pi_{\gamma(t)} : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_{\gamma(t)}S$ jest rzutowaniem prostopadłym.

Zauważmy, że $\dot{v}_t = Dv_t + N$, gdzie N jest wektorem prostopadłym do $T_{\gamma(t)}S$. W konsekwencji dla dowolnego pola wektorowego wzdłuż krzywej w_t ,

$$\langle \dot{v}_t, w_t \rangle_{\gamma(t)} = \langle Dv_t, w_t \rangle_{\gamma(t)}.$$

Wyznamy postać pochodnej kowariantnej. W tym celu obliczmy pochodną v_t w kierunku stycznym do krzywej $\gamma(t) = \mathbf{r}(u^1(t), u^2(t))$

$$\dot{v}_t = \frac{d}{dt} \left[v^1(t) \partial_1 \mathbf{r} + v^2(t) \partial_2 \mathbf{r} \right] = \sum_k \left[\dot{v}^k \partial_k \mathbf{r} + \sum_j v^k \dot{u}^j \partial_{kj}^2 \mathbf{r} \right],$$

a następnie wyznaczmy iloczyny skalarne z wektorami bazowymi $\{\partial_1 \mathbf{r}, \partial_2 \mathbf{r}\}$,

$$\langle \dot{v}_t, \partial_s \mathbf{r} \rangle_{\gamma(t)} = \sum_k \left[\dot{v}^k \langle \partial_k \mathbf{r}, \partial_s \mathbf{r} \rangle_{\gamma(t)} + \sum_j v^k \dot{u}^j \langle \partial_{kj}^2 \mathbf{r}, \partial_s \mathbf{r} \rangle_{\gamma(t)} \right].$$

Ponieważ $\langle \partial_{kj}^2 \mathbf{r}, \partial_s \mathbf{r} \rangle_{\gamma(t)} = \sum_k g_{ks} \Gamma_{ij}^k$, to

$$\langle Dv_t, \partial_s \mathbf{r} \rangle_{\gamma(t)} = \langle \dot{v}_t, \partial_s \mathbf{r} \rangle_{\gamma(t)} = \sum_r \left(\dot{v}^r g_{rs} + \sum_{k,j} v^r \dot{u}^j \Gamma_{rj}^k g_{ks} \right). \quad (2.28)$$

Niech

$$Dv_t = (Dv_t)^1 \partial_1 \mathbf{r} + (Dv_t)^2 \partial_2 \mathbf{r},$$

wówczas

$$(Dv_t)^k = \sum_j g^{kj} \langle Dv_t, \partial_j \mathbf{r} \rangle_{\gamma(t)}.$$

Ostatecznie podstawiając (2.28) oraz wykorzystując $\sum_s g^{ks} g_{rs} = \delta_r^k$, otrzymamy

$$(Dv_t)^k = \sum_s g^{ks} \sum_r \left[\dot{v}^r g_{rs} + \sum_{p,j} v^r \dot{u}^j g_{ps} \Gamma_{rj}^p \right] = \dot{v}^k + \sum_{r,j} \Gamma_{rj}^k v^r \dot{u}^j.$$

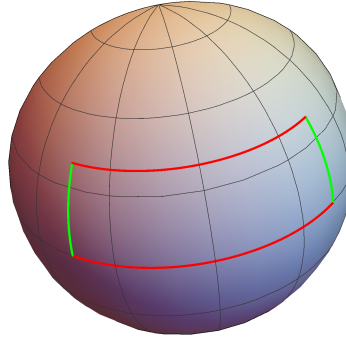
Zatem

$$Dv_t = \sum_k \left(\dot{v}^k + \sum_{r,j} \Gamma_{rj}^k v^r \dot{u}^j \right) \partial_k \mathbf{r}. \quad (2.29)$$

Pochodna kowariantna nie zależy zatem bezpośrednio od tensora metrycznego, a tylko od współczynników koneksji.

DEF. 2.17. Pole wektorowe v_t jest przenoszone *równoległe* wzdłuż krzywej $\gamma(t)$, jeśli znika jego pochodna kowariantna w kierunku tej krzywej, tzn.

$$(Dv_t)^k = \dot{v}^k + \sum_{r,j} \Gamma_{rj}^k v^r \dot{u}^j = 0, \quad k = 1, 2. \quad (2.30)$$



Rysunek 2.2. Krzywa zamknięta na sferze, wzdłuż której przesuwany jest wektor v .

PRZYKŁAD 2.20. Dla sfery mamy $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \operatorname{ctg}\theta$, $\Gamma_{22}^1 = -\sin\theta \cos\theta$. Zatem równania przesunięcia równoległego dla pola $v_i = [v^1(t), v^2(t)]$ wzdłuż krzywej $\gamma(t) = r[\theta(t), \varphi(t)]$ są następujące:

$$\begin{cases} \dot{v}^1 - \sin\theta \cos\theta v^2 \dot{\varphi} = 0 \\ \dot{v}^2 + \operatorname{ctg}\theta(v^1 \dot{\varphi} + v^2 \dot{\theta}) = 0. \end{cases} \quad (2.31)$$

Niech $v_0 = [v_0^1, v_0^2]$ będzie jednostkowym wektorem zaczepionym na równiku w punkcie $r(\pi/2, 0)$. Dokonamy przesunięcia tego wektora wzdłuż krzywej zamkniętej na sferze pokazanej na Rys. 2.2

(1) Przesuwamy go równoległe wzdłuż równika $\theta = \pi/2$ do punktu $r(\pi/2, \pi/2)$. Bezpośrednio z (2.31) wynika, że $\dot{v}^1 = \dot{v}^2 = 0$, zatem w punkcie $r(\pi/2, \pi/2)$ przesunięty równoległe wektor v_0 ma te same składowe $[v_0^1, v_0^2]$.

(2) Przesuwamy go dalej wzdłuż południka $\varphi = \pi/2$ do punktu $r(\pi/3, \pi/2)$. Bezpośrednio z (2.31) mamy $\dot{v}^1 = \text{const.} = v_0^1$ oraz $\dot{v}^2 + \operatorname{ctg}\theta v^2 \dot{\theta} = 0$. Rozwiązaniem ostatniego równania jest $v^2 \sin\theta = \text{const.}$, a ponieważ $v^2(\theta = \pi/2) = v_0^2$, to $v^2(\theta = \pi/3) = v_0^2 / \sin(\pi/3) = 2/\sqrt{3} v_0^2$. Ostatecznie w punkcie $r(\pi/3, \pi/2)$ wektor v_0 ma składowe $[v_0^1, 2/\sqrt{3} v_0^2]$.

(3) Przesuwamy go dalej wzdłuż równoleżnika $\theta = \pi/3$ do punktu $r(\pi/3, 0)$. Bezpośrednio z (2.31) mamy

$$\begin{cases} v^1 - \frac{\sqrt{3}}{4} v^2 \dot{\varphi} = 0 \\ \dot{v}^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} v^1 \dot{\varphi} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{dv^1}{d\varphi} = \frac{\sqrt{3}}{4} v^2 \\ \frac{dv^2}{d\varphi} = -\frac{v^1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Sprowadzając ostatni układ do pojedynczego równania II rzędu

$$\frac{d^2 v^1}{d\varphi^2} + \frac{1}{4} v^1 = 0$$

otrzymamy rozwiązanie postaci

$$v^1(\varphi) = C_1 \cos(\varphi/2) + C_2 \sin(\varphi/2), \quad v^2(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(-C_1 \sin(\varphi/2) + C_2 \cos(\varphi/2) \right).$$

Uwzględniając początkową orientację wektora

$$\begin{aligned} v_0^1 &= v^1(\varphi = \pi/2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(C_1 + C_2) \\ \frac{2}{\sqrt{3}}v_0^2 &= v^2(\varphi = \pi/2) = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2}}(-C_1 + C_2) \end{aligned}$$

otrzymamy stałe C_1, C_2 w postaci

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_0^1 - v_0^2), \quad C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_0^1 + v_0^2).$$

Zatem w punkcie $r(\pi/3, 0)$ wektor v_0 ma składowe $[\sqrt{1/2}(v_0^1 - v_0^2), \sqrt{2/3}(v_0^1 + v_0^2)]$.

(4) Przesuwamy go dalej wzdłuż południka $\varphi = 0$ do punktu $r(\pi/2, 0)$. Równania przesunięcia równoległego są analogiczne do tych w punkcie (2). Mamy tylko inne warunki początkowe. Zatem $v^1 = \text{const.} = \sqrt{1/2}(v_0^1 - v_0^2)$ oraz $v^2 \sin \theta = \text{const.} = \sqrt{1/2}(v_0^1 + v_0^2)$ i w konsekwencji współrzędne przesuniętego równoległe wektora są $v(\theta = \pi/2, \varphi = 0) = \sqrt{1/2}[v_0^1 - v_0^2, v_0^1 + v_0^2]$. Łatwo sprawdzić, że jest on nadal jednostkowy, jeśli v_0 był jednostkowy. Ostatecznie kosinus kąta pomiędzy v_0 oraz $v(\theta = \pi/2, \varphi = 0)$

$$\begin{aligned} \cos \psi &= g_{11}(\pi/2, 0)v_0^1 v^1(\pi/2, 0) + g_{22}(\pi/2, 0)v_0^2 v^2(\pi/2, 0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}v_0^1(v_0^1 - v_0^2) + \frac{1}{\sqrt{2}}v_0^2(v_0^1 + v_0^2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_0^1)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(v_0^2)^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Warunek (2.30) można wyrazić w jeszcze innej formie

$$0 = (Dv_t)^k = \dot{v}^k + \sum_{r,j} \Gamma_{rj}^k v^r \dot{u}^j = \sum_j \underbrace{\left(\partial_j v^k + \sum_r \Gamma_{rj}^k v^r \right)}_{v_{;j}^k} \dot{u}^j,$$

gdzie $v_{;j}^k$ jest cząstkową pochodną kowariantną. Wielkości $\{v_{;j}^k\}$ tworzą tensor typu (1,1).

Własności cząstkowej pochodnej kowariantnej

- (1) liniowość: $(\alpha v^k + \beta w^k)_{;j} = \alpha v_{;j}^k + \beta w_{;j}^k$,
- (2) reguła Leibniza: $(v^k w^r)_{;j} = v_{;j}^k w^r + v^k w_{;j}^r$,
- (3) działanie na polu kowariantnym: pochodna kowariantna wielkości skalarnej jest równa pochodnej cząstkowej, zatem

$$\begin{aligned} a_k \partial_j v^k + v^k \partial_j a_k &= \partial_j (v^k a_k) = (v^k a_k)_{;j} = v_{;j}^k a_k + v^k a_{k;j} = (\partial_j v^k + \Gamma_{rj}^k v^r) a_k + v^k a_{k;j} \\ v^k \partial_j a_k &= \Gamma_{rj}^k v^r a_k + v^k a_{k;j} \\ v^k a_{k;j} &= (\partial_j a_k - \Gamma_{kj}^r a_r) v^k. \end{aligned}$$

Ostatecznie, z uwagi na dowolność v^k ,

$$a_{k;j} = \partial_j a_k - \Gamma_{kj}^r a_r.$$

(4) W podobny sposób uogólnia się pochodną kowariantną na pola tensorowe, np. dla tensora typu (1,1) mamy

$$A_{i;j}^k = \partial_j A_i^k + \Gamma_{nj}^k A_i^n - \Gamma_{ij}^n A_n^k. \quad (2.32)$$

W ogólności, aby wyznaczyć zmianę wektora o współrzędnych a^i , jaka nastąpi w wyniku przesunięcia równoległego wzdłuż krzywej $\gamma(t) = \mathbf{r}(u^1(t), u^2(t))$, wystarczy rozpatrzyć przesunięcie wzdłuż niewielkiej pętli przechodzącej przez punkt $\mathbf{r}(\mathbf{u}_0)$. Infinitesimalna zmiana wektora w wyniku jego przesunięcia od punktu $\mathbf{r}(\mathbf{u}_0)$ do punktu $\mathbf{r}(\mathbf{u}_0 + d\mathbf{u})$ dany jest przez

$$da^k = -\Gamma_{ij}^k a^i du^j,$$

zatem zmiana wektora wzdłuż pętli jest

$$\delta a^k = -\oint \Gamma_{ij}^k(\mathbf{u}) a^i(\mathbf{u}) du^j. \quad (2.33)$$

Z uwagi na niewielkie rozmiary pętli możemy dokonać rozwinięć

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k(\mathbf{u}) &= \Gamma_{ij}^k(\mathbf{u}_0) + \partial_r \Gamma_{ij}^k(\mathbf{u}_0) \Delta u^r + \dots = (\Gamma_{ij}^k)_0 + (\partial_r \Gamma_{ij}^k)_0 \Delta u^r + \dots \\ a^k(\mathbf{u}) &= a^k(\mathbf{u}_0) + \Delta a^k = a^k(\mathbf{u}_0) - \Gamma_{ij}^k(\mathbf{u}_0) a^i(\mathbf{u}_0) \Delta u^j + \dots = a_0^k - (\Gamma_{ij}^k)_0 a_0^i \Delta u^j + \dots \end{aligned}$$

i podstawić je do (2.33). Otrzymamy z dokładnością do wyrazów liniowych w Δu^r

$$\begin{aligned} \delta a^k &= -\oint \left[(\Gamma_{ij}^k)_0 + (\partial_r \Gamma_{ij}^k)_0 \Delta u^r \right] \left[a_0^i - (\Gamma_{sr}^i)_0 a_0^s \Delta u^r \right] du^j \\ &= -(\Gamma_{ij}^k)_0 a_0^i \oint du^j + \left[(\Gamma_{ij}^k)_0 (\Gamma_{sr}^i)_0 - (\partial_r \Gamma_{sj}^k)_0 \right] a_0^s \oint \Delta u^r du^j \end{aligned}$$

Pierwszy z powyższych składników jest zerowy z uwagi na zamkniętość krzywej i równość wartości początkowych i końcowych $\mathbf{u}$. Natomiast całkując przez części możemy przekształcić drugą z całek do postaci

$$\oint \Delta u^r du^j = \int_{t_1}^{t_2} \Delta u^r \frac{du^j}{dt} dt = \Delta u^r u^j \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \Delta u^j \frac{du^r}{dt} dt = -\oint \Delta u^j du^r.$$

Powyższa tożsamość oznacza, że całka $\oint \Delta u^r du^j$ jest antysymetryczna w indeksach (r, j) , zatem tylko antysymetryczna część $(\Gamma_{ij}^k)_0 (\Gamma_{sr}^i)_0 - (\partial_r \Gamma_{sj}^k)_0$ wniesie wkład Δa^k . W konsekwencji

$$\delta a^k = \frac{1}{2} [(\Gamma_{ij}^k)_0 (\Gamma_{sr}^i)_0 - (\Gamma_{ir}^k)_0 (\Gamma_{sj}^i)_0 + (\partial_j \Gamma_{sr}^k)_0 - (\partial_r \Gamma_{sj}^k)_0] a_0^s \oint \Delta u^r du^j$$

Wprowadzając tensor Riemanna w punkcie $\mathbf{r}(\mathbf{u}_0)$ jako

$$(R_{srj}^k)_0 := (\partial_j \Gamma_{sr}^k)_0 - (\partial_r \Gamma_{sj}^k)_0 + (\Gamma_{ij}^k)_0 (\Gamma_{sr}^i)_0 - (\Gamma_{ir}^k)_0 (\Gamma_{sj}^i)_0 \quad (2.34)$$

otrzymamy ostatecznie

$$\Delta a^k = -\frac{1}{2} R_{srj}^k a_0^s \oint \Delta u^j du^r.$$

Podsumowując, zmiana wektora a^k w wyniku przesunięcia równoległego wzdłuż pętli jest wyznaczona przez tensor krzywizny oraz pole pętli, którego miarą jest $1/2 \oint \Delta u^r du^j$.

2.11. Dewiacja geodezyjna i tensor krzywizny

Rozpatrzmy rodzinę linii geodezyjnych $\{\gamma(t, \mu) = \mathbf{r}(u^1(t, \mu), u^2(t, \mu))\}_\mu$ indeksowanych parametrem μ . Przez dewiację geodezyjną rozumiemy zmianę odległości pomiędzy

dwoma punktami na geodezyjnych wychodzących z jednego punktu powierzchni. Miara dewiacji geodezyjnej będzie szybkość zmiany tej odległości. Niech

$$\xi^k = \frac{\partial u^k}{\partial \mu}, \quad \dot{u}^k = \frac{\partial u^k}{\partial t}$$

Ponieważ każda z krzywych tej rodziny jest geodezyjna, to wektor styczny do niej jest przenoszony równolegle, zatem

$$D_t \dot{u}^k = \dot{u}^k_{;l} \dot{u}^l = 0. \quad (2.35)$$

Dodatkowo zauważmy, że

$$\xi^k_{;l} \dot{u}^l = \dot{u}^k_{;l} \xi^l. \quad (2.36)$$

Rzeczywiście

$$\begin{aligned} \xi^k_{;l} \dot{u}^l &= (\partial_l \xi^k + \Gamma^k_{jl} \xi^j) \dot{u}^l = \frac{\partial^2 u^k}{\partial t \partial \mu} + \Gamma^k_{jl} \xi^j \dot{u}^l \\ \dot{u}^k_{;l} \xi^l &= (\partial_l \dot{u}^k + \Gamma^k_{jl} \dot{u}^j) \xi^l = \frac{\partial^2 u^k}{\partial \mu \partial t} + \Gamma^k_{jl} \dot{u}^j \xi^l. \end{aligned}$$

Relacja (2.36) wynika z równości prawych stron na podstawie przemienności drugich pochodnych cząstkowych oraz symetrii symboli Christoffela.

Wykażemy następujące równanie dewiacji geodezyjnej

$$D_t^2 \xi^k = (\dot{u}^k_{;lj} - \dot{u}^k_{;jl}) \xi^l \dot{u}^j. \quad (2.37)$$

Dowód: Obliczając lewą stronę otrzymamy

$$D_t^2 \xi^k = D_t(D_t \xi^k) = D_t(\xi^k_{;l} \dot{u}^l) = (\xi^k_{;l} \dot{u}^l)_{;j} \dot{u}^j.$$

Podstawienie (2.36) do nawiasu prowadzi do

$$(\xi^k_{;l} \dot{u}^l)_{;j} \dot{u}^j = (\dot{u}^k_{;l} \xi^l)_{;j} \dot{u}^j = \dot{u}^k_{;lj} \xi^l \dot{u}^j + \dot{u}^k_{;lj} \xi^l_{;j} \dot{u}^j.$$

Korzystając ponownie z (2.36) w drugim składniku po prawej stronie otrzymamy

$$D_t^2 \xi^k = \dot{u}^k_{;lj} \xi^l \dot{u}^j + \dot{u}^k_{;jl} \dot{u}^l_{;j} \xi^j.$$

Ale z uwagi na (2.35) zachodzi relacja

$$0 = (\dot{u}^k_{;l} \dot{u}^l)_{;j} = \dot{u}^k_{;lj} \dot{u}^l + \dot{u}^k_{;jl} \dot{u}^l_{;j}.$$

Ostatecznie

$$D_t^2 \xi^k = \dot{u}^k_{;lj} \xi^l \dot{u}^j - \dot{u}^k_{;jl} \xi^j \dot{u}^l = (\dot{u}^k_{;lj} - \dot{u}^k_{;jl}) \xi^l \dot{u}^j.$$

□

Niekomutatywność drugiej pochodnej kawariantnej występująca we wzorze (2.37) jest związana z niezerowymi elementami tensora Riemanna. Pokażemy, że dla składowych pola wektorowego v^k zachodzi

$$v^k_{;lj} - v^k_{;jl} = (\partial_j \Gamma^k_{il} - \partial_l \Gamma^k_{ij} + \Gamma^k_{jn} \Gamma^n_{il} - \Gamma^k_{ln} \Gamma^n_{ij}) v^i = R^k_{ilj} v^i, \quad (2.38)$$

gdzie R^k_{ilj} są tymi samymi liczbami co we wzorze (2.34).

Dowód: Oznaczmy pierwszą pochodną kowariantną pola v^k przez

$$C_l^k := v_{;l}^k = \partial_l v^k + \Gamma_{rl}^k v^r.$$

C_l^k są składowymi tensora typu (1,1), zatem jego pochodna kowariantna zgodnie z (2.32) ma postać

$$C_{l;j}^k = \partial_j C_l^k + \Gamma_{nj}^n C_l^n - \Gamma_{lj}^n C_n^k.$$

Zatem

$$\begin{aligned} v_{;lj}^k &= \partial_j (\partial_l v^k + \Gamma_{rl}^k v^r) + \Gamma_{nj}^k (\partial_l v^n + \Gamma_{rl}^n v^r) - \Gamma_{lj}^n (\partial_n v^k + \Gamma_{rn}^k v^r) \\ &= \partial_{jl}^2 v^k + \Gamma_{rl}^k \partial_j v^r + \Gamma_{nj}^k \partial_l v^n - \Gamma_{lj}^n \partial_n v^k + (\partial_j \Gamma_{rl}^k + \Gamma_{nj}^n \Gamma_{rl}^n - \Gamma_{lj}^n \Gamma_{rn}^k) v^r \end{aligned}$$

Zamieniając indeksy $(l, j) \rightarrow (j, l)$ otrzymamy

$$v_{;jl}^k = \partial_{lj}^2 v^k + \Gamma_{rj}^k \partial_l v^r + \Gamma_{nl}^k \partial_j v^n - \Gamma_{jl}^n \partial_n v^k + (\partial_l \Gamma_{rj}^k + \Gamma_{nl}^n \Gamma_{rj}^n - \Gamma_{jl}^n \Gamma_{rn}^k) v^r$$

Ostatecznie odejmując stronami i korzystając z symetrii drugiej pochodnej cząstkowej oraz symboli Christoffella otrzymamy (2.38). $\square$

Równanie dewiacji geodezyjnej (2.37) można przepisać jako

$$D_t^2 \xi^k = (\dot{u}_{;lj}^k - \dot{u}_{;jl}^k) \xi^l \dot{u}^j = R_{rlj}^k \dot{u}^r \dot{u}^j \xi^l.$$

Całkowicie kowariantna wersja tensora Riemanna, tzn. $R_{mrlj} = g_{km} R_{rlj}^k$, nosi nazwę *tensora krzywizny* i znikanie wszystkich jego składowych oznacza brak zakrzywienia przestrzeni. Tensor krzywizny ma następujące algebraiczne własności symetrii

- (1) symetria par: $R_{mrlj} = R_{ljmr}$,
- (2) antysymetria indeksów:

$$R_{mrlj} = -R_{rmlj} = -R_{mrjl} = R_{rmjl},$$

- (3) cykliczność:

$$R_{mrlj} + R_{mjrl} + R_{mljr} = 0.$$

W ogólności, w przestrzeni N -wymiarowej jest $N^2(N^2 - 1)/12$ niezależnych składowych tensora krzywizny [?, p. 143].

W przypadku powierzchni 2-wymiarowych tylko jedna składowa tensora krzywizny jest niezależna⁵, wybierzmy R_{1212} . Wówczas

$$\begin{aligned} R_{1212} &= -R_{2112} = -R_{1221} = R_{2121} \\ R_{1111} &= R_{1122} = R_{2211} = R_{2222} = 0 \end{aligned}$$

Relacje te podsumowuje wzór

$$R_{mrlj} = (g_{ml}g_{rj} - g_{mj}g_{rl}) \frac{R_{1212}}{g}.$$

W oparciu o tensor krzywizny wprowadza się tensor Ricciego

$$R_{rj} = R_{rkj}^k = g^{km} R_{mrkj}$$

⁵ Nie dotyczy to tensora Riemanna R_{rlj}^k , który ma więcej niezależnych składowych.

oraz skalar krzywizny

$$R = g^{rj} R_{rj}.$$

W przypadku powierzchni 2-wymiarowych, tensor Ricciego jest proporcjonalny do tensora metrycznego

$$R_{rj} = g^{km} (g_{mk} g_{rj} - g_{mj} g_{rk}) \frac{R_{1212}}{g} = (2g_{rj} - \delta_r^m g_{mj}) \frac{R_{1212}}{g} = g_{rj} \frac{R_{1212}}{g}, \quad (2.39)$$

a skalar krzywizny jest proporcjonalny do jedynej niezależnej składowej tensora krzywizny,

$$R = \frac{2R_{1212}}{g}. \quad (2.40)$$

Na podstawie (2.27) mamy relację wiążącą skalar krzywizny z krzywizną Gaussa:

$$K_G = \frac{R_{221}^1}{g_{22}} = \frac{g^{11} R_{1221}}{g_{22}} = -\frac{R_{1212}}{g} = -\frac{R}{2}, \quad (2.41)$$

bo $g^{11} = g_{22}/g$.

PRZYKŁAD 2.21. Dla powierzchni $r(u^1, u^2) = [u^1, u^2, (u^1)^2 - (u^2)^2]$ mamy na podstawie Przykładu 2.12

$$R_{1212} = g_{k1} R_{212}^k = g_{k1} (\partial_2 \Gamma_{21}^k - \partial_1 \Gamma_{22}^k + \Gamma_{2n}^k \Gamma_{21}^n - \Gamma_{1n}^k \Gamma_{22}^n) = \frac{4}{g^2},$$

gdzie $g = 1 + 4(u^1)^2 + 4(u^2)^2$. Wykorzystując (2.39) mamy

$$R_{rj} = \frac{1}{g^2} \begin{bmatrix} 4(1 + 4(u^1)^2) & -16u^1 u^2 \\ -16u^1 u^2 & 4(1 + 4(u^2)^2) \end{bmatrix} = \frac{4}{g^2} g_{rj}$$

oraz na podstawie (2.40)

$$R = \frac{8}{g^2}.$$

Porównując ten wynik z obliczoną w Przykładzie 2.17 krzywizną Gaussa $K_G = -4/g^2$ potwierdza się relacja (2.41).

Rozdział 3

Powierzchnie wielowymiarowe

3.1. Rozmaitości różniczkowe

DEF. 3.1 (Topologia). Topologią na zbiorze X nazywamy rodzinę zbiorów $\{\tau\}$, taką że

- (1) przeliczalna suma zbiorów z rodziny $\{\tau\}$ również należy do $\{\tau\}$,
- (2) skończony przekrój zbiorów z rodziny $\{\tau\}$ również należy do $\{\tau\}$.

Zbiory należące do $\{\tau\}$ nazywamy zbiorami otwartymi, a parę $(X, \{\tau\})$ przestrzenią topologiczną.

DEF. 3.2 (Homeomorfizm). Niech $(X, \{\tau\})$ oraz $(Y, \{\omega\})$ będą przestrzeniami topologicznymi. Odwzorowanie $f : X \rightarrow Y$ nazywamy ciągłym, jeśli $f^{-1}(V) \in \{\tau\}$ dla każdego $V \in \{\omega\}$.

Ciągłe odwzorowanie $f : U \rightarrow V$, które jest bijekcją oraz dla którego f^{-1} jest ciągłe, nazywamy homeomorfizmem.

Niech M będzie przestrzenią topologiczną.

DEF. 3.3. n -wymiarową mapą (układem współrzędnych) punktu $p \in M$ nazywamy parę (φ, U) , gdzie U jest zbiorem otwartym zawierającym p oraz $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ jest homeomorfizmem na otwarty podzbiór $\mathbb{R}^n$.

Dla $p \in U$, $\varphi(p) = (x_1, \dots, x_n)$ są współrzędnymi punktu p .

DEF. 3.4. Każdy zbiór n -wymiarowych map $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}$ pokrywających M , tzn.

$$M = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha},$$

nazywamy n -wymiarowym atlasem.

DEF. 3.5 (Rozmaitość topologiczna). Każdą przestrzeń topologiczną M posiadającą n -wymiarowy atlas nazywamy n -wymiarową rozmaitością topologiczną.

Niech $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ oraz (φ_β, U_β) będą dwiema mapami z atlasu, takimi że $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Wtedy

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \quad (3.1)$$

jest homeomorfizmem. Jeśli wszystkie homeomorfizmy postaci (3.1) są klasy C^r , $r = 1, 2, \dots$, to mówimy, że atlas zawierający te mapy jest klasy C^r .

DEF. 3.6. Dwa n -wymiarowe atlasy $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}$, $\{(\psi_\alpha, V_\alpha)\}$ klasy C^r są zgodne jeśli rodzina $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha), (\psi_\alpha, V_\alpha)\}$ jest również atlasem klasy C^r .

Warunek zgodności oznacza, że odwzorowania $\varphi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta(U_\alpha \cap V_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap V_\beta)$ określone na niepustych podzbiórach $U_\alpha \cap V_\beta$ są klasy C^r . Zgodność atlasów jest relacją równoważności. Klasa abstrakcji tej relacji w zbiorze wszystkich atlasów klasy C^r określa strukturę różniczkową na M . Dana rozmaitość topologiczna M może posiadać atlasy tej samej klasy, które nie są zgodne.

PRZYKŁAD 3.1. Jednoelementowe atlasy $\{(\varphi, \mathbb{R})\}$ oraz $\{(\psi, \mathbb{R})\}$, gdzie $\varphi(t) = t$, $\psi(t) = t^3$ są klasy C^r . Natomiast atlas $\{(\varphi, \mathbb{R}), (\psi, \mathbb{R})\}$ nie jest klasy C^r , bowiem funkcja $\varphi \circ \psi^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \sqrt[3]{t}$ nie jest różniczkowalna w $t = 0$. Zatem wymienione jednoelementowe atlasy nie są zgodne, a przestrzeń $M = \mathbb{R}$ ma co najmniej dwie struktury różniczkowe.

Różne struktury różniczkowe zadawane są przez atlasy maksymalne.

DEF. 3.7. Atlas $\mathcal{A}$ jest maksymalny, gdy dla każdego $p \in M$ i dla każdego zbioru otwartego $V \subseteq M$ istnieje mapa $(\varphi, U) \in \mathcal{A}$, taka że $p \in U \subseteq V$.

DEF. 3.8 (Rozmaitość różniczkowa). Rozmaitością różniczkową klasy C^r nazywamy przestrzeń topologiczną (Hausdorffa, przeliczalną) wraz z wyróżnioną n -wymiarową strukturą różniczkową klasy C^r .

Jeśli rozmaitość jest klasy C^1 , to istnieje równoważny atlas klasy C^∞ , a więc gładka (klasy C^∞) struktura różniczkowa.

Metodę konstrukcji rozmaitości różniczkowych podaje poniższe twierdzenie.

Tw. 3.1. Niech $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ będzie gładką funkcją na otwartym podzbiórze $U \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ i niech $c \in \mathbb{R}^m$. Jeśli dla każdego $a \in f^{-1}(c)$ pochodna $df|_a : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest surjekcją, to przeciwobraz $f^{-1}(c)$ jest n -wymiarową gładką rozmaitością różniczkową.

Fakt ten wynika z twierdzenia o funkcjach uwikłanych. Jednocześnie na mocy twierdzenia Whitneya: jeśli M jest gładką rozmaitością wymiaru n , to istnieje dyfeomorfizm $\theta : M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$, taki że zbiór $\theta(M)$ jest podrozmaitością w $\mathbb{R}^{2n+1}$.

PRZYKŁAD 3.2. Niech M_n oznacza zbiór macierzy $n \times n$ o rzeczywistych składowych oraz niech $O(n)$ będzie zbiorem ortogonalnych macierzy, tj.

$$O(n) = \{A \in M_n : AA^T = A^T A = \mathbb{1}\}.$$

Określmy funkcję $f : M_n \rightarrow S_n$ z n^2 -wymiarowej przestrzeni wektorowej w przestrzeń symetrycznych macierzy S_n wymiaru $n(n+1)/2$ jako

$$f(X) = XX^T.$$

Pochodna tej funkcji ma postać

$$df|_X(H) = HX^T + XH^T, \quad H \in M_n.$$

Z powodu dowolności H i nieosobliwości $A \in O(n)$, możemy znaleźć $K \in M_n$, takie że $H = KA$. Zatem

$$df|_A(K) = KAA^T + A(KA)^T = K + K^T \in S_n.$$

Dodatkowo dla $K = S/2$, gdzie S jest symetryczna, $df|_A(K)$ pokrywa cały zbiór macierzy symetrycznych. W konsekwencji, $df|_A$ jest surjekcją oraz $O(n) = f^{-1}(\mathbb{1})$ jest rozmaitością różniczkową wymiaru

$$\dim O(n) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

3.2. Pola tensorowe i formy różniczkowe

Niech X, Y, Z będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{K}$. Odwzorowanie $\phi : X \times Y \rightarrow Z$ nazywamy dwuliniowym, jeśli dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}\phi(\alpha x_1 + \beta x_2, y) &= \alpha \phi(x_1, y) + \beta \phi(x_2, y), & \forall x_1, x_2 \in X, y \in Y \\ \phi(x, \alpha y_1 + \beta y_2) &= \alpha \phi(x, y_1) + \beta \phi(x, y_2), & \forall x \in X, y_1, y_2 \in Y.\end{aligned}$$

Ponieważ w ogólności obrazem ϕ nie musi być podprzestrzeń wektorowa w Z , chcielibyśmy narzucić pewne warunki, aby ϕ zachowywało strukturę liniową.

DEF. 3.9 (Iloczyn tensorowy przestrzeni). Iloczynem tensorowym przestrzeni wektorowych X oraz Y jest wektorowa przestrzeń Z wraz z dwuliniowym odwzorowaniem $\phi : X \times Y \rightarrow Z$, takim że dla każdej przestrzeni wektorowej V i dwuliniowego odwzorowania $\bar{\phi} : X \times Y \rightarrow V$ istnieje *jedyne* liniowe odwzorowanie $\psi : Z \rightarrow V$, takie że poniższy diagram jest przemienny.

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{\bar{\phi}} & V \\ \phi \downarrow & \nearrow \psi & \\ Z & & \end{array}$$

Zwyczajowo piszemy $Z = X \otimes Y$ oraz $\phi(x, y) = x \otimes y$.

Powyższy diagram implikuje fakt, że inny wybór odwzorowania ϕ (a zatem inny wybór iloczynu tensorowego) prowadzi do izomorficznej struktury wektorowej. Podsumowuje to następujące stwierdzenie:

FAKT 3.3. Załóżmy, że $X \otimes Y$ oraz $X \bar{\otimes} Y$ są dwoma iloczynami tensorowymi X i Y . Wówczas istnieje liniowy izomorfizm $\chi : X \otimes Y \rightarrow X \bar{\otimes} Y$, taki że $\chi(x \otimes y) = x \bar{\otimes} y$ dla wszystkich $x \in X$ oraz $y \in Y$.

Ważną rolę odgrywa także następująca własność:

FAKT 3.4. Dla każdej przestrzeni wektorowej Z przekształcenie liniowe

$$I : \mathcal{L}(X \otimes Y; Z) \rightarrow \mathcal{B}(X, Y; Z), \quad I(\ell) = \ell \circ \otimes$$

gdzie $\mathcal{L}(X \otimes Y; Z)$ oznacza zbiór przekształceń liniowych $\ell : X \otimes Y \rightarrow Z$ oraz $\mathcal{B}(X, Y; Z)$ zbiór przekształceń dwuliniowych $b : X \times Y \rightarrow Z$, jest izomorfizmem.

Izomorfizm I ustala wzajemność odpowiedniości pomiędzy elementami $\mathcal{L}(X \otimes Y; Z)$ oraz $\mathcal{B}(X, Y; Z)$ przedstawiony na poniższym diagramie

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{\phi} & Z \\ \otimes \downarrow & \nearrow I & \\ X \otimes Y & & \end{array}$$

Ponieważ $X \otimes Y$ jest nadal przestrzenią wektorową, to iloczyn tensorowy można uogólnić na skończoną liczbę przestrzeni wektorowych, tj. podobnie definiuje się $X_1 \otimes \cdots \otimes X_N$.

Wyberzmy w n -wymiarowej przestrzeni X bazę $\{e_1, \dots, e_n\}$ oraz w m -wymiarowej przestrzeni Y bazę $\{f_1, \dots, f_m\}$, wówczas $Z = X \otimes Y$ będzie mn -wymiarową przestrzenią wektorową, z bazą $\{\phi(e_k, f_j) = e_k \otimes f_j\}_{k,j=1}^{nm}$. W konsekwencji elementami przestrzeni $X \otimes Y$ są obiekty postaci

$$z = \sum_{i=1}^r x_i \otimes y_i = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m z^{kj} e_k \otimes f_j,$$

gdzie $r \leq \min\{n, m\}$ (?) oraz zbiory $\{x_i\}$ i $\{y_i\}$ są liniowo niezależne.

Niech $x \in X$ ma wybranej bazie współrzędne $(x^1, \dots, x^n)$ oraz $y \in Y$ ma współrzędne $(y^1, \dots, y^m)$. W praktyce wybieramy następujący, kanoniczny iloczyn tensorowy

$$(x^1, \dots, x^n) \otimes (y^1, \dots, y^m) = (x^1 y^1, x^1 y^2, \dots, x^1 y^m, x^2 y^1, x^2 y^2, \dots, x^n y^m).$$

Niech teraz V będzie n -wymiarową przestrzenią wektorową z bazą $\{e_1, \dots, e_n\}$ oraz niech V^* będzie przestrzenią dualną do V , tj. zbiorem wszystkich form liniowych $f : V \rightarrow \mathbb{R}$. Z kursu algebry liniowej wiadomo, że V^* jest n -wymiarową przestrzenią wektorową z kanoniczną bazą dualną $\{e^1, \dots, e^n\}$, określoną jako

$$e^k(v) = v^k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (3.2)$$

gdzie v^k są współrzędnymi v w bazie $\{e_1, \dots, e_n\}$. Dodatkowo, przestrzeń wektorowa $(V^*)^*$ jest kanonicznie izomorficzna z V , zatem wektory z V można utożsamiać z formami liniowymi działającymi na V^* , dzięki relacji

$$e_k(\omega) = \omega_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (3.3)$$

gdzie ω_k są współrzędnymi formy ω w bazie $\{e^1, \dots, e^n\}$.

PRZYKŁAD 3.3. W oparciu o Def. 3.9 możemy rozważać przestrzeń wektorową $V \otimes V^*$ jako rozpiętą przez wektory bazowe $\{e_k \otimes e^j\}_{k,j=1}^n$. Elementami tej przestrzeni są *tensory typu (1,1)*

$$V \otimes V^* \ni T^{(1,1)} = \sum_{k,j=1}^n t_j^k e_k \otimes e^j,$$

gdzie zespół liczb $\{t_j^k\}_{k,j=1}^n$ określa współrzędne tensora T w bazie $\{e_k \otimes e^j\}_{k,j=1}^n$. Zauważmy, że

$$T \in V \otimes V^* \iff T \in (V^*)^* \otimes V^* \iff T \in (V^* \otimes V)^* \iff T \in \mathcal{L}(V^* \otimes V, \mathbb{R})$$

Zatem, z uwagi na Fakt 3.4, tensor T typu (1,1) możemy utożsamiać z dwuliniowym odwzorowaniem $V^* \times V \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}(V^* \otimes V, \mathbb{R}) \simeq B(V^*, V; \mathbb{R}).$$

Rzeczywiście, biorąc pod uwagę (3.2) i (3.3) mamy

$$T^{(1,1)}(\omega, v) = \sum_{k,j=1}^n t_j^k (e_k \otimes e^j)(\omega, v) = \sum_{k,j=1}^n t_j^k e_k(\omega) e^j(v) = \sum_{k,j=1}^n t_j^k \omega_k v^j.$$

Wyniki powyższego przykładu można uogólnić na wielokrotny iloczyn tensorowy.

DEF. 3.10 (Tensor). Tensorem typu (r, s) na przestrzeni wektorowej V nazywamy wieloliniowe, tj. liniowe w każdym argumencie, odwzorowanie

$$T^{(r,s)} : \underbrace{V \times \dots \times V}_{r\text{-krotnie}} \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{s\text{-krotnie}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Na mocy Faktu 3.4 takie wieloliniowe odwzorowanie można utożsamiać z elementem

$$T \in \mathcal{L}(\underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{r\text{-krotnie}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{s\text{-krotnie}}) \iff T \in \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{r\text{-krotnie}} \otimes \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{s\text{-krotnie}}.$$

W konsekwencji

$$T^{(r,s)} = t_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_r} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_s},$$

gdzie

$$t_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} = T^{(r,s)}(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}, e^{j_1}, \dots, e^{j_s})$$

są składowymi tensora T typu (r, s) w bazie $\{e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_r} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_s}\}$.

Składowe te zmieniają się przy zmianach bazy. Jeśli zmienimy bazę $e_i \mapsto (e')_i = A_i^k e_k$, to $e_k = (A')_k^j (e')_j$, gdzie $A_i^j (A')_j^k = \delta_i^k$ oraz $(e')^i = (A')^i_j e^j$, $e^j = A_i^j (e')^i$, wówczas

$$\{e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_r} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_s}\} \mapsto \{(e')^{i_1} \otimes \dots \otimes (e')^{i_r} \otimes (e')_{j_1} \otimes \dots \otimes (e')_{j_s}\}.$$

Składowe tensora T transformują się wówczas zgodnie z regułą

$$\begin{aligned} (t')_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} &= T^{(r,s)}((e')_{i_1}, \dots, (e')_{i_r}, (e')^{j_1}, \dots, (e')^{j_s}) \\ &= T^{(r,s)}(A_{i_1}^{k_1} e_{k_1}, \dots, A_{i_r}^{k_r} e_{k_r}, (A')_{l_1}^{j_1} e^{l_1}, \dots, (A')_{l_s}^{j_s} e^{l_s}) \\ &= A_{i_1}^{k_1} \dots A_{i_r}^{k_r} (A')_{l_1}^{j_1} \dots (A')_{l_s}^{j_s} T^{(r,s)}(e_{k_1}, \dots, e_{k_r}, e^{l_1}, \dots, e^{l_s}) \\ &= A_{i_1}^{k_1} \dots A_{i_r}^{k_r} (A')_{l_1}^{j_1} \dots (A')_{l_s}^{j_s} t_{k_1, \dots, k_r}^{l_1, \dots, l_s}. \end{aligned}$$

Górne składowe tensora nazywamy składowymi *kontrawariantnymi*, a składowe dolne *kowariantnymi*.

W szczególności składowe wektora $V \ni v = v^i e_i$ (kontrawariantne) transformują się zgodnie z relacją

$$(v')^j = (A')^j_i v^i,$$

podczas gdy składowe formy $V^* \ni \omega = \omega_i e^i$ (kowariantne) przekształcają się zgodnie z

$$(\omega')_i = A_i^k \omega_k.$$