

Wprowadzenie do fal grawitacyjnych

Jacek Jurkowski

Instytut Fizyki

2016

Plan wykładu

- 1 Wprowadzenie i trochę historii
- 2 Podstawowe pojęcia i formalizm Ogólnej Teorii Względności
- 3 Podstawy opisu falowego
- 4 Równanie falowe w przybliżeniu słabego pola grawitacyjnego
- 5 Moc promieniowania grawitacyjnego. Przykłady źródeł
- 6 Promieniowanie grawitacyjne od układu podwójnego
- 7 Detekcja promieniowania grawitacyjnego

- 14.09.2015: pierwszy raz w historii zarejestrowano falę grawitacyjną
- 11.02.2016 r. oficjalnie to ogłoszono

- 14.09.2015: pierwszy raz w historii zarejestrowano falę grawitacyjną
- 11.02.2016 r. oficjalnie to ogłoszono
- artykuł z Am. J. Phys. 75, 597 (2007)

Hands-on gravitational wave astronomy: Extracting astrophysical information from simulated signals

Louis J. Rubbo

Center for Gravitational Wave Physics, Pennsylvania State University, University Park, Pennsylvania 16802

Shane L. Larson^{a)}

Department of Physics, Weber State University, Ogden, Utah 84408

Michelle B. Larson^{a)}

Department of Physics, Utah State University, Logan, Utah 84322

Dale R. Ingram

LIGO Hanford Observatory, Richland, Washington 99352

(Received 4 October 2006; accepted 9 March 2007)

In this article we introduce an activity in which introductory astronomy students act as gravitational wave astronomers by extracting information from simulated gravitational wave signals. The process mimics the way real gravitational wave analysis is handled by using plots of a pure gravitational wave signal. The students measure the properties of the simulated signal and use these measurements to evaluate standard relations for astrophysical source parameters. Although the activity described focuses on circular binaries, the techniques described can be applied to other gravitational wave sources as well. A problem based on the discussion in this paper is available for use in introductory laboratory courses. © 2007 American Association of Physics Teachers.

[DOI: 10.1119/1.2721587]

- Jayant Narlikar, An Introduction to Relativity, Cambridge Univ. Press.
- S. Weinberg, Gravitation and Cosmology. Principles and Applications of the General Theory of Relativity, Wiley & Sons.

- Jayant Narlikar, *An Introduction to Relativity*, Cambridge Univ. Press.
- S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology. Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, Wiley & Sons.
- Jolien D. E. Creighton and Warren G. Anderson, *Gravitational-Wave Physics and Astronomy. An Introduction to Theory, Experiment and Data Analysis*, Wiley.
- Michele Maggiore, *Gravitational Waves. Theory and Experiments*, Oxford Univ. Press.

- Jayant Narlikar, *An Introduction to Relativity*, Cambridge Univ. Press.
- S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology. Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, Wiley & Sons.
- Jolien D. E. Creighton and Warren G. Anderson, *Gravitational-Wave Physics and Astronomy. An Introduction to Theory, Experiment and Data Analysis*, Wiley.
- Michele Maggiore, *Gravitational Waves. Theory and Experiments*, Oxford Univ. Press.
- B. F. Schutz, *Wstęp do ogólnej teorii względności*, Wydawnictwo Naukowe PWN.
- J. Foster, J. D. Nightingale, *Ogólna teoria względności*, Wydawnictwo Naukowe PWN.
- L. D. Landau, J. M. Lifszic, *Teoria pola*, Wydawnictwo Naukowe PWN.
- M. Demiański, *Astrofizyka relatywistyczna*, Biblioteka Fizyki, Wydawnictwo Naukowe PWN

Cele wykładu

- od teorii do detekcji fal grawitacyjnych.

- od teorii do detekcji fal grawitacyjnych.

VOLUME 4, NUMBER 8

PHYSICAL REVIEW LETTERS

APRIL 15, 1960

SPHERICAL GRAVITATIONAL WAVES*

Ivor Robinson

Department of Physics, University of North Carolina, Chapel Hill, North Carolina,

and

A. Trautman

Institute of Physics, Polish Academy of Science, Warsaw, Poland[†]

(Received March 7, 1960; revised manuscript received March 24, 1960)

This note presents a class of solutions to Einstein's gravitational equations for empty space. Some of the solutions appear to represent a very simple kind of spherical radiation. The metric considered has the form

of incorrect signature, which can be eliminated, however, by the substitution $\xi = 4\xi^{-3}$.

In the remaining case, where m vanishes and K is independent of ξ, η , the solution is type II null or flat, the condition for flatness being $A = 0$,

- od teorii do detekcji fal grawitacyjnych.

VOLUME 4, NUMBER 8

PHYSICAL REVIEW LETTERS

APRIL 15, 1960

SPHERICAL GRAVITATIONAL WAVES*

Ivor Robinson

Department of Physics, University of North Carolina, Chapel Hill, North Carolina,

and

A. Trautman

Institute of Physics, Polish Academy of Science, Warsaw, Poland[†]


(Received March 7, 1960; revised manuscript received March 24, 1960)

This note presents a class of solutions to Einstein's gravitational equations for empty space. Some of the solutions appear to represent a very simple kind of spherical radiation. The metric considered has the form

of incorrect signature, which can be eliminated, however, by the substitution $\xi = 4\xi^{-2}$.

In the remaining case, where m vanishes and K is independent of ξ, η , the solution is type II null or flat, the condition for flatness being $A = 0$,

PRL 116, 061102 (2016)

 Selected for a Viewpoint in *Physics*
PHYSICAL REVIEW LETTERS
week ending
12 FEBRUARY 2016

Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger
B. P. Abbott *et al.**

(LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration)

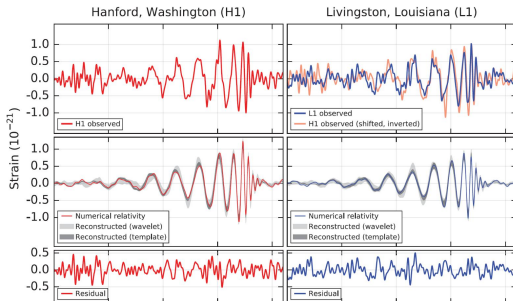
(Received 21 January 2016; published 11 February 2016)

On September 14, 2015 at 09:50:45 UTC the two detectors of the Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory simultaneously observed a transient gravitational-wave signal. The signal sweeps upwards in frequency from 35 to 250 Hz with a peak gravitational-wave strain of 1.0×10^{-21} . It matches the waveform predicted by general relativity for the inspiral and merger of a pair of black holes and the ringdown of the resulting single black hole. The signal was observed with a matched-filter signal-to-noise ratio of 24 and a false alarm rate estimated to be less than 1 event per 203 000 years, equivalent to a significance greater than 5.1σ . The source lies at a luminosity distance of 410^{+140}_{-180} Mpc corresponding to a redshift $z = 0.09^{+0.03}_{-0.04}$. In the source frame, the initial black hole masses are $36^{+5}_{-4} M_{\odot}$ and $29^{+4}_{-4} M_{\odot}$, and the final black hole mass is $62^{+4}_{-4} M_{\odot}$, with $3.0^{+0.5}_{-0.5} M_{\odot} c^2$ radiated in gravitational waves. All uncertainties define 90% credible intervals. These observations demonstrate the existence of binary stellar-mass black hole systems. This is the first direct detection of gravitational waves and the first observation of a binary black hole merger.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.061102

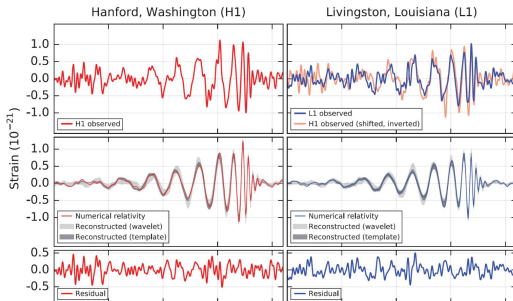
- jakie informacje niesie sygnał grawitacyjny

- jakie informacje niesie sygnał grawitacyjny



le

- jakie informacje niesie sygnał grawitacyjny

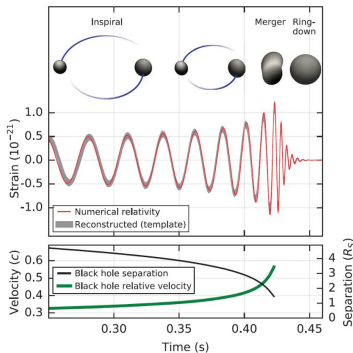


e

- formalizm matematyczny fal grawitacyjnych

- modelowanie prostych źródeł fal grawitacyjnych

- modelowanie prostych źródeł fal grawitacyjnych



- 1 Zmienne w czasie i przestrzeni zaburzenia ośrodka:
$$\psi(x, y, z, t) = \psi(\vec{r}, t)$$

- 1 Zmienne w czasie i przestrzeni zaburzenia ośrodka:
 $\psi(x, y, z, t) = \psi(\vec{r}, t)$
- 2 Rozwiązania równania falowego

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) \quad \Longleftrightarrow \quad \square \psi(\vec{r}, t) = 0$$

- 1 Zmienne w czasie i przestrzeni zaburzenia ośrodka:

$$\psi(x, y, z, t) = \psi(\vec{r}, t)$$

- 2 Rozwiązania równania falowego

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) \quad \Longleftrightarrow \quad \square \psi(\vec{r}, t) = 0$$

- fale płaskie: $\psi(\vec{r}, t) = A \sin(\underline{k}\vec{r} - \omega t)$
- fale kuliste: $\psi(\vec{r}, t) = A/r \sin(r - ct)$
- ogólnie: $\psi(\vec{r}, t) = f(r - ct)$

- 1 Zmienne w czasie i przestrzeni zaburzenia ośrodka:

$$\psi(x, y, z, t) = \psi(\vec{r}, t)$$

- 2 Rozwiązania równania falowego

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) \quad \iff \quad \square \psi(\vec{r}, t) = 0$$

- fale płaskie: $\psi(\vec{r}, t) = A \sin(\underline{k}\vec{r} - \omega t)$
- fale kuliste: $\psi(\vec{r}, t) = A/r \sin(r - ct)$
- ogólnie: $\psi(\vec{r}, t) = f(r - ct)$
- zasada superpozycji!

- 1 Zmienne w czasie i przestrzeni zaburzenia ośrodka:

$$\psi(x, y, z, t) = \psi(\vec{r}, t)$$

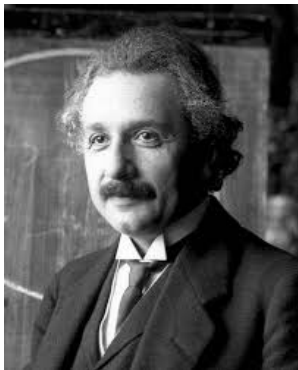
- 2 Rozwiązania równania falowego

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) \iff \square \psi(\vec{r}, t) = 0$$

- fale płaskie: $\psi(\vec{r}, t) = A \sin(\underline{k}\vec{r} - \omega t)$
- fale kuliste: $\psi(\vec{r}, t) = A/r \sin(r - ct)$
- ogólnie: $\psi(\vec{r}, t) = f(r - ct)$
- zasada superpozycji!

Fale grawitacyjne

W ogólności fale grawitacyjne nie spełniają (liniowego) równania falowego \iff nie obowiązuje dla nich zasada superpozycji



- 11.1915: A. Einstein publikuje pracę [The Formal Foundation of the General Theory of Relativity](#),

- 11.1915: A. Einstein publikuje pracę *The Formal Foundation of the General Theory of Relativity*,
- 02.1916: idea fal grawitacyjnych zrodziła się po wymianie listów pomiędzy A. Einsteinem a K. Schwarzschildem,

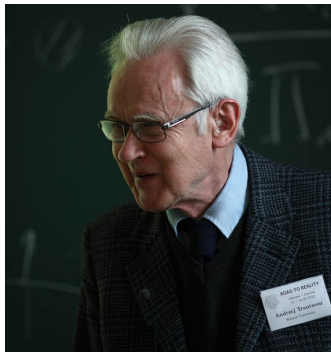
- 11.1915: A. Einstein publikuje pracę [The Formal Foundation of the General Theory of Relativity](#),
- 02.1916: idea fal grawitacyjnych zrodziła się po wymianie listów pomiędzy A. Einsteinem a K. Schwarzschildem,
- 06.1916: artykuł A. Einsteina [Approximative Integration of the Field Equations of Gravitation](#) skierowany do Pruskiej Akademii Nauk z wyprowadzeniem równania falowego

- 11.1915: A. Einstein publikuje pracę [The Formal Foundation of the General Theory of Relativity](#),
- 02.1916: idea fal grawitacyjnych zrodziła się po wymianie listów pomiędzy A. Einsteinem a K. Schwarzschildem,
- 06.1916: artykuł A. Einsteina [Approximative Integration of the Field Equations of Gravitation](#) skierowany do Pruskiej Akademii Nauk z wyprowadzeniem równania falowego
- kontrowersje wokół istnienia fal grawitacyjnych i problemu, czy przenoszą one energię trwały do połowy lat 50-tych,

- 11.1915: A. Einstein publikuje pracę [The Formal Foundation of the General Theory of Relativity](#),
- 02.1916: idea fal grawitacyjnych zrodziła się po wymianie listów pomiędzy A. Einsteinem a K. Schwarzschildem,
- 06.1916: artykuł A. Einsteina [Approximative Integration of the Field Equations of Gravitation](#) skierowany do Pruskiej Akademii Nauk z wyprowadzeniem równania falowego
- kontrowersje wokół istnienia fal grawitacyjnych i problemu, czy przenoszą one energię trwały do połowy lat 50-tych,
- uznanie istnienia fal grawitacyjnych (A. Trautman, H. Bondi, R. Feynmann)

- 11.1915: A. Einstein publikuje pracę [The Formal Foundation of the General Theory of Relativity](#),
- 02.1916: idea fal grawitacyjnych zrodziła się po wymianie listów pomiędzy A. Einsteinem a K. Schwarzschildem,
- 06.1916: artykuł A. Einsteina [Approximative Integration of the Field Equations of Gravitation](#) skierowany do Pruskiej Akademii Nauk z wyprowadzeniem równania falowego
- kontrowersje wokół istnienia fal grawitacyjnych i problemu, czy przenoszą one energię trwały do połowy lat 50-tych,
- uznanie istnienia fal grawitacyjnych (A. Trautman, H. Bondi, R. Feynmann)
- lata 60-te: pierwsze (uznane jako nieudane) próby detekcji (Joseph Weber) w oparciu o drgania dwóch jednotonowych walców aluminiowych na Uniwersytecie Maryland

- 11.1915: A. Einstein publikuje pracę [The Formal Foundation of the General Theory of Relativity](#),
- 02.1916: idea fal grawitacyjnych zrodziła się po wymianie listów pomiędzy A. Einsteinem a K. Schwarzschildem,
- 06.1916: artykuł A. Einsteina [Approximative Integration of the Field Equations of Gravitation](#) skierowany do Pruskiej Akademii Nauk z wyprowadzeniem równania falowego
- kontrowersje wokół istnienia fal grawitacyjnych i problemu, czy przenoszą one energię trwały do połowy lat 50-tych,
- uznanie istnienia fal grawitacyjnych (A. Trautman, H. Bondi, R. Feynmann)
- lata 60-te: pierwsze (uznane jako nieudane) próby detekcji (Joseph Weber) w oparciu o drgania dwóch jednotonowych walców aluminiowych na Uniwersytecie Maryland
- 1974: pośrednie potwierdzenie istnienia fal grawitacyjnych (J. Taylor, R. Hulse) — układ podwójny dwóch pulsarów PSR B1913+16



- niezwykle słabe: względne przesunięcia 10^{-20} – 10^{-22} ,

$$h(t) = A(t) \cos \Phi(t)$$

- niezwykle słabe: względne przesunięcia 10^{-20} – 10^{-22} ,

$$h(t) = A(t) \cos \Phi(t)$$

- niesymetryczny kolaps grawitacyjny gwiazd (supernowe typu II), jeśli miałyby miejsce w naszej Galaktyce prowadziłyby do względnego przesunięcia 10^{-18}

- niezwykle słabe: względne przesunięcia 10^{-20} – 10^{-22} ,

$$h(t) = A(t) \cos \Phi(t)$$

- niesymetryczny kolaps grawitacyjny gwiazd (supernowe typu II), jeśli miałyby miejsce w naszej Galaktyce prowadziłyby do względnego przesunięcia 10^{-18}
- obracające się, niesymetryczne masywne obiekty

- niezwykle słabe: względne przesunięcia 10^{-20} – 10^{-22} ,

$$h(t) = A(t) \cos \Phi(t)$$

- niesymetryczny kolaps grawitacyjny gwiazd (supernowe typu II), jeśli miałyby miejsce w naszej Galaktyce prowadziłyby do względnego przesunięcia 10^{-18}
- obracające się, niesymetryczne masywne obiekty
- układy podwójne zwartych obiektów (czarnych dziur, gwiazd neutronowych, białych karłów): utrata energii na skutek emisji fal grawitacyjnych (fale o częstotliwości 10^{-4} – 1 Hz)

- niezwykle słabe: względne przesunięcia 10^{-20} – 10^{-22} ,

$$h(t) = A(t) \cos \Phi(t)$$

- niesymetryczny kolaps grawitacyjny gwiazd (supernowe typu II), jeśli miałyby miejsce w naszej Galaktyce prowadziłyby do względnego przesunięcia 10^{-18}
- obracające się, niesymetryczne masywne obiekty
- układy podwójne zwartych obiektów (czarnych dziur, gwiazd neutronowych, białych karłów): utrata energii na skutek emisji fal grawitacyjnych (fale o częstotliwości 10^{-4} –1 Hz)
- zderzenia zwartych obiektów: nagły wzrost częstotliwości fal (do kHz) i amplitudy w ostatnich chwilach przed połączeniem

- niezwykle słabe: względne przesunięcia 10^{-20} – 10^{-22} ,

$$h(t) = A(t) \cos \Phi(t)$$

- niesymetryczny kolaps grawitacyjny gwiazd (supernowe typu II), jeśli miałyby miejsce w naszej Galaktyce prowadziłyby do względnego przesunięcia 10^{-18}
- obracające się, niesymetryczne masywne obiekty
- układy podwójne zwartych obiektów (czarnych dziur, gwiazd neutronowych, białych karłów): utrata energii na skutek emisji fal grawitacyjnych (fale o częstotliwości 10^{-4} –1 Hz)
- zderzenia zwartych obiektów: nagły wzrost częstotliwości fal (do kHz) i amplitudy w ostatnich chwilach przed połączeniem
- 2005: trzy grupy teoretyków z USA opublikowały pierwsze wyniki numerycznych obliczeń (**numerical relativity**) ostatnich cykli ewolucji oraz procesu zderzenia (merger) i relaksacji pozderzeniowej (ring down) układu dwóch czarnych dziur o takich samych masach,
- na bazie tych obliczeń można było uzyskać postaci sygnałów grawitacyjnych (waveform)

- detektory rezonansowe: cylindryczne detektory rezonansowe (Uniwersytety W Rzymie, Stanu Luizjana, Perth, Legarno, itd.)

- detektory rezonansowe: cylindryczne detektory rezonansowe (Uniwersytety W Rzymie, Stanu Luizjana, Perth, Legarno, itd.)
- interferometry: LIGO (koordynowany przez Caltech) w Hanford w stanie Washington (pn-zach USA) i w Livingstone w stanie Luizjana (pd-wsch USA), VIRGO w Pizie (Włochy)

- detektory rezonansowe: cylindryczne detektory rezonansowe (Uniwersytety W Rzymie, Stanu Luizjana, Perth, Legarno, itd.)
- interferometry: LIGO (koordynowany przez Caltech) w Hanford w stanie Washington (pn-zach USA) i w Livingstone w stanie Luizjana (pd-wsch USA), VIRGO w Pizie (Włochy)
- interferometria kosmiczna: LISA

Zasady względności i równoważności

Zasada względności (STW)

Prawa fizyki są takie same we wszystkich inercjalnych układach odniesienia

Zasada względności (STW)

Prawa fizyki są takie same we wszystkich inercjalnych układach odniesienia

Słaba zasada równoważności w OTW

W każdym punkcie czasoprzestrzeni, w dowolnym polu grawitacyjnym jest możliwe wskazanie lokalnego układu inercjalnego, takiego że w dostatecznie małym otoczeniu tego punktu, prawa ruchu swobodnie poruszających się cząstek mają postać taką samą jak w nieprzyspieszającym, kartezyjskim układzie współrzędnych w nieobecności sił grawitacji

Zasada względności (STW)

Prawa fizyki są takie same we wszystkich inercjalnych układach odniesienia

Słaba zasada równoważności w OTW

W każdym punkcie czasoprzestrzeni, w dowolnym polu grawitacyjnym jest możliwe wskazanie lokalnego układu inercjalnego, takiego że w dostatecznie małym otoczeniu tego punktu, prawa ruchu swobodnie poruszających się cząstek mają postać taką samą jak w nieprzyspieszającym, kartezjańskim układzie współrzędnych w nieobecności sił grawitacji

Silna zasada równoważności w OTW

W każdym punkcie czasoprzestrzeni, w dowolnym polu grawitacyjnym jest możliwe wskazanie lokalnego układu inercjalnego, takiego że w dostatecznie małym otoczeniu tego punktu, prawa fizyki mają postać taką samą jak w nieprzyspieszającym, kartezjańskim układzie współrzędnych w nieobecności sił grawitacji

- Czasoprzestrzeń Minkowskiego: kwadrat odległości pomiędzy zdarzeniami $(x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)$ oraz $(c(t + dt), x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3)$ wynosi

$$dl^2 = \pm(c^2 dt^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2)$$

dl jest niezmiennikiem transformacji Lorentza

- Czasoprzestrzeń Minkowskiego: kwadrat odległości pomiędzy zdarzeniami $(x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)$ oraz $(c(t + dt), x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3)$ wynosi

$$dl^2 = \pm(c^2 dt^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2)$$

dl jest niezmiennikiem transformacji Lorentza

- Czasoprzestrzeń OTW — czterowymiarowa powierzchnia (rozmaitość różniczkowa)

- Czasoprzestrzeń Minkowskiego: kwadrat odległości pomiędzy zdarzeniami $(x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)$ oraz $(c(t + dt), x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3)$ wynosi

$$dl^2 = \pm(c^2 dt^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2)$$

dl jest niezmiennikiem transformacji Lorentza

- Czasoprzestrzeń OTW — czterowymiarowa powierzchnia (rozmaitość różniczkowa)
- Mierzenie odległości i pól — metryka (pseudo-riemannowska)

$$dl^2 = \sum_{\alpha, \beta=0}^3 g_{\alpha\beta}(\underline{x}) dx^\alpha dx^\beta \equiv g_{\alpha\beta}(\underline{x}) dx^\alpha dx^\beta$$

- Czasoprzestrzeń Minkowskiego: kwadrat odległości pomiędzy zdarzeniami $(x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)$ oraz $(c(t + dt), x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3)$ wynosi

$$dl^2 = \pm(c^2 dt^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2)$$

dl jest niezmiennikiem transformacji Lorentza

- Czasoprzestrzeń OTW — czterowymiarowa powierzchnia (rozmaitość różniczkowa)
- Mierzenie odległości i pól — metryka (pseudo-riemannowska)

$$dl^2 = \sum_{\alpha, \beta=0}^3 g_{\alpha\beta}(\underline{x}) dx^\alpha dx^\beta \equiv g_{\alpha\beta}(\underline{x}) dx^\alpha dx^\beta$$

- Pola tensorowe — przekształcenia wieloliniowe żyjące w przestrzeniach stycznych czasoprzestrzeni transformujące się w zadany sposób przy zmianach układu współrzędnych

- Czasoprzestrzeń Minkowskiego: kwadrat odległości pomiędzy zdarzeniami $(x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)$ oraz $(c(t + dt), x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3)$ wynosi

$$dl^2 = \pm(c^2 dt^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2)$$

dl jest niezmiennikiem transformacji Lorentza

- Czasoprzestrzeń OTW — czterowymiarowa powierzchnia (rozmaitość różniczkowa)
- Mierzenie odległości i pól — metryka (pseudo-riemannowska)

$$dl^2 = \sum_{\alpha, \beta=0}^3 g_{\alpha\beta}(\underline{x}) dx^\alpha dx^\beta \equiv g_{\alpha\beta}(\underline{x}) dx^\alpha dx^\beta$$

- Pola tensorowe — przekształcenia wieloliniowe żyjące w przestrzeniach stycznych czasoprzestrzeni transformujące się w zadany sposób przy zmianach układu współrzędnych
 - wektory kontrawariantne (np. wektory styczne do krzywych)
 - wektory kowariantne (np. gradient funkcji)

- Czasoprzestrzeń Minkowskiego: kwadrat odległości pomiędzy zdarzeniami $(x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)$ oraz $(c(t + dt), x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3)$ wynosi

$$dl^2 = \pm(c^2 dt^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2)$$

dl jest niezmiennikiem transformacji Lorentza

- Czasoprzestrzeń OTW — czterowymiarowa powierzchnia (rozmaitość różniczkowa)
- Mierzenie odległości i pól — metryka (pseudo-riemannowska)

$$dl^2 = \sum_{\alpha, \beta=0}^3 g_{\alpha\beta}(\underline{x}) dx^\alpha dx^\beta \equiv g_{\alpha\beta}(\underline{x}) dx^\alpha dx^\beta$$

- Pola tensorowe — przekształcenia wieloliniowe żyjące w przestrzeniach stycznych czasoprzestrzeni transformujące się w zadany sposób przy zmianach układu współrzędnych
 - wektory kontrawariantne (np. wektory styczne do krzywych)
 - wektory kowariantne (np. gradient funkcji)
 - kontrakcja i obniżanie indeksu: $v^\alpha \omega_\alpha, g_{\alpha\beta} v^\alpha = v_\beta$

- Przesuwanie obiektów — koneksja afiniczna wyznaczona przez symbole Christoffela

- Przesuwanie obiektów — koneksja afiniczna wyznaczona przez symbole Christoffela

$$\vec{v} = v^\alpha \vec{e}_\alpha \implies d\vec{v} = dv^\alpha \vec{e}_\alpha + v^\alpha d\vec{e}_\alpha = (dv^\alpha + v^\mu \Gamma_{\nu\mu}^\alpha dx^\nu) \vec{e}_\alpha.$$

- Przesuwanie obiektów — koneksja afiniczna wyznaczona przez symbole Christoffela

$$\vec{v} = v^\alpha \vec{e}_\alpha \implies d\vec{v} = dv^\alpha \vec{e}_\alpha + v^\alpha d\vec{e}_\alpha = (dv^\alpha + v^\mu \Gamma_{\nu\mu}^\alpha dx^\nu) \vec{e}_\alpha.$$

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} (\partial_\gamma g_{\delta\beta} + \partial_\beta g_{\gamma\delta} - \partial_\delta g_{\beta\gamma}) \equiv \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} (g_{\delta\beta,\gamma} + g_{\gamma\delta,\beta} - g_{\beta\gamma,\delta})$$

- Przesuwanie obiektów — koneksja afiniczna wyznaczona przez symbole Christoffela

$$\vec{v} = v^\alpha \vec{e}_\alpha \implies d\vec{v} = dv^\alpha \vec{e}_\alpha + v^\alpha d\vec{e}_\alpha = (dv^\alpha + v^\mu \Gamma_{\nu\mu}^\alpha dx^\nu) \vec{e}_\alpha.$$

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} (\partial_\gamma g_{\delta\beta} + \partial_\beta g_{\gamma\delta} - \partial_\delta g_{\beta\gamma}) \equiv \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} (g_{\delta\beta,\gamma} + g_{\gamma\delta,\beta} - g_{\beta\gamma,\delta})$$

- cząstkowa pochodna kowariantna

$$v^\alpha{}_{;\beta} = v^\alpha{}_{,\beta} + \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha v^\gamma$$

$$\omega_{\alpha;\beta} = \omega_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \omega_\gamma$$

$$T_{\mu\nu;\alpha} = T_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^\beta T_{\beta\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^\beta T_{\mu\beta}$$

$$B^{\mu\nu}{}_{;\alpha} = B^{\mu\nu}{}_{,\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu B^{\beta\nu} + \Gamma_{\beta\alpha}^\nu B^{\mu\beta}$$

- Przesuwanie obiektów — koneksja afiniczna wyznaczona przez symbole Christoffela

$$\vec{v} = v^\alpha \vec{e}_\alpha \implies d\vec{v} = dv^\alpha \vec{e}_\alpha + v^\alpha d\vec{e}_\alpha = (dv^\alpha + v^\mu \Gamma_{\nu\mu}^\alpha dx^\nu) \vec{e}_\alpha.$$

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} (\partial_\gamma g_{\delta\beta} + \partial_\beta g_{\gamma\delta} - \partial_\delta g_{\beta\gamma}) \equiv \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} (g_{\delta\beta,\gamma} + g_{\gamma\delta,\beta} - g_{\beta\gamma,\delta})$$

- cząstkowa pochodna kowariantna

$$v^\alpha_{;\beta} = v^\alpha_{,\beta} + \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha v^\gamma$$

$$\omega_{\alpha;\beta} = \omega_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \omega_\gamma$$

$$T_{\mu\nu;\alpha} = T_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^\beta T_{\beta\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^\beta T_{\mu\beta}$$

$$B^{\mu\nu}_{;\alpha} = B^{\mu\nu}_{,\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu B^{\beta\nu} + \Gamma_{\beta\alpha}^\nu B^{\mu\beta}$$

- Geometria pseudoriemannowska — $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha$, $g_{\mu\nu;\alpha} = 0$

- Jaką postać ma najkrótsza krzywa łącząca dwa punkty w czasoprzestrzeni? (krzywa geodezyjna)

- Jaką postać ma najkrótsza krzywa łącząca dwa punkty w czasoprzestrzeni? (krzywa geodezyjna)
- τ — parametr geodezyjnej $x^\mu(\tau)$

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} = 0$$

- Jaką postać ma najkrótsza krzywa łącząca dwa punkty w czasoprzestrzeni? (krzywa geodezyjna)
- τ — parametr geodezyjnej $x^\mu(\tau)$

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} = 0$$

Równanie geodezyjnej

- Krzywizna — tensor (krzywizny) Riemanna

- Krzywizna — tensor (krzywizny) Riemanna

$$R^{\delta}_{\alpha\beta\gamma} := \Gamma^{\delta}_{\alpha\beta,\gamma} - \Gamma^{\delta}_{\alpha\gamma,\beta} + \Gamma^{\delta}_{\mu\gamma}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\delta}_{\mu\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma}$$

- Krzywizna — tensor (krzywizny) Riemanna

$$R^{\delta}_{\alpha\beta\gamma} := \Gamma^{\delta}_{\alpha\beta,\gamma} - \Gamma^{\delta}_{\alpha\gamma,\beta} + \Gamma^{\delta}_{\mu\gamma}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\delta}_{\mu\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma}$$

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma} = g_{\mu\delta}R^{\mu}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta,\delta\gamma} + g_{\delta\gamma,\alpha\beta} - g_{\alpha\gamma,\delta\beta} - g_{\delta\beta,\alpha\gamma})$$

- Krzywizna — tensor (krzywizny) Riemanna

$$R^{\delta}_{\alpha\beta\gamma} := \Gamma^{\delta}_{\alpha\beta,\gamma} - \Gamma^{\delta}_{\alpha\gamma,\beta} + \Gamma^{\delta}_{\mu\gamma}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\delta}_{\mu\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma}$$

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma} = g_{\mu\delta}R^{\mu}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta,\delta\gamma} + g_{\delta\gamma,\alpha\beta} - g_{\alpha\gamma,\delta\beta} - g_{\delta\beta,\alpha\gamma})$$

- Podstawowe twierdzenie sięgające jeszcze czasów Gaussa orzeka, że

Przestrzeń jest płaska wtedy i tylko wtedy gdy znikają wszystkie składowe tensora krzywizny $R_{\delta\alpha\beta\gamma}$ w każdym punkcie przestrzeni.

- Tensor krzywizny ma następujące algebraiczne własności symetrii

- Tensor krzywizny ma następujące algebraiczne własności symetrii

① symetria par: $R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}$,

② antysymetria indeksów:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\beta\alpha\nu\mu},$$

③ cykliczność:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0.$$

- Tensor krzywizny ma następujące algebraiczne własności symetrii

① symetria par: $R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}$,

② antysymetria indeksów:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\beta\alpha\nu\mu},$$

③ cykliczność:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0.$$

- ④ W ogólności, w przestrzeni N -wymiarowej jest $N^2(N^2 - 1)/12$ niezależnych składowych tensora krzywizny.

- Tensor krzywizny ma następujące algebraiczne własności symetrii

① symetria par: $R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}$,

② antysymetria indeksów:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\beta\alpha\nu\mu},$$

③ cykliczność:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0.$$

④ W ogólności, w przestrzeni N -wymiarowej jest $N^2(N^2 - 1)/12$ niezależnych składowych tensora krzywizny.

⑤ Tożsamości Bianchi są dodatkowymi związkami zawierającymi pochodne.

- Tensor krzywizny ma następujące algebraiczne własności symetrii

① symetria par: $R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}$,

② antysymetria indeksów:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\beta\alpha\nu\mu},$$

③ cykliczność:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0.$$

④ W ogólności, w przestrzeni N -wymiarowej jest $N^2(N^2 - 1)/12$ niezależnych składowych tensora krzywizny.

⑤ Tożsamości Bianchi są dodatkowymi związkami zawierającymi pochodne.

- Tensor Ricciego

$$R_{\alpha\beta} := g^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\nu\beta} = R^{\nu}{}_{\alpha\nu\beta}$$

- Tensor krzywizny ma następujące algebraiczne własności symetrii

① symetria par: $R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}$,

② antysymetria indeksów:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\beta\alpha\nu\mu},$$

③ cykliczność:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0.$$

④ W ogólności, w przestrzeni N -wymiarowej jest $N^2(N^2 - 1)/12$ niezależnych składowych tensora krzywizny.

⑤ Tożsamości Bianchi są dodatkowymi związkami zawierającymi pochodne.

- Tensor Ricciego

$$R_{\alpha\beta} := g^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\nu\beta} = R^{\nu}{}_{\alpha\nu\beta}$$

- skalar krzywizny $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$

- Tensor energii pędu informuje jak odpowiada układ na wariację tensora metrycznego

$$g_{\alpha\beta} \longrightarrow g_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta}$$

Tensor energii-pędu

- Tensor energii pędu informuje jak odpowiada układ na wariację tensora metrycznego

$$g_{\alpha\beta} \longrightarrow g_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta}$$

- Jego konkretna postać zależy od opisywanej postaci materii

$$T^{\alpha\beta} = \left[\begin{array}{c|c} \text{gęstość energii} & 1/c \times \text{strumień energii przez powierzchnię prostopadłą do } e_k \\ \hline c \times \text{gęstość wektora pędu} & \text{tensor napięć = strumienie składowych wektora pędu} \end{array} \right]$$

Tensor energii-pędu

- Tensor energii pędu informuje jak odpowiada układ na wariację tensora metrycznego

$$g_{\alpha\beta} \longrightarrow g_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta}$$

- Jego konkretna postać zależy od opisywanej postaci materii

$$T^{\alpha\beta} = \left[\begin{array}{c|c} \text{gęstość energii} & 1/c \times \text{strumień energii przez powierzchnię prostopadłą do } e_k \\ \hline c \times \text{gęstość wektora pędu} & \text{tensor napięć = strumienie składowych wektora pędu} \end{array} \right]$$

$$T^{\alpha 0} = c \frac{dp^\alpha}{dV}, \quad T^{\alpha k} = \frac{dp^\alpha}{dt dS_k}$$

- dla pyłu: cząstki poruszające przez dany obszar bez zderzeń z niewielkimi prędkościami względnymi (równoległe linie świata),
 $u^\alpha = [c, \vec{v}]$, $p^\alpha = [E/c, \vec{p}]$

$$T^{\alpha\beta} = \rho_0 u^\alpha u^\beta,$$

ρ_0 — gęstość (masy) pyłu,

- dla pyłu: cząstki poruszające przez dany obszar bez zderzeń z niewielkimi prędkościami względnymi (równoległe linie świata),
 $u^\alpha = [c, \vec{v}]$, $p^\alpha = [E/c, \vec{p}]$

$$T^{\alpha\beta} = \rho_0 u^\alpha u^\beta,$$

ρ_0 — gęstość (masy) pyłu,

- relatywistyczny gaz doskonały: cząstki chaotycznie poruszające się w danym obszarze

$$T^{\alpha\beta} = \text{diag}[\epsilon, \epsilon/3, \epsilon/3, \epsilon/3]$$

ϵ — gęstość energii

- dla pyłu: cząstki poruszające przez dany obszar bez zderzeń z niewielkimi prędkościami względnymi (równoległe linie świata),
 $u^\alpha = [c, \vec{v}]$, $p^\alpha = [E/c, \vec{p}]$

$$T^{\alpha\beta} = \rho_0 u^\alpha u^\beta,$$

ρ_0 — gęstość (masy) pyłu,

- relatywistyczny gaz doskonały: cząstki chaotycznie poruszające się w danym obszarze

$$T^{\alpha\beta} = \text{diag}[\epsilon, \epsilon/3, \epsilon/3, \epsilon/3]$$

ϵ — gęstość energii

- płyn — nierelatywistyczna ciecz (może być ściśliwa)

$$T^{\alpha\beta} = (p + \rho)u^\alpha u^\beta - pg^{\alpha\beta}$$

p — ciśnienie, ρ — gęstość energii (wszystkich postaci)

- dla pyłu: cząstki poruszające przez dany obszar bez zderzeń z niewielkimi prędkościami względnymi (równoległe linie świata),
 $u^\alpha = [c, \vec{v}]$, $p^\alpha = [E/c, \vec{p}]$

$$T^{\alpha\beta} = \rho_0 u^\alpha u^\beta,$$

ρ_0 — gęstość (masy) pyłu,

- relatywistyczny gaz doskonały: cząstki chaotycznie poruszające się w danym obszarze

$$T^{\alpha\beta} = \text{diag}[\epsilon, \epsilon/3, \epsilon/3, \epsilon/3]$$

ϵ — gęstość energii

- płyn — nierelatywistyczna ciecz (może być ściśliwa)

$$T^{\alpha\beta} = (p + \rho)u^\alpha u^\beta - pg^{\alpha\beta}$$

p — ciśnienie, ρ — gęstość energii (wszystkich postaci)

- dla pola elektromagnetycznego i innych pól

Własności tensora energii-pędu

- Symetria $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$

- Symetria $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$
- Jeśli teoria (Lagrangian) jest niezmiennicza z uwagi na (infinitesimalne) przesunięcia w czasoprzestrzeni

$$x^\mu \longrightarrow x^\mu + \xi^\mu$$

to znika czterodivergencja tensora energii pędu

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$$

- Symetria $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$
- Jeśli teoria (Lagrangian) jest niezmiennicza z uwagi na (infinitesimalne) przesunięcia w czasoprzestrzeni

$$x^\mu \longrightarrow x^\mu + \xi^\mu$$

to znika czterodywergencja tensora energii pędu

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$$

- Są to prawa zachowania, które są przejawem twierdzenia Noether dla pola grawitacyjnego.

Przykład: Niech $T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta$

Przykład: Niech $T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta$

$$T^{\alpha 0}_{;\alpha} = c(\rho_{,\alpha} u^\alpha + \rho u^\alpha_{;\alpha}) \implies c\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v})\right)$$

Przykład: Niech $T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta$

$$T^{\alpha 0}_{;\alpha} = c(\rho_{,\alpha} u^\alpha + \rho u^\alpha_{;\alpha}) \implies c\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v})\right)$$

Równanie ciągłości

Przykład: Niech $T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta$

$$T^{\alpha 0}_{;\alpha} = c(\rho_{,\alpha} u^\alpha + \rho u^\alpha_{;\alpha}) \implies c\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v})\right)$$

Równanie ciągłości

$$T^{\alpha\beta}_{;\alpha} = (\rho u^\alpha u^\beta)_{;\alpha} = \rho u^\alpha u^\beta_{;\alpha} \implies \rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}\right)$$

Przykład: Niech $T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta$

$$T^{\alpha 0}_{;\alpha} = c(\rho_{,\alpha} u^\alpha + \rho u^\alpha_{;\alpha}) \implies c\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v})\right)$$

Równanie ciągłości

$$T^{\alpha\beta}_{;\alpha} = (\rho u^\alpha u^\beta)_{;\alpha} = \rho u^\alpha u^\beta_{;\alpha} \implies \rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}\right)$$

Równanie Eulera

Geometria czasoprzestrzeni \sim rozkład i ruch materii oraz energii

Geometria czasoprzestrzeni \sim rozkład i ruch materii oraz energii

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

Geometria czasoprzestrzeni \sim rozkład i ruch materii oraz energii

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

lub

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right), \quad T = g_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}.$$

Geometria czasoprzestrzeni \sim rozkład i ruch materii oraz energii

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

lub

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right), \quad T = g_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}.$$

- Granica newtonowska pozwoli wyznaczyć

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

Geometria czasoprzestrzeni \sim rozkład i ruch materii oraz energii

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

lub

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right), \quad T = g_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}.$$

- Granica newtonowska pozwoli wyznaczyć

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

- Ogólniej dopuszczalna jest postać

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

gdzie Λ — stała kosmologiczna (tradycyjnie = 0), przejaw ciemnej energii (?)

- Założenia
 - ① Ruch obiektów jest powolny, tzn. $|\vec{v}| \ll c$

- Założenia

- 1 Ruch obiektów jest powolny, tzn. $|\vec{v}| \ll c$
- 2 Pole grawitacyjne jest słabe, tzn.

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad |h_{\alpha\beta}| \ll 1, \quad |h_{ij}| \ll |h_{00}|$$

$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta},$$

- Założenia

- ① Ruch obiektów jest powolny, tzn. $|\vec{v}| \ll c$
- ② Pole grawitacyjne jest słabe, tzn.

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad |h_{\alpha\beta}| \ll 1, \quad |h_{ij}| \ll |h_{00}|$$

$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta},$$

- ③ Podnoszenie i obniżanie indeksów odbywa się przy użyciu $\eta_{\alpha\beta}$ oraz $\eta^{\alpha\beta}$.

- Założenia

- 1 Ruch obiektów jest powolny, tzn. $|\vec{v}| \ll c$
- 2 Pole grawitacyjne jest słabe, tzn.

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad |h_{\alpha\beta}| \ll 1, \quad |h_{ij}| \ll |h_{00}|$$
$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta},$$

- 3 Podnoszenie i obniżanie indeksów odbywa się przy użyciu $\eta_{\alpha\beta}$ oraz $\eta^{\alpha\beta}$.
- 4 Pola są wolnozmiennie w czasie, tzn. można zaniedbać ich pochodne czasowe w stosunku do pochodnych przestrzennych.

- Założenia

- 1 Ruch obiektów jest powolny, tzn. $|\vec{v}| \ll c$
- 2 Pole grawitacyjne jest słabe, tzn.

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad |h_{\alpha\beta}| \ll 1, \quad |h_{ij}| \ll |h_{00}|$$
$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta},$$

- 3 Podnoszenie i obniżanie indeksów odbywa się przy użyciu $\eta_{\alpha\beta}$ oraz $\eta^{\alpha\beta}$.
 - 4 Pola są wolnozmiennie w czasie, tzn. można zaniedbać ich pochodne czasowe w stosunku do pochodnych przestrzennych.
- Z założenia (4) zrezygnujemy przy granicy newtonowskiej dla fal grawitacyjnych, gdyż pociąga ono za sobą natychmiastowe oddziaływanie pola grawitacyjnego.

- Jaki jest sens fizyczny wielkości $h_{\alpha\beta}$?

Granica newtonowska równania linii geodezyjnej

- Jaki jest sens fizyczny wielkości $h_{\alpha\beta}$?
- **Przykład:** Równanie geodezyjnej w granicy newtonowskiej

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} + \dots = 0$$

Granica newtonowska równania linii geodezyjnej

- Jaki jest sens fizyczny wielkości $h_{\alpha\beta}$?
- **Przykład:** Równanie geodezyjnej w granicy newtonowskiej

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} + \dots = 0$$

$$\Gamma_{00}^\mu = \frac{1}{2} g^{\nu\mu} (g_{0\nu,0} + g_{0,\nu,0} - g_{00,\nu}) \simeq -\frac{1}{2} g^{\nu\mu} g_{00,\nu}$$

Granica newtonowska równania linii geodezyjnej

- Jaki jest sens fizyczny wielkości $h_{\alpha\beta}$?
- **Przykład:** Równanie geodezyjnej w granicy newtonowskiej

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} + \dots = 0$$

$$\Gamma_{00}^\mu = \frac{1}{2} g^{\nu\mu} (g_{0\nu,0} + g_{0,\nu,0} - g_{00,\nu}) \simeq -\frac{1}{2} g^{\nu\mu} g_{00,\nu}$$

- składowa 0 równania geodezyjnej

$$c \frac{d^2 t}{d\tau^2} - \frac{1}{2} (\eta^{k0} + h^{k0}) \frac{\partial (\eta_{00} + h_{00})}{\partial x^k} c^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 + \dots = 0 \implies \frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0$$

Granica newtonowska równania linii geodezyjnej

- Jaki jest sens fizyczny wielkości $h_{\alpha\beta}$?
- **Przykład:** Równanie geodezyjnej w granicy newtonowskiej

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} + \dots = 0$$

$$\Gamma_{00}^\mu = \frac{1}{2} g^{\nu\mu} (g_{0\nu,0} + g_{0,\nu,0} - g_{00,\nu}) \simeq -\frac{1}{2} g^{\nu\mu} g_{00,\nu}$$

- składowa 0 równania geodezyjnej

$$c \frac{d^2 t}{d\tau^2} - \frac{1}{2} (\eta^{k0} + h^{k0}) \frac{\partial (\eta_{00} + h_{00})}{\partial x^k} c^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 + \dots = 0 \implies \frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0$$

- składowa j równania geodezyjnej

$$\frac{d^2 x^j}{d\tau^2} - \frac{1}{2} (\eta^{kj} + h^{kj}) \frac{\partial (\eta_{00} + h_{00})}{\partial x^k} c^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 + \dots = 0$$

- dla $\eta^{\alpha\beta} = [1, -1, -1, -1]$ mamy

$$\eta^{jk} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^k} = -\nabla h_{00}, \quad j = 1, 2, 3.$$

- dla $\eta^{\alpha\beta} = [1, -1, -1, -1]$ mamy

$$\eta^{jk} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^k} = -\nabla h_{00}, \quad j = 1, 2, 3.$$

- ostatecznie

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{c^2}{2} \nabla h_{00} + \dots = 0$$

- dla $\eta^{\alpha\beta} = [1, -1, -1, -1]$ mamy

$$\eta^{jk} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^k} = -\nabla h_{00}, \quad j = 1, 2, 3.$$

- ostatecznie

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{c^2}{2} \nabla h_{00} + \dots = 0$$

$$h_{00} = \frac{2V}{c^2} + \text{const}$$

gdzie V jest newtonowskim potencjałem grawitacyjnym oraz $\text{const} = 0$

- dla $\eta^{\alpha\beta} = [1, -1, -1, -1]$ mamy

$$\eta^{jk} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^k} = -\nabla h_{00}, \quad j = 1, 2, 3.$$

- ostatecznie

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{c^2}{2} \nabla h_{00} + \dots = 0$$

$$h_{00} = \frac{2V}{c^2} + \text{const}$$

gdzie V jest newtonowskim potencjałem grawitacyjnym oraz $\text{const} = 0$

$$g_{00} = 1 + \frac{2V}{c^2}$$

Granica newtonowska równania pola

- Mamy dla tensora krzywizny i tensora Ricciego

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta,\delta\gamma} + g_{\delta\gamma,\alpha\beta} - g_{\alpha\gamma,\delta\beta} - g_{\delta\beta,\alpha\gamma})$$

- Mamy dla tensora krzywizny i tensora Ricciego

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta,\delta\gamma} + g_{\delta\gamma,\alpha\beta} - g_{\alpha\gamma,\delta\beta} - g_{\delta\beta,\alpha\gamma})$$

$$R_{\alpha\gamma} \simeq \frac{1}{2}(h_{\alpha,\delta\gamma}^{\delta} + h_{\gamma,\alpha\beta}^{\beta} - \square h_{\alpha\gamma} - h_{,\alpha\gamma})$$

- Mamy dla tensora krzywizny i tensora Ricciego

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta,\delta\gamma} + g_{\delta\gamma,\alpha\beta} - g_{\alpha\gamma,\delta\beta} - g_{\delta\beta,\alpha\gamma})$$

$$R_{\alpha\gamma} \simeq \frac{1}{2}(h_{\alpha,\delta\gamma}^{\delta} + h_{\gamma,\alpha\beta}^{\beta} - \square h_{\alpha\gamma} - h_{,\alpha\gamma})$$

$$R_{00} \simeq \frac{1}{2}(h_{0,0\gamma}^{\delta} + h_{0,0\beta}^{\beta} - \square h_{00} - h_{,00}) \simeq \frac{1}{2}\nabla^2 h_{00}$$

- Mamy dla tensora krzywizny i tensora Ricciego

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta,\delta\gamma} + g_{\delta\gamma,\alpha\beta} - g_{\alpha\gamma,\delta\beta} - g_{\delta\beta,\alpha\gamma})$$

$$R_{\alpha\gamma} \simeq \frac{1}{2}\left(h_{\alpha,\delta\gamma}^{\delta} + h_{\gamma,\alpha\beta}^{\beta} - \square h_{\alpha\gamma} - h_{,\alpha\gamma}\right)$$

$$R_{00} \simeq \frac{1}{2}\left(h_{0,0\gamma}^{\delta} + h_{0,0\beta}^{\beta} - \square h_{00} - h_{,00}\right) \simeq \frac{1}{2}\nabla^2 h_{00}$$

- Mamy dla tensora energii-pędu $T_{\mu\nu} = \rho u_{\mu}u_{\nu}$

$$T = T_{\mu}^{\mu} = \rho u^{\mu}u_{\mu} = \rho c^2 \left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right] \simeq \rho c^2$$

$$\kappa \left(T_{00} - \frac{1}{2}\eta_{00}T\right) = \frac{1}{2}\kappa\rho c^2$$

- Mamy dla tensora krzywizny i tensora Ricciego

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta,\delta\gamma} + g_{\delta\gamma,\alpha\beta} - g_{\alpha\gamma,\delta\beta} - g_{\delta\beta,\alpha\gamma})$$

$$R_{\alpha\gamma} \simeq \frac{1}{2}(h_{\alpha,\delta\gamma}^{\delta} + h_{\gamma,\alpha\beta}^{\beta} - \square h_{\alpha\gamma} - h_{,\alpha\gamma})$$

$$R_{00} \simeq \frac{1}{2}(h_{0,0\gamma}^{\delta} + h_{0,0\beta}^{\beta} - \square h_{00} - h_{,00}) \simeq \frac{1}{2}\nabla^2 h_{00}$$

- Mamy dla tensora energii-pędu $T_{\mu\nu} = \rho u_{\mu} u_{\nu}$

$$T = T_{\mu}^{\mu} = \rho u^{\mu} u_{\mu} = \rho c^2 \left[1 - \frac{v^2}{c^2} \right] \simeq \rho c^2$$

$$\kappa \left(T_{00} - \frac{1}{2} \eta_{00} T \right) = \frac{1}{2} \kappa \rho c^2$$

- Ostatecznie po porównaniu z równaniem Poissona $\nabla^2 V = 4\pi G\rho$

$$\nabla^2 h_{00} = \kappa \rho c^2 \quad \implies \quad \kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

Granica newtonowska równania pola

- Rezygnujemy z założenia o zaniedbaniu pochodnych czasowych

- Rezygnujemy z założenia o zaniedbaniu pochodnych czasowych

$$\frac{1}{2} \left(h_{\alpha, \mu \beta}^{\mu} + h_{\beta, \alpha \mu}^{\mu} - \square h_{\alpha \beta} - h_{, \alpha \beta} \right) = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\alpha \beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha \beta} T \right).$$

- Rezygnujemy z założenia o zaniedbaniu pochodnych czasowych

$$\frac{1}{2} \left(h^{\mu}_{\alpha, \mu\beta} + h^{\mu}_{\beta, \alpha\mu} - \square h_{\alpha\beta} - h_{, \alpha\beta} \right) = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} T \right).$$

- Wprowadźmy

$$\bar{h}^{\alpha}_{\beta} := h^{\alpha}_{\beta} - \frac{1}{2} h \delta^{\alpha}_{\beta}, \quad h = h^{\mu}_{\mu}$$

Granica newtonowska równania pola

- Rezygnujemy z założenia o zaniedbaniu pochodnych czasowych

$$\frac{1}{2} \left(h_{\alpha, \mu \beta}^{\mu} + h_{\beta, \alpha \mu}^{\mu} - \square h_{\alpha \beta} - h_{, \alpha \beta} \right) = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\alpha \beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha \beta} T \right).$$

- Wprowadźmy

$$\bar{h}_{\beta}^{\alpha} := h_{\beta}^{\alpha} - \frac{1}{2} h \delta_{\beta}^{\alpha}, \quad h = h_{\mu}^{\mu}$$

- wybierzmy cechowanie Lorentza, w którym $\bar{h}_{\beta, \alpha}^{\alpha} = 0$

- Rezygnujemy z założenia o zaniedbaniu pochodnych czasowych

$$\frac{1}{2} \left(h^{\mu}_{\alpha, \mu\beta} + h^{\mu}_{\beta, \alpha\mu} - \square h_{\alpha\beta} - h_{, \alpha\beta} \right) = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} T \right).$$

- Wprowadźmy

$$\bar{h}^{\alpha}_{\beta} := h^{\alpha}_{\beta} - \frac{1}{2} h \delta^{\alpha}_{\beta}, \quad h = h^{\mu}_{\mu}$$

- wybierzmy cechowanie Lorentza, w którym $\bar{h}^{\alpha}_{\beta, \alpha} = 0$
- Wówczas

$$R_{\alpha\beta} \simeq -\frac{1}{2} \square h_{\alpha\beta}$$

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} R = -\frac{1}{2} \square \bar{h}_{\alpha\beta}$$

- Rezygnujemy z założenia o zaniedbaniu pochodnych czasowych

$$\frac{1}{2} \left(h_{\alpha, \mu \beta}^{\mu} + h_{\beta, \alpha \mu}^{\mu} - \square h_{\alpha \beta} - h_{, \alpha \beta} \right) = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\alpha \beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha \beta} T \right).$$

- Wprowadźmy

$$\bar{h}_{\beta}^{\alpha} := h_{\beta}^{\alpha} - \frac{1}{2} h \delta_{\beta}^{\alpha}, \quad h = h_{\mu}^{\mu}$$

- wybierzmy cechowanie Lorentza, w którym $\bar{h}_{\beta, \alpha}^{\alpha} = 0$
- Wówczas

$$R_{\alpha \beta} \simeq -\frac{1}{2} \square h_{\alpha \beta}$$
$$R_{\alpha \beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha \beta} R = -\frac{1}{2} \square \bar{h}_{\alpha \beta}$$

- Ostatecznie otrzymujemy równanie falowe postaci

$$\square \bar{h}_{\alpha \beta} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\alpha \beta}$$

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = 0$$

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = 0$$

- 10 równań z uwagi na symetryczność tensorów

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = 0$$

- 10 równań z uwagi na symetryczność tensorów
- 4 równania cechowania Lorentza $\bar{h}^{\alpha\beta}_{,\alpha} = 0$

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = 0$$

- 10 równań z uwagi na symetryczność tensorów
- 4 równania cechowania Lorentza $\bar{h}^{\alpha\beta}_{,\alpha} = 0$
- warunku cechowania nadal nie zmienia transformacja $x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu$, o ile $\square \xi^\mu = 0$ (4 warunki)

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = 0$$

- 10 równań z uwagi na symetryczność tensorów
- 4 równania cechowania Lorentza $\bar{h}^{\alpha\beta}_{,\alpha} = 0$
- warunku cechowania nadal nie zmienia transformacja $x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu$, o ile $\square \xi^\mu = 0$ (4 warunki)
- cechowanie TT (transverse-traceless gauge)

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = 0$$

- 10 równań z uwagi na symetryczność tensorów
- 4 równania cechowania Lorentza $\bar{h}^{\alpha\beta}_{,\alpha} = 0$
- warunku cechowania nadal nie zmienia transformacja $x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu$, o ile $\square \xi^\mu = 0$ (4 warunki)
- cechowanie TT (transverse-traceless gauge)
 - można wybrać jedno ξ^μ tak, aby $\bar{h} = 0$, wówczas $\bar{h}^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta}$

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = 0$$

- 10 równań z uwagi na symetryczność tensorów
- 4 równania cechowania Lorentza $\bar{h}^{\alpha\beta}_{,\alpha} = 0$
- warunku cechowania nadal nie zmienia transformacja $x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu$, o ile $\square \xi^\mu = 0$ (4 warunki)
- cechowanie TT (transverse-traceless gauge)
 - 1 można wybrać jedno ξ^μ tak, aby $\bar{h} = 0$, wówczas $\bar{h}^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta}$
 - 2 można wybrać pozostałe ξ^μ tak, aby $h^{k0} = 0$, wówczas

$$0 = \bar{h}^{\alpha\beta}_{,\alpha} = h^{\alpha\beta}_{,\alpha} = h^{00}_{,0} + h^{k0}_{,k} = h^{00}_{,0}$$

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = 0$$

- 10 równań z uwagi na symetryczność tensorów
- 4 równania cechowania Lorentza $\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\alpha} = 0$
- warunku cechowania nadal nie zmienia transformacja $x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu$, o ile $\square \xi^\mu = 0$ (4 warunki)
- cechowanie TT (transverse-traceless gauge)
 - 1 można wybrać jedno ξ^μ tak, aby $\bar{h} = 0$, wówczas $\bar{h}^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta}$
 - 2 można wybrać pozostałe ξ^μ tak, aby $h^{k0} = 0$, wówczas

$$0 = \bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\alpha} = h^{\alpha\beta}{}_{,\alpha} = h^{00}{}_{,0} + h^{k0}{}_{,k} = h^{00}{}_{,0}$$

- 3 można wybrać $h^{00} = 0$ i wówczas

$$\bar{h}^{\alpha 0} = 0, \quad \bar{h} = 0, \quad \bar{h}^{jk}{}_{,j} = 0.$$

Rozwiązanie w postaci fali płaskiej

- Rozwiązaniem

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = 0$$

jest

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} \cos(k_\sigma x^\sigma),$$

gdzie $k_\sigma = [\omega/c, -\vec{k}]$, $k_\sigma k^\sigma = 0$, $A_{\alpha\beta}$ — tensor polaryzacji.

- Rozwiązaniem

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = 0$$

jest

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} \cos(k_\sigma x^\sigma),$$

gdzie $k_\sigma = [\omega/c, -\vec{k}]$, $k_\sigma k^\sigma = 0$, $A_{\alpha\beta}$ — tensor polaryzacji.

- fala jest poprzeczna: z $\bar{h}^{\alpha\beta}_{,\alpha} = 0$ wynika

$$A^{\alpha\beta} k_\alpha = 0.$$

- Rozwiązaniem

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = 0$$

jest

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} \cos(k_\sigma x^\sigma),$$

gdzie $k_\sigma = [\omega/c, -\vec{k}]$, $k_\sigma k^\sigma = 0$, $A_{\alpha\beta}$ — tensor polaryzacji.

- fala jest poprzeczna: z $\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\alpha} = 0$ wynika

$$A^{\alpha\beta} k_\alpha = 0.$$

- odpowiedni wybór stałych C_α w $\xi_\alpha = -C_\alpha \sin(k_\sigma x^\sigma)$ pozwala wybrać cechowanie TT

$$\bar{h}_{\text{TT}}^{\alpha 0} = 0, \quad \bar{h}^{\text{TT}} = 0, \quad (\bar{h}^{\text{TT}})^{jk}{}_{,j} = 0.$$

- Są dwie niezależne polaryzacje fali grawitacyjnej w próżni

- Są dwie niezależne polaryzacje fali grawitacyjnej w próżni
- Dla fali rozchodzącej się wzdłuż osi z odpowiadają one wyborom macierzy E_{ij}^+ oraz E_{ij}^\times w postaci

Polaryzacje plus i cross

- Są dwie niezależne polaryzacje fali grawitacyjnej w próżni
- Dla fali rozchodzącej się wzdłuż osi z odpowiadają one wyborom macierzy E_{ij}^+ oraz E_{ij}^\times w postaci

$$E_{ij}^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{ij},$$

$$E_{ij}^\times = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{ij}$$

- Są dwie niezależne polaryzacje fali grawitacyjnej w próżni
- Dla fali rozchodzącej się wzdłuż osi z odpowiadają one wyborom macierzy E_{ij}^+ oraz E_{ij}^\times w postaci

$$E_{ij}^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{ij},$$

$$E_{ij}^\times = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{ij}$$

- Wówczas

$$\bar{h}_{ij}^{\text{TT}}(ct - z) = E_{ij}^+ h_+(ct - z) + E_{ij}^\times h_\times(ct - z)$$

Fala o dowolnym kierunku propagacji

- Niech kierunek propagacji fali wyznacza wektor $\vec{n} = \vec{k}/|\vec{k}|$, wówczas

$$h_{ij}^{\text{TT}}(\vec{n}) = \Lambda_{ij,kl}(\vec{n})h_{kl}$$

gdzie Λ jest projektorem na kierunek \vec{n} , tzn.

$$\Lambda_{ij,kl} = P_{ik}P_{jl} - \frac{1}{2}P_{ij}P_{kl}, \quad P_{ij}(\vec{n}) = \delta_{ij} - n_in_j$$

Dwie niezależne składowe tensora krzywizny

- w granicy newtonowskiej

$$R_{0i0j} \simeq \frac{1}{2}(h_{i0,0j} + h_{0j,i0} - h_{ij,00} - h_{00,ij})$$

- w granicy newtonowskiej

$$R_{0i0j} \simeq \frac{1}{2}(h_{i0,0j} + h_{0j,i0} - h_{ij,00} - h_{00,ij})$$

- w cechowaniu TT

$$R_{0i0j} \simeq -\frac{1}{2}\ddot{h}_{ij,00}^{\text{TT}}$$

- w granicy newtonowskiej

$$R_{0i0j} \simeq \frac{1}{2}(h_{i0,0j} + h_{0j,i0} - h_{ij,00} - h_{00,ij})$$

- w cechowaniu TT

$$R_{0i0j} \simeq -\frac{1}{2}\ddot{h}_{ij}^{\text{TT}}$$

- tylko dwie składowe tensora krzywizny są niezależne

$$R_{0101} = -R_{0202}, \quad R_{0201} = R_{0102}$$

- równanie Einsteina w próżni

$$G_{\mu\nu}[g_{\mu\nu}] := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0$$

- równanie Einsteina w próżni

$$G_{\mu\nu}[g_{\mu\nu}] := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0$$

- rozwinięcie względem małego parametru ϵ

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}^{(1)} + \epsilon^2 h_{\mu\nu}^{(2)} + \dots$$

- równanie Einsteina w próżni

$$G_{\mu\nu}[g_{\mu\nu}] := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0$$

- rozwinięcie względem małego parametru ϵ

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}^{(1)} + \epsilon^2 h_{\mu\nu}^{(2)} + \dots$$

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^{(0)} + \epsilon G_{\mu\nu}^{(1)} + \epsilon^2 G_{\mu\nu}^{(2)} + \dots$$

- równanie Einsteina w próżni

$$G_{\mu\nu}[g_{\mu\nu}] := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0$$

- rozwinięcie względem małego parametru ϵ

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}^{(1)} + \epsilon^2 h_{\mu\nu}^{(2)} + \dots$$

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^{(0)} + \epsilon G_{\mu\nu}^{(1)} + \epsilon^2 G_{\mu\nu}^{(2)} + \dots$$

$$\begin{cases} G_{\mu\nu}^{(1)}[h_{\mu\nu}^{(1)}] = 0, \\ G_{\mu\nu}^{(1)}[h_{\mu\nu}^{(2)}] = \underbrace{-G_{\mu\nu}^{(2)}[h_{\mu\nu}^{(1)}]}_{\text{źródło}} \end{cases}$$

Tensor energii-pędu fali grawitacyjnej

Tensor energii-pędu fali grawitacyjnej

- Uśrednienie po obszarze dostatecznie dużym, aby zawierał wiele długości fali grawitacyjnej

$$T_{\mu\nu}^{\text{GW}} = -\frac{c^4}{8\pi G} \left\langle G_{\mu\nu}^{(2)}[h_{\mu\nu}^{(1)}] \right\rangle$$

Tensor energii-pędu fali grawitacyjnej

- Uśrednienie po obszarze dostatecznie dużym, aby zawierał wiele długości fali grawitacyjnej

$$T_{\mu\nu}^{\text{GW}} = -\frac{c^4}{8\pi G} \langle G_{\mu\nu}^{(2)}[h_{\mu\nu}^{(1)}] \rangle$$

- Isaacson w 1968 roku pokazał, że z dokładnością do ϵ^2

$$T_{\mu\nu}^{\text{GW}} = \frac{c^4}{32\pi G} \langle h_{\text{TT},\mu}^{ij} h_{ij,\nu}^{\text{TT}} \rangle$$

Tensor energii-pędu fali grawitacyjnej

- Uśrednienie po obszarze dostatecznie dużym, aby zawierał wiele długości fali grawitacyjnej

$$T_{\mu\nu}^{\text{GW}} = -\frac{c^4}{8\pi G} \langle G_{\mu\nu}^{(2)}[h_{\mu\nu}^{(1)}] \rangle$$

- Isaacson w 1968 roku pokazał, że z dokładnością do ϵ^2

$$T_{\mu\nu}^{\text{GW}} = \frac{c^4}{32\pi G} \langle h_{\text{TT},\mu}^{ij} h_{ij,\nu}^{\text{TT}} \rangle$$

- Przypadek fali płaskiej

$$h_{ij}^{\text{TT}}(ct - z) = E_{ij}^+ h_+(ct - z) + E_{ij}^\times h_\times(ct - z)$$

$$T_{00}^{\text{GW}} = \frac{c^4}{16\pi G} \langle (\partial_0 h_+)^2 + (\partial_0 h_\times)^2 \rangle$$

Tensor energii-pędu fali grawitacyjnej

- Uśrednienie po obszarze dostatecznie dużym, aby zawierał wiele długości fali grawitacyjnej

$$T_{\mu\nu}^{\text{GW}} = -\frac{c^4}{8\pi G} \langle G_{\mu\nu}^{(2)} [h_{\mu\nu}^{(1)}] \rangle$$

- Isaacson w 1968 roku pokazał, że z dokładnością do ϵ^2

$$T_{\mu\nu}^{\text{GW}} = \frac{c^4}{32\pi G} \langle h_{\text{TT},\mu}^{ij} h_{ij,\nu}^{\text{TT}} \rangle$$

- Przypadek fali płaskiej

$$h_{ij}^{\text{TT}}(ct - z) = E_{ij}^+ h_+(ct - z) + E_{ij}^\times h_\times(ct - z)$$

$$T_{00}^{\text{GW}} = \frac{c^4}{16\pi G} \langle (\partial_0 h_+)^2 + (\partial_0 h_\times)^2 \rangle$$

- Przypadek fali monochromatycznej o częstotliwości ω

$$T_{00}^{\text{GW}} = \frac{c^4 \omega^2}{32\pi G} (A_+^2 + A_\times^2)$$

Skutki przejścia fali grawitacyjnej

- Przyspieszenie pływowe

$$\Delta \vec{a} = \vec{a}(\vec{r} + \vec{\xi}) - \vec{a}(\vec{r}) = (\vec{\xi} \cdot \nabla) \vec{a}(\vec{r}) = -\xi^k V_{,km} \vec{e}^m$$

Skutki przejścia fali grawitacyjnej

- Przyspieszenie pływowe

$$\Delta \vec{a} = \vec{a}(\vec{r} + \vec{\xi}) - \vec{a}(\vec{r}) = (\vec{\xi} \cdot \nabla) \vec{a}(\vec{r}) = -\xi^k V_{,km} \vec{e}^m$$

- Tensor pływów $\zeta_{km} = V_{,km}$

$$\Delta a_m = -\xi^k \zeta_{km}(\vec{r})$$

Skutki przejścia fali grawitacyjnej

- Przyspieszenie pływowe

$$\Delta \vec{a} = \vec{a}(\vec{r} + \vec{\xi}) - \vec{a}(\vec{r}) = (\vec{\xi} \cdot \nabla) \vec{a}(\vec{r}) = -\xi^k V_{,km} \vec{e}^m$$

- Tensor pływów $\zeta_{km} = V_{,km}$

$$\Delta a_m = -\xi^k \zeta_{km}(\vec{r})$$

- **Przykład:** Dla potencjału newtonowskiego,

$$\zeta_{ij}(\vec{r}) = -\frac{GM_z}{r^5} (3x_i x_j - \delta_{ij} r^2)$$

oraz $\vec{\xi} = [0, 0, \Delta z]$, $\vec{r} = [0, 0, z]$

$$\Delta a_1 = -\Delta z \zeta_{31}, \quad \Delta a_2 = -\Delta z \zeta_{32}, \quad \Delta a_3 = -\Delta z \zeta_{33}$$

przy czym

$$\zeta(0, 0, z) = \frac{GM_z}{z^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Skutki przejścia fali grawitacyjnej

- Przyspieszenie pływowe w OTW

$$\zeta_{ij} = V_{,ij} \simeq \frac{c^2}{2} h_{00,ij} \simeq -c^2 R_{0i0j}$$

- Przyspieszenie pływowe w OTW

$$\zeta_{ij} = V_{,ij} \simeq \frac{c^2}{2} h_{00,ij} \simeq -c^2 R_{0i0j}$$

$$\Delta a_k := \xi^i \zeta_{ik} = -c^2 \xi^i R_{0i0k}$$

- Przyspieszenie pływowe w OTW

$$\zeta_{ij} = V_{,ij} \simeq \frac{c^2}{2} h_{00,ij} \simeq -c^2 R_{0i0j}$$

$$\Delta a_k := \xi^i \zeta_{ik} = -c^2 \xi^i R_{0i0k}$$

- w przypadku płaskiej fali grawitacyjnej rozchodzącej się w kierunku z , $R_{0i0k} = -\frac{1}{2} \bar{h}_{ik,00}$, zatem

$$R_{0101} = -R_{0202} = -\frac{1}{2} \partial_{00}^2 h_+$$

$$R_{0102} = R_{0201} = -\frac{1}{2} \partial_{00}^2 h_\times$$

Skutki przejścia fali grawitacyjnej

- przyspieszenie pływowe

$$\Delta a_1 = -c^2 R_{0101} \xi^1 - c^2 R_{0201} \xi^2 = \frac{c^2}{2} (\xi^1 \partial_{00}^2 h_+ + \xi^2 \partial_{00}^2 h_\times)$$

$$\Delta a_2 = -c^2 R_{0102} \xi^1 - c^2 R_{0202} \xi^2 = \frac{c^2}{2} (\xi^1 \partial_{00}^2 h_\times - \xi^2 \partial_{00}^2 h_+)$$

$$\Delta a_3 = 0$$









Skutki przejścia fali grawitacyjnej

- przyspieszenie pływowe

$$\Delta a_1 = -c^2 R_{0101} \xi^1 - c^2 R_{0201} \xi^2 = \frac{c^2}{2} (\xi^1 \partial_{00}^2 h_+ + \xi^2 \partial_{00}^2 h_\times)$$

$$\Delta a_2 = -c^2 R_{0102} \xi^1 - c^2 R_{0202} \xi^2 = \frac{c^2}{2} (\xi^1 \partial_{00}^2 h_\times - \xi^2 \partial_{00}^2 h_+)$$

$$\Delta a_3 = 0$$

ωt	h_+	h_\times
0		
$\pi/2$		
π		
$3\pi/2$		









Skutki przejścia fali grawitacyjnej

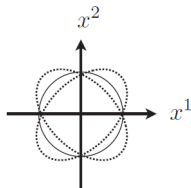
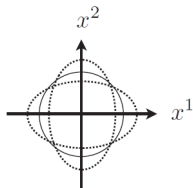
- przyspieszenie pływowe

$$\Delta a_1 = -c^2 R_{0101} \xi^1 - c^2 R_{0201} \xi^2 = \frac{c^2}{2} (\xi^1 \partial_{00}^2 h_+ + \xi^2 \partial_{00}^2 h_\times)$$

$$\Delta a_2 = -c^2 R_{0102} \xi^1 - c^2 R_{0202} \xi^2 = \frac{c^2}{2} (\xi^1 \partial_{00}^2 h_\times - \xi^2 \partial_{00}^2 h_+)$$

$$\Delta a_3 = 0$$

ωt	h_+	h_\times
0		
$\pi/2$		
π		
$3\pi/2$		



- Równanie falowe ze źródłem

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}$$

- Równanie falowe ze źródłem

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}$$

- cechowanie Lorentza jest zgodne z warunkiem znikania (płaskiej) czterodivergencji tensora energii-pędu

$$\bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\mu} = 0 \implies T^{\mu\alpha}{}_{,\mu} = 0.$$

- Równanie falowe ze źródłem

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}$$

- cechowanie Lorentza jest zgodne z warunkiem znikania (płaskiej) czterodivergencji tensora energii-pędu

$$\bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\mu} = 0 \implies T^{\mu\alpha}{}_{,\mu} = 0.$$

- Rozwiązaniem szczególnym równania falowego jest

$$\bar{h}_{\alpha\beta}(x^0, \vec{r}) = \frac{4G}{c^4} \int_S \frac{T_{\alpha\beta}(x^0 - |\vec{r} - \vec{r}'|, \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'$$

gdzie całkowanie przebiega po obszarze źródła, \vec{r} jest odległością od źródła.

R	wielkość źródła
λ	typowa długość fali grawitacyjnej
r	odległość do źródła

R	wielkość źródła
λ	typowa długość fali grawitacyjnej
r	odległość do źródła

- Strefa daleka

$$R \ll \lambda \ll r$$

R	wielkość źródła
λ	typowa długość fali grawitacyjnej
r	odległość do źródła

- Strefa daleka

$$R \ll \lambda \ll r$$

- Strefa bliska

$$R \ll r \ll \lambda$$

R	wielkość źródła
λ	typowa długość fali grawitacyjnej
r	odległość do źródła

- Strefa daleka

$$R \ll \lambda \ll r$$

- Strefa bliska

$$R \ll r \ll \lambda$$

- Obszar źródła

Rozwiązane w strefie dalekiej

- Rozwiązaniem szczególnym równania falowego w strefie dalekiej jest

$$\bar{h}_{\alpha\beta}(x^0, \vec{r}) \simeq \frac{4G}{c^4 r} \int_S T_{\alpha\beta}(x^0 - r, \vec{r}') d\vec{r}'$$

- Rozwiązaniem szczególnym równania falowego w strefie dalekiej jest

$$\bar{h}_{\alpha\beta}(x^0, \vec{r}) \simeq \frac{4G}{c^4 r} \int_S T_{\alpha\beta}(x^0 - r, \vec{r}') d\vec{r}'$$

- Wyznaczamy \bar{h}_{ij} . Rachunki prowadzą do wzoru

$$\bar{h}^{ij}(x^0, \vec{r}) \simeq \frac{2G}{c^4 r} \partial_{00}^2 \int_S x'^i x'^j T^{00}(x^0 - r, \vec{r}') d\vec{r}'$$

- Rozwiązaniem szczególnym równania falowego w strefie dalekiej jest

$$\bar{h}_{\alpha\beta}(x^0, \vec{r}) \simeq \frac{4G}{c^4 r} \int_S T_{\alpha\beta}(x^0 - r, \vec{r}') d\vec{r}'$$

- Wyznaczamy \bar{h}_{ij} . Rachunki prowadzą do wzoru

$$\bar{h}^{ij}(x^0, \vec{r}) \simeq \frac{2G}{c^4 r} \partial_{00}^2 \int_S x'^i x'^j T^{00}(x^0 - r, \vec{r}') d\vec{r}'$$

- Wprowadzamy tensor momentu kwadropulowego

$$I^{ij}(t') := \frac{1}{c^2} \int_S x'^i x'^j T^{00}(t', \vec{r}') d\vec{r}'$$

- Rozwiązaniem szczególnym równania falowego w strefie dalekiej jest

$$\bar{h}_{\alpha\beta}(x^0, \vec{r}) \simeq \frac{4G}{c^4 r} \int_S T_{\alpha\beta}(x^0 - r, \vec{r}') d\vec{r}'$$

- Wyznaczamy \bar{h}_{ij} . Rachunki prowadzą do wzoru

$$\bar{h}^{ij}(x^0, \vec{r}) \simeq \frac{2G}{c^4 r} \partial_{00}^2 \int_S x'^i x'^j T^{00}(x^0 - r, \vec{r}') d\vec{r}'$$

- Wprowadzamy tensor momentu kwadropulowego

$$I^{ij}(t') := \frac{1}{c^2} \int_S x'^i x'^j T^{00}(t', \vec{r}') d\vec{r}'$$

$$\bar{h}^{ij}(t, r) \simeq \frac{2G}{c^4 r} \ddot{I}^{ij}(t - r/c).$$

Rozwiązanie TT w strefie dalekiej

- w cechowaniu TT wykorzystamy bezśladową postać tensora momentu kwadropulowego

$$I^{ij}(t') = \frac{1}{c^2} \int_S \left(x'^i x'^j - \frac{1}{3} \delta^{ij} r'^2 \right) T^{00}(t', \vec{r}') d\vec{r}'$$

- w cechowaniu TT wykorzystamy bezśladową postać tensora momentu kwadropulowego

$$I^{ij}(t') = \frac{1}{c^2} \int_S \left(x'^i x'^j - \frac{1}{3} \delta^{ij} r'^2 \right) T^{00}(t', \vec{r}') d\vec{r}'$$

$$\bar{h}_{TT}^{ij}(t, r) = \frac{2G}{c^4 r} \ddot{I}_{TT}^{ij}(t - r/c), \quad I_{ij}^{TT} = \Lambda_{ij,kl} I^{kl}$$

Rozwiązane w strefie bliskiej

$$\bar{h}_{\alpha\beta}(x^0, \vec{r}) = \frac{4G}{c^4} \int_S \frac{T_{\alpha\beta}(x^0 - |\vec{r} - \vec{r}'|, \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'$$

$$\bar{h}_{\alpha\beta}(x^0, \vec{r}) = \frac{4G}{c^4} \int_S \frac{T_{\alpha\beta}(x^0 - |\vec{r} - \vec{r}'|, \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'$$

- Rozwiązanie w strefie bliskiej opiera się na rozwinięciu multipolowym (w różnych postaciach!)

$$\bar{h}_{\alpha\beta}(x^0, \vec{r}) = \frac{4G}{c^4} \int_S \frac{T_{\alpha\beta}(x^0 - |\vec{r} - \vec{r}'|, \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'$$

- Rozwiązanie w strefie bliskiej opiera się na rozwinięciu multipolowym (w różnych postaciach!)
- Niech $\vec{r} = r\vec{n}$, wówczas

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \simeq r \left(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}'}{r} \right)$$

$$\bar{h}_{\alpha\beta}(x^0, \vec{r}) = \frac{4G}{c^4} \int_S \frac{T_{\alpha\beta}(x^0 - |\vec{r} - \vec{r}'|, \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'$$

- Rozwiązanie w strefie bliskiej opiera się na rozwinięciu multipolowym (w różnych postaciach!)
- Niech $\vec{r} = r\vec{n}$, wówczas

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \simeq r \left(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}'}{r} \right)$$

- oraz

$$\begin{aligned} T^{ij}(t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c, \vec{r}') &= T^{ij} \left(t - r/c + \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}'}{c} + \dots, \vec{r}' \right) \\ &= T^{ij}(t - r/c, \vec{r}') + \partial_t T^{ij}(t - r/c, \vec{r}') \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}'}{c} + \frac{1}{2} \partial_{tt}^2 T^{ij}(t - r/c, \vec{r}') \frac{(\vec{n} \cdot \vec{r}')^2}{c^2} + \dots \end{aligned}$$

Momenty tensora naprężeń

$$M^{ij}(t') = \int_S T^{ij}(t', \vec{r}') d\vec{r}'$$

$$M^{ij|k}(t') = \int_S x'^k T^{ij}(t', \vec{r}') d\vec{r}'$$

$$M^{ij|k\ell}(t') = \int_S x'^k x'^\ell T^{ij}(t', \vec{r}') d\vec{r}'$$

.....

Rozwinięcie multipolowe

$$M^{ij}(t') = \int_S T^{ij}(t', \vec{r}') d\vec{r}'$$

$$M^{ij|k}(t') = \int_S x'^k T^{ij}(t', \vec{r}') d\vec{r}'$$

$$M^{ij|k\ell}(t') = \int_S x'^k x'^\ell T^{ij}(t', \vec{r}') d\vec{r}'$$

.....

Rozwinięcie multipolowe

$$\bar{h}^{ij}(t, \vec{r}) = \frac{4G}{c^4 r} \left[M^{ij}(t - r/c) + \frac{n_k}{c} \dot{M}^{ij|k}(t - r/c) + \frac{1}{2} \frac{n_k n_\ell}{c^2} \ddot{M}^{ij|k\ell}(t - r/c) + \dots \right]$$

$$M^{ij}(t') = \int_S T^{ij}(t', \vec{r}') d\vec{r}'$$

$$M^{ij|k}(t') = \int_S x'^k T^{ij}(t', \vec{r}') d\vec{r}'$$

$$M^{ij|k\ell}(t') = \int_S x'^k x'^\ell T^{ij}(t', \vec{r}') d\vec{r}'$$

.....

Rozwinięcie multipolowe

$$\bar{h}^{ij}(t, \vec{r}) = \frac{4G}{c^4 r} \left[M^{ij}(t - r/c) + \frac{n_k}{c} \dot{M}^{ij|k}(t - r/c) + \frac{1}{2} \frac{n_k n_\ell}{c^2} \ddot{M}^{ij|k\ell}(t - r/c) + \dots \right]$$

gdzie

$$M^{ij} = \frac{1}{2} \ddot{I}^{ij}$$

- Momenty tensora naprężeń można wyrazić przez prostsze wielkości dzięki prawom zachowania $T^{\alpha\beta}_{,\alpha} = 0$, np.

$$\dot{M}^{ij|k} = \frac{1}{6} \ddot{I}^{ijk} + \frac{1}{3} (\ddot{P}^{i|jk} + \ddot{P}^{k|ij} + \ddot{P}^{j|ki})$$

gdzie

$$P^{i|jk}(t) = \frac{1}{c} \int_S T^{0i}(t - r/c, \vec{r}') x'^j x'^k d\vec{r}'$$

$$I^{ijk} = \frac{1}{c^2} \int_S T^{00}(t - r/c, \vec{r}') x'^i x'^j x'^k d\vec{r}'$$

Przykłady. Obracająca się niejednorodna bryła

Przykłady. Obracająca się niejednorodna bryła

- Obracający się pręt o masie $M = 1$ kg, długości $l = 1$ m z prędkością kątową $\omega = 1$ s⁻¹ produkuje deformację czasoprzestrzeni na poziomie

$$h \sim \frac{2G}{c^4 r} \ddot{I} \ll \frac{GMl^2\omega^3}{\pi c^5} \sim 10^{-53}$$

Przykłady. Obracająca się niejednorodna bryła

- Obracający się pręt o masie $M = 1$ kg, długości $l = 1$ m z prędkością kątową $\omega = 1$ s⁻¹ produkuje deformację czasoprzestrzeni na poziomie

$$h \sim \frac{2G}{c^4 r} \ddot{I} \ll \frac{GMl^2\omega^3}{\pi c^5} \sim 10^{-53}$$

- Obracająca się elipsoida trójosiowa, w chwili $t = 0$ układ współrzędnych orientujemy w kierunku osi głównych, obrót wokół osi Z z częstością ω

$$T^{00}(\vec{r}, t) = c^2 \rho(R_z(\omega t)\vec{r})$$

gdzie

$$R_z(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

jest macierzą obrotu wokół osi Z

Obracająca się bryła

- I jest wówczas tensorem bezwładności oraz

$$I(t) = R_z(\omega t) I_0 R_z^{-1}(\omega t)$$

gdzie

$$I_0 = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

jest początkowym tensorem momentu bezwładności

- I jest wówczas tensorem bezwładności oraz

$$I(t) = R_z(\omega t) I_0 R_z^{-1}(\omega t)$$

gdzie

$$I_0 = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

jest początkowym tensorem momentu bezwładności

- Ostatecznie

$$I(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}\varepsilon I_3 \cos 2\omega t & -\frac{1}{2}\varepsilon I_3 \sin 2\omega t & 0 \\ -\frac{1}{2}\varepsilon I_3 \sin 2\omega t & \frac{1}{2}I - \frac{1}{2}\varepsilon I_3 \cos 2\omega t & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

gdzie $I = I_1 + I_2$, $\varepsilon = (I_1 - I_2)/I_3$

- Tensor

$$\ddot{I}(t) = 2\omega^2 \varepsilon I_3 \begin{bmatrix} -\cos 2\omega t' & \sin 2\omega t' & 0 \\ \sin 2\omega t' & \cos 2\omega t' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Tensor

$$\ddot{I}(t) = 2\omega^2 \varepsilon I_3 \begin{bmatrix} -\cos 2\omega t' & \sin 2\omega t' & 0 \\ \sin 2\omega t' & \cos 2\omega t' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

jest bezśladowy i prostopadły do kierunku osi propagacji Z,

- Tensor

$$\ddot{I}(t) = 2\omega^2 \varepsilon I_3 \begin{bmatrix} -\cos 2\omega t' & \sin 2\omega t' & 0 \\ \sin 2\omega t' & \cos 2\omega t' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

jest bezśladowy i prostopadły do kierunku osi propagacji Z,

- $\bar{h}^{\text{TT}}(t, z) = \frac{4G\omega^2 \varepsilon I_3}{c^4 z} \begin{bmatrix} -\cos 2\omega(t - z/c) & \sin 2\omega(t - z/c) & 0 \\ \sin 2\omega(t - z/c) & \cos 2\omega(t - z/c) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- Tensor

$$\ddot{I}(t) = 2\omega^2 \varepsilon I_3 \begin{bmatrix} -\cos 2\omega t' & \sin 2\omega t' & 0 \\ \sin 2\omega t' & \cos 2\omega t' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

jest bezśladowy i prostopadły do kierunku osi propagacji Z,

- $\bar{h}^{\text{TT}}(t, z) =$

$$\frac{4G\omega^2 \varepsilon I_3}{c^4 z} \begin{bmatrix} -\cos 2\omega(t - z/c) & \sin 2\omega(t - z/c) & 0 \\ \sin 2\omega(t - z/c) & \cos 2\omega(t - z/c) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Częstość fali grawitacyjnej jest dwukrotnie większa niż częstość obrotów!

- Tensor

$$\ddot{h}(t) = 2\omega^2 \varepsilon I_3 \begin{bmatrix} -\cos 2\omega t' & \sin 2\omega t' & 0 \\ \sin 2\omega t' & \cos 2\omega t' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

jest bezśladowy i prostopadły do kierunku osi propagacji Z,

- $\bar{h}^{\text{TT}}(t, z) =$

$$\frac{4G\omega^2 \varepsilon I_3}{c^4 z} \begin{bmatrix} -\cos 2\omega(t - z/c) & \sin 2\omega(t - z/c) & 0 \\ \sin 2\omega(t - z/c) & \cos 2\omega(t - z/c) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Częstość fali grawitacyjnej jest dwukrotnie większa niż częstość obrotów!
- Strumień energii przez powierzchnię dS prostopadłą do osi Z

$$\frac{dE}{dt dS} = c T_{03}^{\text{GW}} = -c T_{00}^{\text{GW}} = -\frac{c^3}{16\pi G} \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle = -\frac{4G\varepsilon^2 I_3^2}{\pi c^5 z^2} \omega^6$$

Rozkład kątowy fali grawitacyjnej

- Niech fala rozchodzi się w kierunku

$$\vec{n} = [\sin \theta \sin \phi, \sin \theta \cos \phi, \cos \theta]$$

- Niech fala rozchodzi się w kierunku

$$\vec{n} = [\sin \theta \sin \phi, \sin \theta \cos \phi, \cos \theta]$$

$$\bar{h}_{ij}^{\text{TT}}(\vec{n}, t) = \frac{2G}{c^4 r} \Lambda_{ij,kl}(\vec{n}) \ddot{I}^{kl}(t - r/c)$$

- Niech fala rozchodzi się w kierunku

$$\vec{n} = [\sin \theta \sin \phi, \sin \theta \cos \phi, \cos \theta]$$

$$\bar{h}_{ij}^{\text{TT}}(\vec{n}, t) = \frac{2G}{c^4 r} \Lambda_{ij,kl}(\vec{n}) \ddot{I}^{kl}(t - r/c)$$

- Podstawienie $\Lambda_{ij,kl} = P_{ik}P_{jl} - \frac{1}{2}P_{ij}P_{kl}$ prowadzi do

$$\bar{h}^{\text{TT}}(\vec{n}, t) = \frac{2G}{c^4 r} \left(P \ddot{I}(t - r/c) P - \frac{1}{2} \text{tr}(P \ddot{I}(t - r/c)) P \right), \quad P_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j.$$

Przykład: Promieniowanie wzdłuż osi X

- Niech \vec{n} będzie wzdłuż osi X, wówczas

$$\left(P\ddot{I}P - \frac{1}{2}\text{tr}(P\ddot{I})P \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\ddot{I}_{22} - \ddot{I}_{33})/2 & \ddot{I}_{23} \\ 0 & \ddot{I}_{23} & -(\ddot{I}_{22} - \ddot{I}_{33})/2 \end{bmatrix}$$

- Niech \vec{n} będzie wzdłuż osi X, wówczas

$$\left(P\ddot{I}P - \frac{1}{2}\text{tr}(P\ddot{I})P \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\ddot{I}_{22} - \ddot{I}_{33})/2 & \ddot{I}_{23} \\ 0 & \ddot{I}_{23} & -(\ddot{I}_{22} - \ddot{I}_{33})/2 \end{bmatrix}$$

$$h_+ = \frac{2G}{c^4 r} \frac{\ddot{I}_{22}}{2} = \frac{2G\epsilon I_3}{c^2 r} \omega^2 \cos 2\omega t'$$

- Niech \vec{n} będzie wzdłuż osi X, wówczas

$$\left(P\ddot{I}P - \frac{1}{2}\text{tr}(P\ddot{I})P \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\ddot{I}_{22} - \ddot{I}_{33})/2 & \ddot{I}_{23} \\ 0 & \ddot{I}_{23} & -(\ddot{I}_{22} - \ddot{I}_{33})/2 \end{bmatrix}$$

$$h_+ = \frac{2G}{c^4 r} \frac{\ddot{I}_{22}}{2} = \frac{2G\epsilon I_3}{c^2 r} \omega^2 \cos 2\omega t'$$

$$h_{\times} = 0$$

$$L_{\text{GW}} = -\frac{dE}{dt} = \frac{c^3 r^2}{32\pi G} \int_{\text{sfera}} \langle \dot{h}_{ij}^{\text{TT}} \dot{h}_{\text{TT}}^{ij} \rangle d\Omega,$$

gdzie

$$\dot{h}_{ij}^{\text{TT}} = \frac{2G}{c^4 r} \ddot{I}_{ij}^{\text{TT}} = \frac{2G}{c^4 r} \Lambda_{ij,kl}(\vec{n}) \ddot{I}^{kl}$$

$$L_{\text{GW}} = -\frac{dE}{dt} = \frac{c^3 r^2}{32\pi G} \int_{\text{sfera}} \langle \dot{h}_{ij}^{\text{TT}} \dot{h}_{\text{TT}}^{ij} \rangle d\Omega,$$

gdzie

$$\dot{h}_{ij}^{\text{TT}} = \frac{2G}{c^4 r} \ddot{I}_{ij}^{\text{TT}} = \frac{2G}{c^4 r} \Lambda_{ij,kl}(\vec{n}) \ddot{I}^{kl}$$

Wówczas

$$L_{\text{GW}} = \frac{G}{8\pi c^5} \int_{\text{sfera}} \langle \ddot{I}_{ij}^{\text{TT}} \ddot{I}_{\text{TT}}^{ij} \rangle d\Omega,$$

gdzie

$$\ddot{I}_{ij}^{\text{TT}} \ddot{I}_{\text{TT}}^{ij} = \text{tr}[P(\Omega) \ddot{I} P(\Omega) \ddot{I}] - \frac{1}{2} (\text{tr}[P(\Omega) \ddot{I}])^2$$

$$L_{\text{GW}} = -\frac{dE}{dt} = \frac{c^3 r^2}{32\pi G} \int_{\text{sfera}} \langle \dot{h}_{ij}^{\text{TT}} \dot{h}_{\text{TT}}^{ij} \rangle d\Omega,$$

gdzie

$$\dot{h}_{ij}^{\text{TT}} = \frac{2G}{c^4 r} \ddot{I}_{ij}^{\text{TT}} = \frac{2G}{c^4 r} \Lambda_{ij,kl}(\vec{n}) \ddot{I}^{kl}$$

Wówczas

$$L_{\text{GW}} = \frac{G}{8\pi c^5} \int_{\text{sfera}} \langle \ddot{I}_{ij}^{\text{TT}} \ddot{I}_{\text{TT}}^{ij} \rangle d\Omega,$$

gdzie

$$\ddot{I}_{ij}^{\text{TT}} \ddot{I}_{\text{TT}}^{ij} = \text{tr}[P(\Omega) \ddot{I} P(\Omega) \ddot{I}] - \frac{1}{2} (\text{tr}[P(\Omega) \ddot{I}])^2$$

Całkowanie po sferze daje

$$\int_{\text{sfera}} \langle \ddot{I}_{ij}^{\text{TT}} \ddot{I}_{\text{TT}}^{ij} \rangle d\Omega = \frac{8\pi}{5} \langle \ddot{I}^{kl} \ddot{I}_{kl} - \frac{1}{3} (\ddot{I}^k_k)^2 \rangle$$

$$L_{\text{GW}} = -\frac{dE}{dt} = \frac{c^3 r^2}{32\pi G} \int_{\text{sfera}} \langle \dot{h}_{ij}^{\text{TT}} \dot{h}_{\text{TT}}^{ij} \rangle d\Omega,$$

gdzie

$$\dot{h}_{ij}^{\text{TT}} = \frac{2G}{c^4 r} \ddot{I}_{ij}^{\text{TT}} = \frac{2G}{c^4 r} \Lambda_{ij,kl}(\vec{n}) \ddot{I}^{kl}$$

Wówczas

$$L_{\text{GW}} = \frac{G}{8\pi c^5} \int_{\text{sfera}} \langle \ddot{I}_{ij}^{\text{TT}} \ddot{I}_{\text{TT}}^{ij} \rangle d\Omega,$$

gdzie

$$\ddot{I}_{ij}^{\text{TT}} \ddot{I}_{\text{TT}}^{ij} = \text{tr}[P(\Omega) \ddot{I} P(\Omega) \ddot{I}] - \frac{1}{2} (\text{tr}[P(\Omega) \ddot{I}])^2$$

Całkowanie po sferze daje

$$\int_{\text{sfera}} \langle \ddot{I}_{ij}^{\text{TT}} \ddot{I}_{\text{TT}}^{ij} \rangle d\Omega = \frac{8\pi}{5} \langle \ddot{I}^{kl} \ddot{I}_{kl} - \frac{1}{3} (\ddot{I}^k_k)^2 \rangle$$

Ostatecznie

$$L_{\text{GW}} = \frac{G}{5c^5} \langle \ddot{I}^{kl} \ddot{I}_{kl} - \frac{1}{3} (\ddot{I}^k_k)^2 \rangle = \frac{G}{5c^5} \langle \ddot{\mathbf{I}}^{kl} \ddot{\mathbf{I}}_{kl} \rangle$$

Przykład: Wirująca niejednorodna elipsoida

Przykład: Wirująca niejednorodna elipsoidalna

$$\ddot{I}(t) = 4\omega^3 \varepsilon I_3 \underbrace{\begin{bmatrix} \sin 2\omega t' & \cos 2\omega t' & 0 \\ \cos 2\omega t' & -\sin 2\omega t' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_B$$

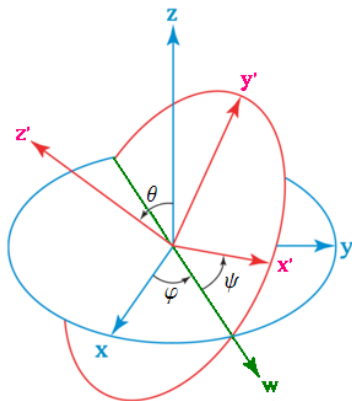
Przykład: Wirująca niejednorodna elipsoidalna

$$\ddot{I}(t) = 4\omega^3 \varepsilon I_3 \underbrace{\begin{bmatrix} \sin 2\omega t' & \cos 2\omega t' & 0 \\ \cos 2\omega t' & -\sin 2\omega t' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_B$$

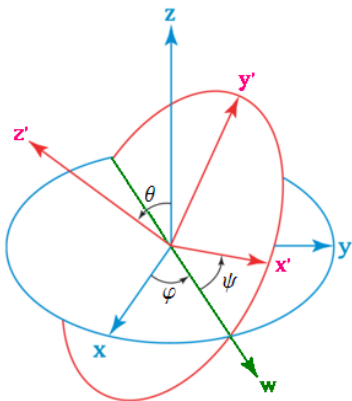
$$L_{\text{GW}} = \frac{G}{5c^5} (4\omega^3 \varepsilon I_3)^2 \langle \text{tr}(B^2) \rangle = \frac{32}{5} \frac{G}{c^5} \varepsilon^2 I_3^2 \omega^6$$

Przykład: Wirowanie z precesją

Przykład: Wirowanie z precesją



Przykład: Wirowanie z precesją



$$\begin{aligned}I_1(\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi) &= J \sin \theta \sin \psi = J'_1 \\I_2(-\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi) &= J \sin \theta \cos \psi = J'_2 \\I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) &= J \cos \theta = J'_3\end{aligned}$$

Przykład: Wirowanie z precesją

- Oś rotacji nie pokrywa się z osią główną

Przykład: Wirowanie z precesją

- Oś rotacji nie pokrywa się z osią główną
- W układzie inercyjnym xyz moment pędu $\vec{J} = [0, 0, J]$

- Oś rotacji nie pokrywa się z osią główną
- W układzie inercjalnym xyz moment pędu $\vec{J} = [0, 0, J]$
- W układzie inercjalnym $x'y'z'$ moment pędu $\vec{J}' = [J'_1, J'_2, J'_3]$

Przykład: Wirowanie z precesją

- Oś rotacji nie pokrywa się z osią główną
- W układzie inercjalnym xyz moment pędu $\vec{J} = [0, 0, J]$
- W układzie inercjalnym $x'y'z'$ moment pędu $\vec{J}' = [J'_1, J'_2, J'_3]$
- Przy $I_1 = I_2 = I$
 - 1 $\dot{\theta} = 0$
 - 2 oś z' obraca się ze stałą prędkością kątową $\dot{\phi} = \Omega = J/I$ wokół kierunku \vec{J}
 - 3 precesja z prędkością kątową $\Omega_p \ll \Omega$

$$\Omega_p = \dot{\psi} = \varepsilon \Omega \cos \theta = \text{const.}, \quad \varepsilon = \frac{I}{I_3} - 1$$

Przykład: Wirowanie z precesją

$$\ddot{\mathbf{i}} = \varepsilon I_3 \Omega^3 \sin \theta \begin{bmatrix} -4 \sin \theta \sin 2\Omega t & 4 \sin \theta \cos 2\Omega t & -\cos \theta \cos \Omega t \\ 4 \sin \theta \cos 2\Omega t & 4 \sin \theta \sin 2\Omega t & -\cos \theta \sin \Omega t \\ -\cos \theta \cos \Omega t & -\cos \theta \sin \Omega t & 0 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\mathbf{i}} = \varepsilon I_3 \Omega^3 \sin \theta \begin{bmatrix} -4 \sin \theta \sin 2\Omega t & 4 \sin \theta \cos 2\Omega t & -\cos \theta \cos \Omega t \\ 4 \sin \theta \cos 2\Omega t & 4 \sin \theta \sin 2\Omega t & -\cos \theta \sin \Omega t \\ -\cos \theta \cos \Omega t & -\cos \theta \sin \Omega t & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_{\text{GW}} = \frac{G}{5c^5} (\varepsilon I_3 \Omega^3 \sin \theta)^2 \langle \text{tr } B^2 \rangle$$

$$\text{tr } B^2 = 2(\cos^2 \theta + 16 \sin^2 \theta)$$

$$\ddot{I} = \varepsilon I_3 \Omega^3 \sin \theta \begin{bmatrix} -4 \sin \theta \sin 2\Omega t & 4 \sin \theta \cos 2\Omega t & -\cos \theta \cos \Omega t \\ 4 \sin \theta \cos 2\Omega t & 4 \sin \theta \sin 2\Omega t & -\cos \theta \sin \Omega t \\ -\cos \theta \cos \Omega t & -\cos \theta \sin \Omega t & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_{\text{GW}} = \frac{G}{5c^5} (\varepsilon I_3 \Omega^3 \sin \theta)^2 \langle \text{tr } B^2 \rangle$$

$$\text{tr } B^2 = 2(\cos^2 \theta + 16 \sin^2 \theta)$$

- fala grawitacyjna ma dwie charakterystyczne częstotliwości $\omega = 2\Omega$ oraz $\omega = \Omega$

$$\ddot{I} = \varepsilon I_3 \Omega^3 \sin \theta \begin{bmatrix} -4 \sin \theta \sin 2\Omega t & 4 \sin \theta \cos 2\Omega t & -\cos \theta \cos \Omega t \\ 4 \sin \theta \cos 2\Omega t & 4 \sin \theta \sin 2\Omega t & -\cos \theta \sin \Omega t \\ -\cos \theta \cos \Omega t & -\cos \theta \sin \Omega t & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_{\text{GW}} = \frac{G}{5c^5} (\varepsilon I_3 \Omega^3 \sin \theta)^2 \langle \text{tr } B^2 \rangle$$

$$\text{tr } B^2 = 2(\cos^2 \theta + 16 \sin^2 \theta)$$

- fala grawitacyjna ma dwie charakterystyczne częstotliwości $\omega = 2\Omega$ oraz $\omega = \Omega$
- w ogólności, gdy $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ są dwie rodziny charakterystycznych częstotliwości

$$\omega = 2\Omega + k\Omega_p, \quad \omega = \Omega + (2k + 1)\Omega_p$$

Radialne spadanie w czarną dziurę

Radialne spadanie w czarną dziurę

- ciało o masie m rozpoczyna spadek z nieskończoności z $\dot{z}(0) = 0$

Radialne spadanie w czarną dziurę

- ciało o masie m rozpoczyna spadek z nieskończoności z $\dot{z}(0) = 0$
- opis newtonowski w zlinearyzowanej teorii grawitacji

Radialne spadanie w czarną dziurę

- ciało o masie m rozpoczyna spadek z nieskończoności z $\dot{z}(0) = 0$
- opis newtonowski w zlinearyzowanej teorii grawitacji

$$\frac{1}{2}m\dot{z}^2 - \frac{GMm}{z} = 0$$

Radialne spadanie w czarną dziurę

- ciało o masie m rozpoczyna spadek z nieskończoności z $\dot{z}(0) = 0$
- opis newtonowski w zlinearyzowanej teorii grawitacji

$$\frac{1}{2}m\dot{z}^2 - \frac{GMm}{z} = 0$$

$$\dot{z} = -\left(\frac{2GM}{z}\right)^{1/2} = -c\left(\frac{R_S}{z}\right)^{1/2}$$

Radialne spadanie w czarną dziurę

- ciało o masie m rozpoczyna spadek z nieskończoności z $\dot{z}(0) = 0$
- opis newtonowski w zlinearyzowanej teorii grawitacji

$$\frac{1}{2}m\dot{z}^2 - \frac{GMm}{z} = 0$$

$$\dot{z} = -\left(\frac{2GM}{z}\right)^{1/2} = -c\left(\frac{R_S}{z}\right)^{1/2}$$

- nieznikającą składową tensora bezwładności jest $I_{33} = mz^2$

$$L_{\text{GW}} = \frac{G}{5c^5} \langle \ddot{I}_{33}^2 - \frac{1}{3} \ddot{I}_{33}^2 \rangle = \frac{2G}{15c^5} \langle \ddot{I}_{33}^2 \rangle = \frac{2G}{15} m^2 c R_S^3 \langle z^{-5} \rangle$$

Radialne spadanie w czarną dziurę

- ciało o masie m rozpoczyna spadek z nieskończoności z $\dot{z}(0) = 0$
- opis newtonowski w zlinearyzowanej teorii grawitacji

$$\frac{1}{2}m\dot{z}^2 - \frac{GMm}{z} = 0$$

$$\dot{z} = -\left(\frac{2GM}{z}\right)^{1/2} = -c\left(\frac{R_S}{z}\right)^{1/2}$$

- nieznikającą składową tensora bezwładności jest $I_{33} = mz^2$

$$L_{\text{GW}} = \frac{G}{5c^5} \langle \ddot{I}_{33}^2 - \frac{1}{3} \ddot{I}_{33}^2 \rangle = \frac{2G}{15c^5} \langle \ddot{I}_{33}^2 \rangle = \frac{2G}{15} m^2 c R_S^3 \langle z^{-5} \rangle$$

- ilość wypromieniowanej energii do osiągnięcia punktu $z = r$

$$-\Delta E = \frac{2}{105} mc^2 \frac{m}{M} \left(\frac{R_S}{r}\right)^{7/2}$$

Radialne spadanie i siły pływowe

- Siła pływowa

$$F_p = \frac{GMm/2}{(r-a)^2} - \frac{GMm/2}{(r+a)^2} \simeq 2GMm \frac{a}{r^3}$$

Radialne spadanie i siły pływowe

- Siła pływowa

$$F_p = \frac{GMm/2}{(r-a)^2} - \frac{GMm/2}{(r+a)^2} \simeq 2GMm \frac{a}{r^3}$$

- siła wzajemnego oddziaływania dwóch mas $m/2$

$$F_g = \frac{G(m/2)^2}{(2a)^2}$$

Radialne spadanie i siły pływowe

- Siła pływowa

$$F_p = \frac{GMm/2}{(r-a)^2} - \frac{GMm/2}{(r+a)^2} \simeq 2GMm \frac{a}{r^3}$$

- siła wzajemnego oddziaływania dwóch mas $m/2$

$$F_g = \frac{G(m/2)^2}{(2a)^2}$$

- obiekt ulegnie rozerwaniu pod wpływem sił pływowych jeśli $F_p > F_g$

$$r < \eta \sqrt[3]{M/ma} \equiv r_p$$

gdzie $\eta = 2\sqrt[3]{4}$ w tym uproszczonym modelu. W ogólności η zależy od własności sprężystych obiektu.

Radialne spadanie i siły pływowe

- Siła pływowa

$$F_p = \frac{GMm/2}{(r-a)^2} - \frac{GMm/2}{(r+a)^2} \simeq 2GMm \frac{a}{r^3}$$

- siła wzajemnego oddziaływania dwóch mas $m/2$

$$F_g = \frac{G(m/2)^2}{(2a)^2}$$

- obiekt ulegnie rozerwaniu pod wpływem sił pływowych jeśli $F_p > F_g$

$$r < \eta \sqrt[3]{M/ma} \equiv r_p$$

gdzie $\eta = 2\sqrt[3]{4}$ w tym uproszczonym modelu. W ogólności η zależy od własności sprężystych obiektu.

- Rozwiązanie równania spadku

$$\frac{2}{3}z^{3/2} = -cR_S^{1/2}(t - t_0) + \frac{2}{3}z_0^{3/2}, \quad z(t_0) = z_0$$

Deformacja spadającego obiektu

Deformacja spadającego obiektu

- Niech w t_0 obiekt rozciągli o rozmiarach $\delta z_0 = 2a$ mija odległość r_p . Wariacja względem z_0 (rozmiarów obiektu) prowadzi do

$$z^{1/2} \delta z = z_0^{1/2} \delta z_0, \quad \delta z = \left(\frac{r_p}{z} \right)^{1/2} 2a$$

Deformacja spadającego obiektu

- Niech w t_0 obiekt rozciągli o rozmiarach $\delta z_0 = 2a$ mija odległość r_p . Wariacja względem z_0 (rozmiarów obiektu) prowadzi do

$$z^{1/2} \delta z = z_0^{1/2} \delta z_0, \quad \delta z = \left(\frac{r_p}{z} \right)^{1/2} 2a$$

- Ponieważ $z < r_p$, to rozmiary ciała zwiększają się w kierunku osi z

Deformacja spadającego obiektu

- Niech w t_0 obiekt rozciągli o rozmiarach $\delta z_0 = 2a$ mija odległość r_p . Wariacja względem z_0 (rozmiarów obiektu) prowadzi do

$$z^{1/2} \delta z = z_0^{1/2} \delta z_0, \quad \delta z = \left(\frac{r_p}{z} \right)^{1/2} 2a$$

- Ponieważ $z < r_p$, to rozmiary ciała zwiększają się w kierunku osi z
- Zmienia się charakterystyka (także widmowa) promieniowania grawitacyjnego!

Deformacja spadającego obiektu

- Niech w t_0 obiekt rozciągnięty o rozmiarach $\delta z_0 = 2a$ mija odległość r_p . Wariacja względem z_0 (rozmiarów obiektu) prowadzi do

$$z^{1/2} \delta z = z_0^{1/2} \delta z_0, \quad \delta z = \left(\frac{r_p}{z}\right)^{1/2} 2a$$

- Ponieważ $z < r_p$, to rozmiary ciała zwiększają się w kierunku osi z
- Zmienia się charakterystyka (także widmowa) promieniowania grawitacyjnego!

obiekt	$2a$ [km]	M/M_\odot	$(r_p/R_S)^{1/2}$
gwiazda ciągu głównego	$7 \cdot 10^5$	10	300
		10^3	70
		10^6	7
biały karzeł	10^4	10	40
		10^3	8
		10^6	1
gwiazda neutronowa	10	10	1.3
		10^3	1
		10^6	1

Siła reakcji promieniowania

- Siła reakcji promieniowania jest odpowiedzią układu (np. modyfikacją jego ruchu) na emisję promieniowania grawitacyjnego

Siła reakcji promieniowania

- Siła reakcji promieniowania jest odpowiedzią układu (np. modyfikacją jego ruchu) na emisję promieniowania grawitacyjnego
- W przybliżeniu newtonowskim określamy ją jako

$$\int_0^T \vec{F}_{\text{RR}} \cdot \vec{v} dt = -L_{\text{GW}} = -\frac{G}{5c^5} \int_0^T \ddot{I}^{ij} \ddot{I}_{ij} dt$$

- Siła reakcji promieniowania jest odpowiedzią układu (np. modyfikacją jego ruchu) na emisję promieniowania grawitacyjnego
- W przybliżeniu newtonowskim określamy ją jako

$$\int_0^T \vec{F}_{\text{RR}} \cdot \vec{v} dt = -L_{\text{GW}} = -\frac{G}{5c^5} \int_0^T \ddot{I}^{ij} \ddot{I}_{ij} dt$$

- Po przekształceniach

$$\int_0^T F_j^{\text{RR}} v^j dt = -\frac{2Gm}{5c^5} \int_0^T \frac{d^5 I_{ij}}{dt^5} x^i v^j dt$$

Siła reakcji promieniowania

- Siła reakcji promieniowania jest odpowiedzią układu (np. modyfikacją jego ruchu) na emisję promieniowania grawitacyjnego
- W przybliżeniu newtonowskim określamy ją jako

$$\int_0^T \vec{F}_{\text{RR}} \cdot \vec{v} dt = -L_{\text{GW}} = -\frac{G}{5c^5} \int_0^T \ddot{I}^{ij} \ddot{I}_{ij} dt$$

- Po przekształceniach

$$\int_0^T F_j^{\text{RR}} v^j dt = -\frac{2Gm}{5c^5} \int_0^T \frac{d^5 I_{ij}}{dt^5} x^i v^j dt$$

- Stąd identyfikujemy

$$F_j^{\text{RR}} = -\frac{2Gm}{5c^5} x^j \frac{d^5 I_{ij}}{dt^5}$$

Utrata momentu pędu

- W ogólności

$$\frac{dJ_i^{\text{GW}}}{dt} = -c\varepsilon_{ijk} \oint_{\text{sfera}} \langle x^j T^{kr} - x^k T^{jr} \rangle n_r d\Omega$$

- W ogólności

$$\frac{dJ_i^{\text{GW}}}{dt} = -c\varepsilon_{ijk} \oint_{\text{sfera}} \langle x^j T^{kr} - x^k T^{jr} \rangle n_r d\Omega$$

- W przybliżeniu newtonowskim określamy

$$\frac{d\vec{J}^{\text{GW}}}{dt} = \langle \vec{r} \times \vec{F}^{\text{RR}} \rangle$$

- W ogólności

$$\frac{dJ_i^{\text{GW}}}{dt} = -c\varepsilon_{ijk} \oint_{\text{sfera}} \langle x^j T^{kr} - x^k T^{jr} \rangle n_r d\Omega$$

- W przybliżeniu newtonowskim określamy

$$\frac{d\vec{J}^{\text{GW}}}{dt} = \langle \vec{r} \times \vec{F}^{\text{RR}} \rangle$$

- Ostatecznie

$$\frac{J_i^{\text{GW}}}{dt} = -\frac{2Gm}{5c^5} \varepsilon_{ijk} \langle \ddot{\vec{I}}_r^{\cdot\cdot k} \ddot{\vec{I}}^{jr} \rangle$$

Układ podwójny jako źródło fali grawitacyjnej

- Przykład orbity kołowej o promieniu R dla dwóch mas m

$$I_{11} = 2mR^2 \cos^2 \omega t$$

$$I_{12} = 2mR^2 \sin \omega t \cos \omega t$$

$$I_{22} = 2mR^2 \sin^2 \omega t, \quad \omega = \frac{1}{2} \left(\frac{Gm}{R^3} \right)^{1/2}$$

- Przykład orbity kołowej o promieniu R dla dwóch mas m

$$I_{11} = 2mR^2 \cos^2 \omega t$$

$$I_{12} = 2mR^2 \sin \omega t \cos \omega t$$

$$I_{22} = 2mR^2 \sin^2 \omega t, \quad \omega = \frac{1}{2} \left(\frac{Gm}{R^3} \right)^{1/2}$$

- Zaburzenie

$$h_{ij} = -\frac{2G}{c^4 r} 4mR^2 \omega^2 \begin{bmatrix} \cos 2\omega t & \sin 2\omega t & 0 \\ \sin 2\omega t & -\cos 2\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Układ podwójny jako źródło fali grawitacyjnej

- Przykład orbity kołowej o promieniu R dla dwóch mas m

$$I_{11} = 2mR^2 \cos^2 \omega t$$

$$I_{12} = 2mR^2 \sin \omega t \cos \omega t$$

$$I_{22} = 2mR^2 \sin^2 \omega t, \quad \omega = \frac{1}{2} \left(\frac{Gm}{R^3} \right)^{1/2}$$

- Zaburzenie

$$h_{ij} = -\frac{2G}{c^4 r} 4mR^2 \omega^2 \begin{bmatrix} \cos 2\omega t & \sin 2\omega t & 0 \\ \sin 2\omega t & -\cos 2\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Moc promieniowania

$$L_{GW} = \frac{2G^4 m^5}{5c^5 R^5}$$

Układ podwójny jako źródło fali grawitacyjnej. Orbita eliptyczna

Układ podwójny jako źródło fali grawitacyjnej. Orbita eliptyczna

- W układzie środka masy układu dwóch mas m_1 , m_2 o energii E i momencie pędu J

$$\vec{r}_1 = -\frac{\mu}{m_1}\vec{r}_{12}, \quad \vec{r}_2 = \frac{\mu}{m_2}\vec{r}_{12}, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

$$r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \varphi}, \quad a = -\frac{Gm_1m_2}{2E}, \quad J^2 = \frac{Gm_1^2m_2^2}{m_1 + m_2}a(1 - e^2)$$

Układ podwójny jako źródło fali grawitacyjnej. Orbita eliptyczna

- W układzie środka masy układu dwóch mas m_1 , m_2 o energii E i momencie pędu J

$$\vec{r}_1 = -\frac{\mu}{m_1}\vec{r}_{12}, \quad \vec{r}_2 = \frac{\mu}{m_2}\vec{r}_{12}, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

$$r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \varphi}, \quad a = -\frac{Gm_1m_2}{2E}, \quad J^2 = \frac{Gm_1^2m_2^2}{m_1 + m_2}a(1 - e^2)$$

$$I_{11} = \alpha \frac{\cos^2 \varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2}$$

$$I_{12} = \alpha \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2}$$

$$I_{22} = \alpha \frac{\sin^2 \varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2}, \quad \alpha = \mu a^2 (1 - e^2)^2$$

Orbita eliptyczna

- Przy różniczkowaniu należy pamiętać, że $J = \mu\dot{\varphi}r_{12}^2$

$$\dot{\varphi} = \frac{J(1 + e \cos \varphi)^2}{\mu a^2 (1 - e^2)^2} = \beta (1 + e \cos \varphi)^2$$

- Przy różniczkowaniu należy pamiętać, że $J = \mu\dot{\varphi}r_{12}^2$

$$\dot{\varphi} = \frac{J(1 + e \cos \varphi)^2}{\mu a^2 (1 - e^2)^2} = \beta(1 + e \cos \varphi)^2$$

- Ostatecznie

$$\ddot{I}_{11} = \frac{1}{2}\alpha\beta^3(1 + e \cos \varphi)^2[8 \sin 2\varphi + e(5 \sin \varphi + 3 \sin 3\varphi)]$$

$$\ddot{I}_{12} = -\frac{1}{2}\alpha\beta^3(1 + e \cos \varphi)^2[8 \cos 2\varphi + e(5 \cos \varphi + 3 \cos 3\varphi)]$$

$$\ddot{I}_{22} = -\frac{1}{2}\alpha\beta^3(1 + e \cos \varphi)^2[8 \sin 2\varphi + e(5 \sin \varphi + 3 \sin 3\varphi)]$$

- Przy różniczkowaniu należy pamiętać, że $J = \mu\dot{\varphi}r_{12}^2$

$$\dot{\varphi} = \frac{J(1 + e \cos \varphi)^2}{\mu a^2 (1 - e^2)^2} = \beta(1 + e \cos \varphi)^2$$

- Ostatecznie

$$\ddot{I}_{11} = \frac{1}{2}\alpha\beta^3(1 + e \cos \varphi)^2[8 \sin 2\varphi + e(5 \sin \varphi + 3 \sin 3\varphi)]$$

$$\ddot{I}_{12} = -\frac{1}{2}\alpha\beta^3(1 + e \cos \varphi)^2[8 \cos 2\varphi + e(5 \cos \varphi + 3 \cos 3\varphi)]$$

$$\ddot{I}_{22} = -\frac{1}{2}\alpha\beta^3(1 + e \cos \varphi)^2[8 \sin 2\varphi + e(5 \sin \varphi + 3 \sin 3\varphi)]$$

- Moc promieniowania $L_{GW} = \frac{G}{5c^5} \langle \ddot{I}^{kl} \ddot{I}_{kl} \rangle = \frac{2G}{5c^5} \frac{1}{4} \alpha^2 \beta^6 \langle \ell(\varphi) \rangle$

- Przy różniczkowaniu należy pamiętać, że $J = \mu \dot{\varphi} r_{12}^2$

$$\dot{\varphi} = \frac{J(1 + e \cos \varphi)^2}{\mu a^2 (1 - e^2)^2} = \beta (1 + e \cos \varphi)^2$$

- Ostatecznie

$$\ddot{I}_{11} = \frac{1}{2} \alpha \beta^3 (1 + e \cos \varphi)^2 [8 \sin 2\varphi + e(5 \sin \varphi + 3 \sin 3\varphi)]$$

$$\ddot{I}_{12} = -\frac{1}{2} \alpha \beta^3 (1 + e \cos \varphi)^2 [8 \cos 2\varphi + e(5 \cos \varphi + 3 \cos 3\varphi)]$$

$$\ddot{I}_{22} = -\frac{1}{2} \alpha \beta^3 (1 + e \cos \varphi)^2 [8 \sin 2\varphi + e(5 \sin \varphi + 3 \sin 3\varphi)]$$

- Moc promieniowania $L_{GW} = \frac{G}{5c^5} \langle \ddot{I}^{kl} \ddot{I}_{kl} \rangle = \frac{2G}{5c^5} \frac{1}{4} \alpha^2 \beta^6 \langle \ell(\varphi) \rangle$
gdzie uśrednienie po okresie ma postać

$$\langle \ell(\varphi) \rangle = \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ell(\varphi) (1 + e \cos \varphi)^{-2} d\varphi = \frac{4\pi}{3} (96 + 292e^2 + 37e^4)$$

Utrata energii i momentu pędu przez układ podwójny

- Utrata energii

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{32}{5} \frac{G^4}{(ca)^5} m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2) f(e) = -\frac{32}{5} \frac{G^4}{(ca)^5} \mu^2 M^3 f(e)$$

- Utrata energii

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{32}{5} \frac{G^4}{(ca)^5} m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2) f(e) = -\frac{32}{5} \frac{G^4}{(ca)^5} \mu^2 M^3 f(e)$$

- Utrata momentu pędu

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{32}{5} \frac{G^{7/2}}{c^5 a^{7/2}} m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)^{1/2} g(e) = -\frac{32}{5} \frac{G^{7/2}}{c^5 a^{7/2}} \mu^2 M^{3/2} g(e)$$

- Utrata energii

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{32}{5} \frac{G^4}{(ca)^5} m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2) f(e) = -\frac{32}{5} \frac{G^4}{(ca)^5} \mu^2 M^3 f(e)$$

- Utrata momentu pędu

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{32}{5} \frac{G^{7/2}}{c^5 a^{7/2}} m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)^{1/2} g(e) = -\frac{32}{5} \frac{G^{7/2}}{c^5 a^{7/2}} \mu^2 M^{3/2} g(e)$$

$$f(e) = (1 - e^2)^{-7/2} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right), \quad g(e) = (1 - e^2)^{-2} \left(1 + \frac{7}{8} e^2 \right)$$

Mody harmoniczne promieniowania układu podwójnego

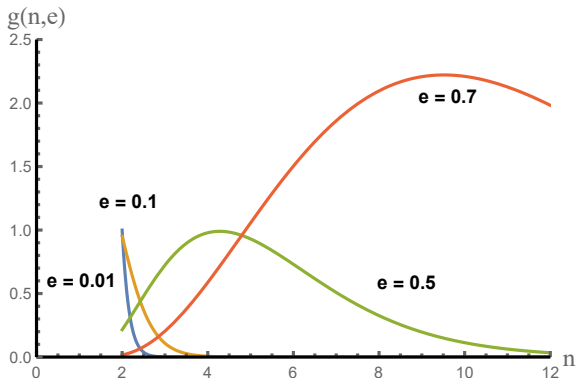
$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_n = \frac{32}{5} \frac{G^4}{(ca)^5} \mu^2 M^3 g(n, e)$$

gdzie pierwsza częstość harmoniczna $\omega_0^2 = \frac{GM}{a^3}$ oraz $\omega_n = n\omega_0$

Mody harmoniczne promieniowania układu podwójnego

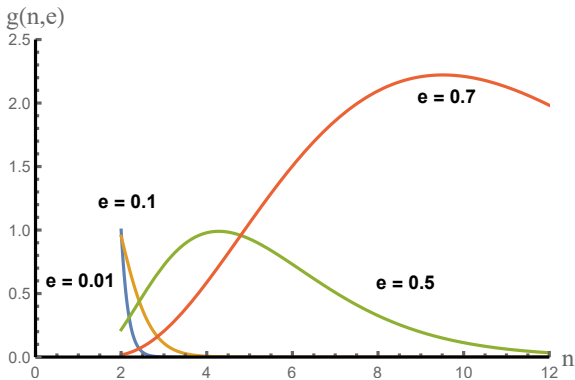
$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_n = \frac{32}{5} \frac{G^4}{(ca)^5} \mu^2 M^3 g(n, e)$$

gdzie pierwsza częstość harmoniczna $\omega_0^2 = \frac{GM}{a^3}$ oraz $\omega_n = n\omega_0$



$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_n = \frac{32}{5} \frac{G^4}{(ca)^5} \mu^2 M^3 g(n, e)$$

gdzie pierwsza częstość harmoniczna $\omega_0^2 = \frac{GM}{a^3}$ oraz $\omega_n = n\omega_0$



$g(n, e)$ są znane analitycznie i wyrażają się przez funkcje Bessela

Zmiana parametrów orbity

- Półoś wielka a i mimośród e

$$a = -\frac{Gm_1m_2}{2E}, \quad J^2 = \frac{Gm_1^2m_2^2}{m_1 + m_2}a(1 - e^2)$$

Zmiana parametrów orbity

- Pół wielka a i mimośród e

$$a = -\frac{Gm_1m_2}{2E}, \quad J^2 = \frac{Gm_1^2m_2^2}{m_1+m_2}a(1-e^2)$$

- Zatem

$$\frac{da}{dt} = \frac{Gm_1m_2}{2E^2} \frac{dE}{dt} = -\frac{64}{5} \frac{G^3}{c^5a^3} m_1m_2(m_1+m_2)f(e) = -\frac{64}{5} \frac{G^3}{c^5a^3} \mu M^2 f(e)$$

Zmiana parametrów orbity

- Półos wielka a i mimośród e

$$a = -\frac{Gm_1m_2}{2E}, \quad J^2 = \frac{Gm_1^2m_2^2}{m_1+m_2}a(1-e^2)$$

- Zatem

$$\frac{da}{dt} = \frac{Gm_1m_2}{2E^2} \frac{dE}{dt} = -\frac{64}{5} \frac{G^3}{c^5a^3} m_1m_2(m_1+m_2)f(e) = -\frac{64}{5} \frac{G^3}{c^5a^3} \mu M^2 f(e)$$

$$2J \frac{dJ}{dt} = \frac{Gm_1^2m_2^2}{m_1+m_2} \left[\frac{da}{dt}(1-e^2) - 2ea \frac{de}{dt} \right]$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{304}{15} \frac{G^3}{c^5a^4} m_1m_2(m_1+m_2)k(e) = -\frac{304}{15} \frac{G^3}{c^5a^4} \mu M^2 k(e)$$

$$k(e) = \frac{e}{(1-e^2)^{5/2}} \left(1 + \frac{121}{304} e^2 \right)$$

Zmiana parametrów orbity

- Półos wielka a i mimośród e

$$a = -\frac{Gm_1m_2}{2E}, \quad J^2 = \frac{Gm_1^2m_2^2}{m_1 + m_2}a(1 - e^2)$$

- Zatem

$$\frac{da}{dt} = \frac{Gm_1m_2}{2E^2} \frac{dE}{dt} = -\frac{64}{5} \frac{G^3}{c^5a^3} m_1m_2(m_1 + m_2)f(e) = -\frac{64}{5} \frac{G^3}{c^5a^3} \mu M^2 f(e)$$

$$2J \frac{dJ}{dt} = \frac{Gm_1^2m_2^2}{m_1 + m_2} \left[\frac{da}{dt}(1 - e^2) - 2ea \frac{de}{dt} \right]$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{304}{15} \frac{G^3}{c^5a^4} m_1m_2(m_1 + m_2)k(e) = -\frac{304}{15} \frac{G^3}{c^5a^4} \mu M^2 k(e)$$

$$k(e) = \frac{e}{(1 - e^2)^{5/2}} \left(1 + \frac{121}{304} e^2 \right)$$

- Orbita kołowa pozostaje kołowa!

Zmiana parametrów orbity

- Półosć wielka a i mimośród e

$$a = -\frac{Gm_1m_2}{2E}, \quad J^2 = \frac{Gm_1^2m_2^2}{m_1+m_2}a(1-e^2)$$

- Zatem

$$\frac{da}{dt} = \frac{Gm_1m_2}{2E^2} \frac{dE}{dt} = -\frac{64}{5} \frac{G^3}{c^5a^3} m_1m_2(m_1+m_2)f(e) = -\frac{64}{5} \frac{G^3}{c^5a^3} \mu M^2 f(e)$$

$$2J \frac{dJ}{dt} = \frac{Gm_1^2m_2^2}{m_1+m_2} \left[\frac{da}{dt}(1-e^2) - 2ea \frac{de}{dt} \right]$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{304}{15} \frac{G^3}{c^5a^4} m_1m_2(m_1+m_2)k(e) = -\frac{304}{15} \frac{G^3}{c^5a^4} \mu M^2 k(e)$$

$$k(e) = \frac{e}{(1-e^2)^{5/2}} \left(1 + \frac{121}{304} e^2 \right)$$

- Orbita kołowa pozostaje kołowa!
- Dla $e \neq 0$, $\frac{de}{dt} < 0$, zatem orbita ewoluuje w kierunku orbity o mniejszym mimośrodku!

Zmiana czasu obiegu

- Na mocy III prawa Keplera

$$a^3 = \frac{G(m_1 + m_2)}{(2\pi)^2} T^2$$

mamy

$$\frac{\dot{T}}{T} = \frac{3}{2} \frac{\dot{a}}{a}$$

- Na mocy III prawa Keplera

$$a^3 = \frac{G(m_1 + m_2)}{(2\pi)^2} T^2$$

mamy

$$\frac{\dot{T}}{T} = \frac{3}{2} \frac{\dot{a}}{a}$$

$$\frac{\dot{T}}{T} = -\frac{96}{5} \frac{(GM)^{5/3}}{c^5} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^{8/3} f(e),$$

$$M = (m_1 m_2)^{3/5} (m_1 + m_2)^{-1/5} = \mu^{3/5} M^{2/5}$$

- Na mocy III prawa Keplera

$$a^3 = \frac{G(m_1 + m_2)}{(2\pi)^2} T^2$$

mamy

$$\frac{\dot{T}}{T} = \frac{3}{2} \frac{\dot{a}}{a}$$

$$\frac{\dot{T}}{T} = -\frac{96}{5} \frac{(GM)^{5/3}}{c^5} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^{8/3} f(e),$$

$$M = (m_1 m_2)^{3/5} (m_1 + m_2)^{-1/5} = \mu^{3/5} M^{2/5}$$

- Dla układu podwójnego gwiazd neutronowych PSR1913+16 (Hulse i Taylor)

$$m_1 = 1.4411(7) M_{\odot}, \quad m_2 = 1.3873(7) M_{\odot},$$

$$T = 0.322997462736(7) \text{ dnia}, \quad e = 0.6171308(4)$$

$$\frac{\dot{T}}{T} = -2.40243(5) \cdot 10^{-12} \text{ s}^{-1}$$

Czas do połączenia się obiektów

- Niech początkowy okres obiegu wynosi T_0

$$\int_{T_0}^0 T^{5/3} dT = -\frac{95}{5} (2\pi)^{8/3} \frac{(GM)^{5/3}}{c^5} \int_0^{t_c} f(e(t)) dt$$

- Niech początkowy okres obiegu wynosi T_0

$$\int_{T_0}^0 T^{5/3} dT = -\frac{95}{5} (2\pi)^{8/3} \frac{(GM)^{5/3}}{c^5} \int_0^{t_c} f(e(t)) dt$$

- Dla orbit kołowych $f(0) = 1$, czas do połączenia t_c określony jest jako

$$t_c = \frac{5}{256} \left(\frac{T_0}{2\pi} \right)^{8/3} \frac{c^5}{(GM)^{5/3}}$$

- Niech początkowy okres obiegu wynosi T_0

$$\int_{T_0}^0 T^{5/3} dT = -\frac{95}{5} (2\pi)^{8/3} \frac{(GM)^{5/3}}{c^5} \int_0^{t_c} f(e(t)) dt$$

- Dla orbit kołowych $f(0) = 1$, czas do połączenia t_c określony jest jako

$$t_c = \frac{5}{256} \left(\frac{T_0}{2\pi} \right)^{8/3} \frac{c^5}{(GM)^{5/3}}$$

- Ewolucja okresu

$$T(t) = 16\pi \left[\frac{1}{5} \frac{(GM)^{5/3}}{c^5} (t_c - t) \right]^{3/8}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi}{T(t)} = \frac{1}{8} \left[\frac{1}{5} \frac{(GM)^{5/3}}{c^5} (t_c - t) \right]^{-3/8}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi}{T(t)} = \frac{1}{8} \left[\frac{1}{5} \frac{(GM)^{5/3}}{c^5} (t_c - t) \right]^{-3/8}$$

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{1}{8} \frac{(5c^5)^{3/8}}{(GM)^{5/8}} \int_0^t (t_c - t')^{-3/8} dt' \\ &= \frac{1}{5} \frac{(5c^5)^{3/8}}{(GM)^{5/8}} [t_c^{5/8} - (t_c - t)^{5/8}] \end{aligned}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi}{T(t)} = \frac{1}{8} \left[\frac{1}{5} \frac{(GM)^{5/3}}{c^5} (t_c - t) \right]^{-3/8}$$

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{1}{8} \frac{(5c^5)^{3/8}}{(GM)^{5/8}} \int_0^t (t_c - t')^{-3/8} dt' \\ &= \frac{1}{5} \frac{(5c^5)^{3/8}}{(GM)^{5/8}} [t_c^{5/8} - (t_c - t)^{5/8}] \end{aligned}$$

Oznaczając

$$\varphi_c = \varphi(t_c) = \frac{1}{5} \frac{(5c^5)^{3/8}}{(GM)^{5/8}} t_c^{5/8}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi}{T(t)} = \frac{1}{8} \left[\frac{1}{5} \frac{(GM)^{5/3}}{c^5} (t_c - t) \right]^{-3/8}$$

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{1}{8} \frac{(5c^5)^{3/8}}{(GM)^{5/8}} \int_0^t (t_c - t')^{-3/8} dt' \\ &= \frac{1}{5} \frac{(5c^5)^{3/8}}{(GM)^{5/8}} [t_c^{5/8} - (t_c - t)^{5/8}] \end{aligned}$$

Oznaczając

$$\varphi_c = \varphi(t_c) = \frac{1}{5} \frac{(5c^5)^{3/8}}{(GM)^{5/8}} t_c^{5/8}$$

$$\varphi(t) = \varphi_c - \left[\frac{1}{5} \frac{c^3}{GM} (t_c - t) \right]^{5/8}$$

Zmiany w kształcie fali grawitacyjnej

$$h_{ij}^{\text{TT}} = \frac{2G}{c^4 r} \frac{G\mu M}{a(1-e^2)} [B_e(\varphi)]_{ij}$$

$B_e(\varphi)$ — macierz zależna od fazy i mimośrod

$$h_{ij}^{\text{TT}} = \frac{2G}{c^4 r} \frac{G\mu M}{a(1-e^2)} [B_e(\varphi)]_{ij}$$

$B_e(\varphi)$ — macierz zależna od fazy i mimośrod

- Dla orbity kołowej i polaryzacji plus, w kierunku osi Z prostopadłej do płaszczyzny orbity układu

$$h_+(t) = \frac{2G}{c^4 r} \frac{G\mu M}{(GM)^{1/3}} \left(\frac{2\pi}{T(t')} \right)^{2/3} \cos 2\varphi(t')$$

$$h_+(t) = \frac{2(GM)^{5/3}}{c^4 r} \left(\frac{2\pi}{T(t')} \right)^{2/3} \cos 2\varphi(t'),$$

$$T(t) = 16\pi \left[\frac{1}{5} \frac{(GM)^{5/3}}{c^5} (t_c - t) \right]^{3/8}$$

$$h_+(t) = \frac{1}{2r} \left(\frac{GM}{c^2} \right)^{5/4} \left(\frac{5}{c(t_c - t')} \right)^{1/4} \cos 2\varphi(t')$$

gdzie $t' = t - r/c$ jest czasem retardowanym!

Chirp signal

- Sygnał grawitacyjny od układu podwójnego (w kierunku osi Z)

$$h_+(t) = \mathcal{A}_+(t_c - t') \cos 2\varphi(t_c - t'), \quad t' = t - \frac{r}{c}$$

$$h_\times(t) = \mathcal{A}_\times(t_c - t') \sin 2\varphi(t_c - t')$$

gdzie

$$\mathcal{A}(t_c - t') = \frac{1}{2r} \left(\frac{GM}{c^2} \right)^{5/4} \left(\frac{5}{c(t_c - t')} \right)^{1/4}$$

$$\varphi(t_c - t') = \varphi_c - \left[\frac{1}{5} \frac{c^3}{GM} (t_c - t') \right]^{5/8}$$

Ewolucja częstości fali grawitacyjnej

$$f_{\text{GW}} = \frac{2}{T(t)} = \frac{1}{8} \left[\frac{5c^5}{(GM)^{5/3}} \frac{1}{t_c - t} \right]^{3/8}$$

$$f_{\text{GW}} = \frac{2}{T(t)} = \frac{1}{8} \left[\frac{5c^5}{(GM)^{5/3}} \frac{1}{t_c - t} \right]^{3/8}$$

$$t_c - t = 2.18 \text{ s} \left(\frac{1.21 M_{\odot}}{M} \right)^{5/3} \left(\frac{100 \text{ Hz}}{f_{\text{GW}}} \right)^{8/3}$$

$$f_{\text{GW}} = \frac{2}{T(t)} = \frac{1}{8} \left[\frac{5c^5}{(GM)^{5/3}} \frac{1}{t_c - t} \right]^{3/8}$$

$$t_c - t = 2.18 \text{ s} \left(\frac{1.21 M_{\odot}}{\mathbb{M}} \right)^{5/3} \left(\frac{100 \text{ Hz}}{f_{\text{GW}}} \right)^{8/3}$$

Dla $m_1 = m_2 = 1.4 M_{\odot}$, chirp mass $\mathbb{M} = 1.21 M_{\odot}$

$$f_{\text{GW}} = \frac{2}{T(t)} = \frac{1}{8} \left[\frac{5c^5}{(GM)^{5/3}} \frac{1}{t_c - t} \right]^{3/8}$$

$$t_c - t = 2.18 \text{ s} \left(\frac{1.21 M_{\odot}}{\mathbb{M}} \right)^{5/3} \left(\frac{100 \text{ Hz}}{f_{\text{GW}}} \right)^{8/3}$$

Dla $m_1 = m_2 = 1.4 M_{\odot}$, chirp mass $\mathbb{M} = 1.21 M_{\odot}$

	10 Hz	100 Hz	1 kHz
$t_c - t$	17 min	2 s	3 ms

Częstość obciążenia

- według OTW w czasoprzestrzeni Schwarzschilda nie ma stabilnych orbit (dla ciał masywnych) wewnątrz obszaru o radialnej współrzędnej

$$r < 3R_S = \frac{6Gm}{c^2}$$

- według OTW w czasoprzestrzeni Schwarzschilda nie ma stabilnych orbit (dla ciał masywnych) wewnątrz obszaru o radialnej współrzędnej

$$r < 3R_S = \frac{6Gm}{c^2}$$

- kończy się faza orbitowania ciał, zaczyna się zderzenie i połączenie

- według OTW w czasoprzestrzeni Schwarzschilda nie ma stabilnych orbit (dla ciał masywnych) wewnątrz obszaru o radialnej współrzędnej

$$r < 3R_S = \frac{6Gm}{c^2}$$

- kończy się faza orbitowania ciał, zaczyna się zderzenie i połączenie
- można oszacować (z III prawa Keplera) częstość, przy której sygnał grawitacyjny zmieni swój charakter

$$\omega_{\text{cut}} = \frac{1}{6\sqrt{6}} \frac{c^3}{Gm}$$

- według OTW w czasoprzestrzeni Schwarzschilda nie ma stabilnych orbit (dla ciał masywnych) wewnątrz obszaru o radialnej współrzędnej

$$r < 3R_S = \frac{6Gm}{c^2}$$

- kończy się faza orbitowania ciał, zaczyna się zderzenie i połączenie
- można oszacować (z III prawa Keplera) częstość, przy której sygnał grawitacyjny zmieni swój charakter

$$\omega_{\text{cut}} = \frac{1}{6\sqrt{6}} \frac{c^3}{Gm}$$

- szacunkowe wartości częstotliwości obciążenia

	NS–NS	BH–BH gwiazdowe	BH–BH supermas.
f_{cut} [Hz]	800	200	\sim mHz

Charakterystyka widmowa promieniowania grawitacyjnego

Charakterystyka widmowa promieniowania grawitacyjnego

- Transformata Fouriera zaburzeń czasoprzestrzeni $h_{+,\times}(t)$

$$\hat{h}_{+,\times}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} h_{+,\times}(t) e^{-i\omega t} dt$$

Charakterystyka widmowa promieniowania grawitacyjnego

- Transformata Fouriera zaburzeń czasoprzestrzeni $h_{+,\times}(t)$

$$\hat{h}_{+,\times}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} h_{+,\times}(t) e^{-i\omega t} dt$$

- odwrotna transformata Fouriera

$$h_{+,\times}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{h}_{+,\times}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Charakterystyka widmowa promieniowania grawitacyjnego

- Transformata Fouriera zaburzeń czasoprzestrzeni $h_{+,\times}(t)$

$$\hat{h}_{+,\times}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} h_{+,\times}(t) e^{-i\omega t} dt$$

- odwrotna transformata Fouriera

$$h_{+,\times}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{h}_{+,\times}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

- strumień energii w jednostce czasu

$$\frac{dE}{dt dS} = \frac{c^3}{16\pi G} \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle$$

Charakterystyka widmowa promieniowania grawitacyjnego

- Transformata Fouriera zaburzeń czasoprzestrzeni $h_{+,\times}(t)$

$$\hat{h}_{+,\times}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} h_{+,\times}(t) e^{-i\omega t} dt$$

- odwrotna transformata Fouriera

$$h_{+,\times}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{h}_{+,\times}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

- strumień energii w jednostce czasu

$$\frac{dE}{dt dS} = \frac{c^3}{16\pi G} \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle$$

- strumień energii

$$\frac{dE}{dS} = \frac{c^3}{16\pi G} \int_{\mathbb{R}} (\dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2) dt$$

Charakterystyka widmowa energii

- mamy

$$\dot{h}_{+,\times}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} i\omega \hat{h}_{+,\times}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

- mamy

$$\dot{h}_{+, \times}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} i\omega \hat{h}_{+, \times}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

- w konsekwencji

$$\frac{dE}{dS} = \frac{c^3}{32\pi^2 G} \int_{\mathbb{R}} \omega^2 (|\hat{h}_+(\omega)|^2 + |\hat{h}_\times(\omega)|^2) d\omega$$

- mamy

$$\dot{h}_{+, \times}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} i\omega \hat{h}_{+, \times}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

- w konsekwencji

$$\frac{dE}{dS} = \frac{c^3}{32\pi^2 G} \int_{\mathbb{R}} \omega^2 (|\hat{h}_+(\omega)|^2 + |\hat{h}_\times(\omega)|^2) d\omega$$

- stąd odczytujemy charakterystykę widmową energii

$$\frac{dE}{d\omega} = \frac{c^3 r^2}{32\pi^2 G} \int_{\text{sfera}} \omega^2 (|\hat{h}_+(\omega, \Omega)|^2 + |\hat{h}_\times(\omega, \Omega)|^2) d\Omega$$

Charakterystyka widmowa energii dla układu podwójnego

Charakterystyka widmowa energii dla układu podwójnego

- Sygnał grawitacyjny od układu podwójnego (w kierunku osi Z)

$$h_+(t) = \mathcal{A}_+(t_c - t') \cos 2\varphi(t_c - t'), \quad t' = t - \frac{r}{c}$$

$$h_\times(t) = \mathcal{A}_\times(t_c - t') \sin 2\varphi(t_c - t')$$

gdzie

$$\mathcal{A}(t_c - t') = \frac{1}{2r} \left(\frac{GM}{c^2} \right)^{5/4} \left(\frac{5}{c(t_c - t')} \right)^{1/4}$$

$$\varphi(t_c - t') = \varphi_c - \left[\frac{1}{5} \frac{c^3}{GM} (t_c - t') \right]^{5/8}$$

Charakterystyka widmowa energii dla układu podwójnego

- Sygnał grawitacyjny od układu podwójnego (w kierunku osi Z)

$$h_+(t) = \mathcal{A}_+(t_c - t') \cos 2\varphi(t_c - t'), \quad t' = t - \frac{r}{c}$$

$$h_\times(t) = \mathcal{A}_\times(t_c - t') \sin 2\varphi(t_c - t')$$

gdzie

$$\mathcal{A}(t_c - t') = \frac{1}{2r} \left(\frac{\text{GM}}{c^2} \right)^{5/4} \left(\frac{5}{c(t_c - t')} \right)^{1/4}$$

$$\varphi(t_c - t') = \varphi_c - \left[\frac{1}{5} \frac{c^3}{\text{GM}} (t_c - t') \right]^{5/8}$$

- Dla polaryzacji plus mamy

$$\begin{aligned} \hat{h}_+(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{A}(t_c - t') \cos \Phi(t_c - t') e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} e^{-i\omega r/c} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{A}(t_c - t') (e^{i\Phi(t_c - t')} + e^{-i\Phi(t_c - t')}) e^{-i\omega t'} dt' \end{aligned}$$

Charakterystyka widmowa energii dla układu podwójnego

Charakterystyka widmowa energii dla układu podwójnego

- Całkę określającą $\hat{h}_+(\omega)$ można oszacować przyjmując dwa założenia
 - 1 funkcja $\mathcal{A}(t_c - t')$ jest wolnozmienna w czasie,

Charakterystyka widmowa energii dla układu podwójnego

- Całkę określającą $\hat{h}_+(\omega)$ można oszacować przyjmując dwa założenia
 - 1 funkcja $\mathcal{A}(t_c - t')$ jest wolnozmienna w czasie,
 - 2 można stosować przybliżenie/metodę punktu stacjonarnego

Charakterystyka widmowa energii dla układu podwójnego

- Całkę określającą $\hat{h}_+(\omega)$ można oszacować przyjmując dwa założenia
 - 1 funkcja $\mathcal{A}(t_c - t')$ jest wolnozmienna w czasie,
 - 2 można stosować przybliżenie/metodę punktu stacjonarnego
- Przy tych założeniach otrzymamy przybliżoną postać transformaty

$$\hat{h}_+(\omega) \simeq \frac{1}{2} e^{-i\psi_+} \mathcal{A}(t_c - t'_*) \left(\frac{2\pi}{\ddot{\Phi}(t_c - t'_*)} \right)^{1/2}$$

gdzie t'_* jest rozwiązaniem równania $\dot{\Phi} = \omega$

$$t_c - t'_* = \frac{5c^5}{(GM)^{5/3}} (4\omega)^{-8/3}$$

oraz $\psi_+ = \omega r/c + \omega t'_* - \Phi(t_c - t'_*) - \pi/4$.

Charakterystyka widmowa energii

- Ostatecznie

$$\hat{h}_+(\omega) \simeq \frac{2}{r} e^{-i\psi_+} \left(\frac{10\pi}{3}\right)^{1/2} \frac{(GM)^{5/6}}{c^{3/2}} (4\omega)^{-7/6}$$

- Ostatecznie

$$\hat{h}_+(\omega) \simeq \frac{2}{r} e^{-i\psi_+} \left(\frac{10\pi}{3}\right)^{1/2} \frac{(GM)^{5/6}}{c^{3/2}} (4\omega)^{-7/6}$$

- wyrażenie opisujące $\hat{h}_\times(\omega)$ różni się tylko fazą ψ_\times (które i tak są nieistotne!)

- Ostatecznie

$$\hat{h}_+(\omega) \simeq \frac{2}{r} e^{-i\psi_+} \left(\frac{10\pi}{3}\right)^{1/2} \frac{(GM)^{5/6}}{c^{3/2}} (4\omega)^{-7/6}$$

- wyrażenie opisujące $\hat{h}_\times(\omega)$ różni się tylko fazą ψ_\times (które i tak są nieistotne!)
- uzupełniając \hat{h}_+ oraz \hat{h}_\times o zależność od kierunku i całkując po kątach otrzymamy

- Ostatecznie

$$\hat{h}_+(\omega) \simeq \frac{2}{r} e^{-i\psi_+} \left(\frac{10\pi}{3}\right)^{1/2} \frac{(GM)^{5/6}}{c^{3/2}} (4\omega)^{-7/6}$$

- wyrażenie opisujące $\hat{h}_\times(\omega)$ różni się tylko fazą ψ_\times (które i tak są nieistotne!)
- uzupełniając \hat{h}_+ oraz \hat{h}_\times o zależność od kierunku i całkując po kątach otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{dE}{d\omega} &= \frac{c^3 r^2}{32\pi^2 G} \omega^2 \int_{\text{sfera}} (|\hat{h}_+(\omega, \Omega)|^2 + |\hat{h}_\times(\omega, \Omega)|^2) d\Omega \\ &\simeq \frac{(GM)^{5/3}}{3G} (4\omega)^{-1/3} \end{aligned}$$

Zakresy częstotliwości

Zakresy częstotliwości

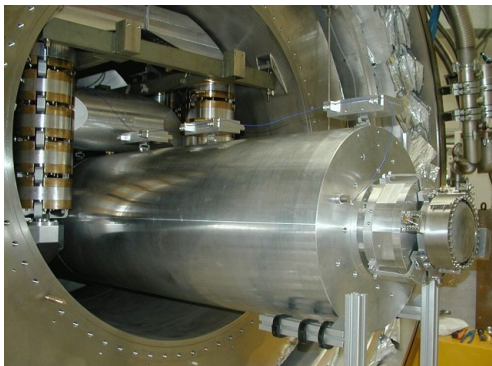
zakres częstotliwości	typowe źródła
bardzo niski 1 nHz–1mHz	– supermasywne układy BH–BH ($> 10^6 M_{\odot}$) – tło grawitacyjne
niski 1 mHz–1 Hz	– supermasywne układy BH–BH ($10^3 - 10^6 M_{\odot}$) – układy WD–WD – układy podwójne o dużym stosunku masy – obracające się gwiazdy z niesymetrycznym rozkładem masy
wysoki 1 Hz–10 kHz	– gwiazdowe układy BH–BH – układy podwójne NS–NS – pulsary z niesymetrycznym rozkładem masy

Detektory rezonansowe

nazwa	lokalizacja	budowa
Allegro	Baton Rouge, USA	działający do 2008 roku aluminiowy walec typu Webera, chłodzony, $f = 904$ Hz
Auriga	Padwa, Włochy	aluminiowy walec typu Webera, chłodzony
Explorer	Genewa, Szwajcaria	aluminiowy walec typu Webera, chłodzony
Mini GRAIL	Leiden, Holandia	kula ze stopu miedzi i aluminium, $f = 3.25$ kHz

Detektory rezonansowe

nazwa	lokalizacja	budowa
Allegro	Baton Rouge, USA	działający do 2008 roku aluminiowy walec typu Webera, chłodzony, $f = 904$ Hz
Auriga	Padwa, Włochy	aluminiowy walec typu Webera, chłodzony
Explorer	Genewa, Szwajcaria	aluminiowy walec typu Webera, chłodzony
Mini GRAIL	Leiden, Holandia	kula ze stopu miedzi i aluminium, $f = 3.25$ kHz



- Allegro — 2300 kg of aluminum, 3 meters in length. Suspended in a cryogenic vacuum tank at 4.2 Kelvin, the bar's natural resonant frequency (the lowest longitudinal mode) is near 904 Hz. The strain on the bar is measured by coupling a second, much lighter, suspended mass to the main heavier mass as a mechanical transformer at the same resonant frequency. Therefore, small motions of the primary mass generate much larger motions in the smaller mass.

- Allegro — 2300 kg of aluminum, 3 meters in length. Suspended in a cryogenic vacuum tank at 4.2 Kelvin, the bar's natural resonant frequency (the lowest longitudinal mode) is near 904 Hz. The strain on the bar is measured by coupling a second, much lighter, suspended mass to the main heavier mass as a mechanical transformer at the same resonant frequency. Therefore, small motions of the primary mass generate much larger motions in the smaller mass.
- AURIGA — is the Antenna Ultracriogenica Risonante per l'Indagine Gravitazionale Astronomica. The detector consists of an aluminum cylinder 3 meters in length and weighing approximately 2.3 tons. The whole apparatus is cooled to a few thousandths of a degree above absolute zero to minimize the effect of thermal vibrations of its atoms.

- Allegro — 2300 kg of aluminum, 3 meters in length. Suspended in a cryogenic vacuum tank at 4.2 Kelvin, the bar's natural resonant frequency (the lowest longitudinal mode) is near 904 Hz. The strain on the bar is measured by coupling a second, much lighter, suspended mass to the main heavier mass as a mechanical transformer at the same resonant frequency. Therefore, small motions of the primary mass generate much larger motions in the smaller mass.
- AURIGA — is the Antenna Ultracriogenica Risonante per l'Indagine Gravitazionale Astronomica. The detector consists of an aluminum cylinder 3 meters in length and weighing approximately 2.3 tons. The whole apparatus is cooled to a few thousandths of a degree above absolute zero to minimize the effect of thermal vibrations of its atoms.
- The antenna EXPLORER (installed at CERN Laboratories in Geneva) is a cylinder of Aluminium, it weights 2300 kg, it is 3 m long and it has a diameter of 60 cm. It is cooled at the temperature of liquid helium (4.2 K) and it operates at the temperature of 2 K, which is reached by lowering the pressure on the liquid helium reservoir. Its resonance frequencies are around 906 and 923 Hz.

- MiniGRAIL — When gravitation waves pass through the MiniGRAIL ball, it will vibrate with displacements on the order of 10^{-20} m. To improve sensitivity, the detector was intended to operate at a temperature of 20 mK. The original antenna for the MiniGRAIL detector was a 68 cm diameter sphere made of an alloy of copper with 6% aluminium. This sphere had a mass of 1,150 kg and resonated at a frequency of 3,250 Hz. It was isolated from vibration by seven 140 kg masses. The bandwidth of the detector was expected to be ± 230 Hz.

Uproszczona teoria detektorów rezonansowych

- Załóżmy, że fala grawitacyjna jest opisana funkcją $h_+(t)$ i rozchodzi się w kierunku Z

- Załóżmy, że fala grawitacyjna jest opisana funkcją $h_+(t)$ i rozchodzi się w kierunku Z
- W walcu o osi w kierunku X , długości l i masie $2m$ fala grawitacyjna wzbudza drgania w kierunku X

- Załóżmy, że fala grawitacyjna jest opisana funkcją $h_+(t)$ i rozchodzi się w kierunku Z
- W walcu o osi w kierunku X , długości l i masie $2m$ fala grawitacyjna wzbudza drgania w kierunku X
- Walec modelujemy dwoma kulami o masach m połączonych sprężyną o stałej sprężystości k

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = -R_{0101}l \quad (1)$$

gdzie

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}, \quad R_{0101} = -\frac{1}{2}\ddot{h}_+$$

- Załóżmy, że fala grawitacyjna jest opisana funkcją $h_+(t)$ i rozchodzi się w kierunku Z
- W walcu o osi w kierunku X , długości l i masie $2m$ fala grawitacyjna wzbudza drgania w kierunku X
- Walec modelujemy dwoma kulami o masach m połączonych sprężyną o stałej sprężystości k

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = -R_{0101}l \quad (1)$$

gdzie

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}, \quad R_{0101} = -\frac{1}{2}\ddot{h}_+$$

- Z punktu widzenia teorii przetwarzania sygnałów

$$\begin{array}{l} h_+(t) \quad \longmapsto \quad x(t) \\ \text{sygnał graw.} \quad \longmapsto \quad \text{przesunięcie} \end{array}$$

Uproszczona teoria detektorów rezonansowych

- Na poziomie transformaty Fouriera

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{X}(\omega), \quad h_+(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{H}(\omega)$$

- Na poziomie transformaty Fouriera

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{X}(\omega), \quad h_+(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{H}(\omega)$$

$$\hat{X}(\omega) = G(\omega)\hat{H}(\omega)$$

gdzie $G(\omega)$ jest gęstością spektralną, która opisuje własności układu L przetwarzającego sygnał $L : h_+(t) \mapsto x(t)$

- Na poziomie transformaty Fouriera

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{X}(\omega), \quad h_+(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{H}(\omega)$$

$$\hat{X}(\omega) = G(\omega)\hat{H}(\omega)$$

gdzie $G(\omega)$ jest gęstością spektralną, która opisuje własności układu L przetwarzającego sygnał $L : h_+(t) \mapsto x(t)$

- W omawianym przypadku

$$G(\omega) = \frac{l}{2} \frac{\omega^2}{(\omega + i\beta)^2 + \beta^2 - \omega_0^2}$$

- Rozwiązanie szczególne (1) przy periodycznej fali grawitacyjnej $h_+(t) = h \cos \omega t$ jest postaci

$$x(t) = x_{\max} \cos(\omega t + \delta)$$

gdzie

$$x_{\max} = \frac{1}{2} h l \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + 4\omega^2 \beta^2}}, \quad \text{tg } \delta = \frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

- Rozwiązanie szczególne (1) przy periodycznej fali grawitacyjnej $h_+(t) = h \cos \omega t$ jest postaci

$$x(t) = x_{\max} \cos(\omega t + \delta)$$

gdzie

$$x_{\max} = \frac{1}{2} h l \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + 4\omega^2 \beta^2}}, \quad \text{tg } \delta = \frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

- w rezonansie $\omega = \omega_0$, ($h = 10^{-20}$)

$$x_{\text{rez}} = \frac{1}{2} h l Q \sim 1.5 \cdot 10^{-15} \text{ m}, \quad Q = \frac{\omega_0}{2\beta} \sim 10^5$$

gdzie Q jest dobrocią oscylatora.

- Rozwiązanie szczególne (1) przy periodycznej fali grawitacyjnej $h_+(t) = h \cos \omega t$ jest postaci

$$x(t) = x_{\max} \cos(\omega t + \delta)$$

gdzie

$$x_{\max} = \frac{1}{2} h l \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + 4\omega^2 \beta^2}}, \quad \text{tg } \delta = \frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

- w rezonansie $\omega = \omega_0$, ($h = 10^{-20}$)

$$x_{\text{rez}} = \frac{1}{2} h l Q \sim 1.5 \cdot 10^{-15} \text{ m}, \quad Q = \frac{\omega_0}{2\beta} \sim 10^5$$

gdzie Q jest dobrocią oscylatora.

- Energia kinetyczna w warunkach rezonansu

$$\langle E_k \rangle_{\text{rez}} \sim \langle 2m\dot{x}^2 \rangle = m\omega_0^2 x_{\text{rez}}^2$$

Wzmocnienie odczytu przemieszczenia

- Przetwornik mechaniczny drgań — dodatkowa, niewielka masa m_0 sprzężona z walcem. Amplituda drgań masy m_0 jest wzmocniona

$$A_0 \simeq \sqrt{\frac{m}{m_0}} x_{\text{rez}}, \quad \frac{m}{m_0} \sim 10^3.$$

- Przetwornik mechaniczny drgań — dodatkowa, niewielka masa m_0 sprzężona z walcem. Amplituda drgań masy m_0 jest wzmocniona

$$A_0 \simeq \sqrt{\frac{m}{m_0}} x_{\text{rez}}, \quad \frac{m}{m_0} \sim 10^3.$$

- Wzmocnione drgania masy m_0 są dalej przetwarzane na zmiany pola elektromagnetycznego, które są odczytywane jako sygnał elektryczny.

- Zanieczyszczenie sygnału wejściowego przez stochastyczny czynnik wprowadzany przez układ przetwarzający L o znanej gęstości spektralnej

$$n(t) \longmapsto \xi(t)$$

szum \longmapsto dodatkowe przesunięcie

- Zanieczyszczenie sygnału wejściowego przez stochastyczny czynnik wprowadzany przez układ przetwarzający L o znanej gęstości spektralnej

$$n(t) \longmapsto \xi(t)$$

szum \longmapsto dodatkowe przesunięcie

- Na poziomie transformaty Fouriera

$$n(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{N}(\omega), \quad \xi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{\xi}(\omega)$$

$$\hat{\xi}(\omega) = G(\omega)\hat{N}(\omega)$$

- Zanieczyszczenie sygnału wejściowego przez stochastyczny czynnik wprowadzany przez układ przetwarzający L o znanej gęstości spektralnej

$$n(t) \longmapsto \xi(t)$$

szum \longmapsto dodatkowe przesunięcie

- Na poziomie transformaty Fouriera

$$n(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{N}(\omega), \quad \xi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{\xi}(\omega)$$

$$\hat{\xi}(\omega) = G(\omega)\hat{N}(\omega)$$

- Spektralna gęstość szumu $S_n(\omega)$ ($[s] = [\text{Hz}^{-1}]$)

$$A(t-t') = \langle n(t)n(t') \rangle, \quad A(\tau) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2}S_n(\omega)$$

gdzie $A(\tau)$ jest funkcją autokorelacji szumu.

- Zanieczyszczenie sygnału wejściowego przez stochastyczny czynnik wprowadzany przez układ przetwarzający L o znanej gęstości spektralnej

$$n(t) \longmapsto \xi(t)$$

szum \longmapsto dodatkowe przesunięcie

- Na poziomie transformaty Fouriera

$$n(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{N}(\omega), \quad \xi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{\xi}(\omega)$$

$$\hat{\xi}(\omega) = G(\omega)\hat{N}(\omega)$$

- Spektralna gęstość szumu $S_n(\omega)$ ($[S] = [\text{Hz}^{-1}]$)

$$A(t-t') = \langle n(t)n(t') \rangle, \quad A(\tau) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2}S_n(\omega)$$

gdzie $A(\tau)$ jest funkcją autokorelacji szumu.

- Wówczas

$$\langle \hat{N}(\omega)\hat{N}^*(\omega') \rangle = \pi S_n(\omega)\delta(\omega - \omega')$$

Gęstość spektralna szumu

- Z drugiej strony

$$4\pi \langle (n(t))^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\infty} \text{Re } S_n(\omega) d\omega$$

- Z drugiej strony

$$4\pi \langle (n(t))^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\infty} \text{Re } S_n(\omega) d\omega$$

- Z uwagi na $\hat{\xi}(\omega) = G(\omega)\hat{N}(\omega)$ oraz

$$\langle \hat{N}(\omega)\hat{N}^*(\omega') \rangle = \pi S_n(\omega)\delta(\omega - \omega')$$

mamy

- Z drugiej strony

$$4\pi \langle (n(t))^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\infty} \text{Re } S_n(\omega) d\omega$$

- Z uwagi na $\widehat{\xi}(\omega) = G(\omega)\widehat{N}(\omega)$ oraz

$$\langle \widehat{N}(\omega)\widehat{N}^*(\omega') \rangle = \pi S_n(\omega)\delta(\omega - \omega')$$

mamy

$$\langle \widehat{\xi}(\omega)\widehat{\xi}^*(\omega') \rangle = G(\omega)G^*(\omega')\langle \widehat{N}(\omega)\widehat{N}^*(\omega') \rangle$$

- Z drugiej strony

$$4\pi \langle (n(t))^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\infty} \text{Re } S_n(\omega) d\omega$$

- Z uwagi na $\hat{\xi}(\omega) = G(\omega)\hat{N}(\omega)$ oraz

$$\langle \hat{N}(\omega)\hat{N}^*(\omega') \rangle = \pi S_n(\omega)\delta(\omega - \omega')$$

mamy

$$\langle \hat{\xi}(\omega)\hat{\xi}^*(\omega') \rangle = G(\omega)G^*(\omega')\langle \hat{N}(\omega)\hat{N}^*(\omega') \rangle$$

- w konsekwencji

$$S_{\xi}(\omega) = |G(\omega)|^2 S_n(\omega)$$

- Stochastyczna siła $F(t)$ działa na jedną z mas m

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

- Stochastyczna siła $F(t)$ działa na jedną z mas m

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

- $F(t)$ ma funkcję korelacyjną szumu termicznego, jeśli

$$\langle F(t)F(t') \rangle = m\beta kT \delta(t - t')$$

- Stochastyczna siła $F(t)$ działa na jedną z mas m

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

- $F(t)$ ma funkcję korelacyjną szumu termicznego, jeśli

$$\langle F(t)F(t') \rangle = m\beta kT \delta(t - t')$$

- Gęstość spektralna szumu termicznego ma postać

$$S_F(\omega) = 2m\beta kT$$

- Szum siły objawia się jako szum w dodatkowym przesunięciu $\xi(t)$ jako

$$S_{\xi}(\omega) = |Z(\omega)|^2 S_F, \quad Z(\omega) = \frac{\hat{x}(\omega)}{\hat{F}(\omega)}$$

gdzie

$$|Z(\omega)|^2 = \frac{1}{m^2} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0)^2 + 4\beta^2 \omega^2}$$

- Szum siły objawia się jako szum w dodatkowym przesunięciu $\xi(t)$ jako

$$S_{\xi}(\omega) = |Z(\omega)|^2 S_F, \quad Z(\omega) = \frac{\hat{x}(\omega)}{\hat{F}(\omega)}$$

gdzie

$$|Z(\omega)|^2 = \frac{1}{m^2} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0)^2 + 4\beta^2 \omega^2}$$

- Ponieważ $S_{\xi}(\omega) = |G(\omega)|^2 S_n(\omega)$, to

$$S_n(\omega) = \frac{8\beta kT}{ml^2 \omega^4}$$

Detektory rezonansowe. Podsumowanie

- Inne źródła szumów

- Inne źródła szumów
 - szum związany ze sprzężeniem małej masy
 - szum przetwornika szczytującego niewielkie drgania i zmieniającego go na prąd
 - szумы innych układów elektronicznych

- Inne źródła szumów
 - szum związany ze sprzężeniem małej masy
 - szum przetwornika szczytującego niewielkie drgania i zmieniającego go na prąd
 - szумы innych układów elektronicznych
- Spektralna gęstość szumu jest na poziomie

$$S_n^{1/2} = 10^{-21} \text{ Hz}^{-1/2}$$

i nie przekracza

$$S_n^{1/2} < 4 \cdot 10^{-21} \text{ Hz}^{-1/2}$$

w przedziale ± 100 Hz wokół rezonansu $f_0 = 930$ Hz

- Inne źródła szumów
 - szum związany ze sprzężeniem małej masy
 - szum przetwornika szczytującego niewielkie drgania i zmieniającego go na prąd
 - szумы innych układów elektronicznych
- Spektralna gęstość szumu jest na poziomie

$$S_n^{1/2} = 10^{-21} \text{ Hz}^{-1/2}$$

i nie przekracza

$$S_n^{1/2} < 4 \cdot 10^{-21} \text{ Hz}^{-1/2}$$

w przedziale ± 100 Hz wokół rezonansu $f_0 = 930$ Hz

- czułość ta pozwala wykryć błyski promieniowania grawitacyjnego o energii $10^{-2} M_{\odot} c^2$ odpowiadające $h \sim 2 \cdot 10^{-21}$ (NS-NS merging) na częstotliwości 1 kHz i czasie trwania 1 ms z naszej Galaktyki

- Inne źródła szumów
 - szum związany ze sprzężeniem małej masy
 - szum przetwornika szczytującego niewielkie drgania i zmieniającego go na prąd
 - szумы innych układów elektronicznych
- Spektralna gęstość szumu jest na poziomie

$$S_n^{1/2} = 10^{-21} \text{ Hz}^{-1/2}$$

i nie przekracza

$$S_n^{1/2} < 4 \cdot 10^{-21} \text{ Hz}^{-1/2}$$

w przedziale ± 100 Hz wokół rezonansu $f_0 = 930$ Hz

- czułość ta pozwala wykryć błyski promieniowania grawitacyjnego o energii $10^{-2} M_{\odot} c^2$ odpowiadające $h \sim 2 \cdot 10^{-21}$ (NS-NS merging) na częstotliwości 1 kHz i czasie trwania 1 ms z naszej Galaktyki
- czułość ta pozwala zaobserwować periodyczny sygnał z obracającej się NS z ok. 3 kpc

Detektory rezonansowe. Podsumowanie

- obecnie nie da się zaobserwować ostatnich etapów ewolucji BH–BH z uwagi na częstotliwość obciążenia w okolicach 200-500 Hz w zależności od masy gwiazdowych BH, co jest poza zakresem czułości detektorów rezonansowych

- obecnie nie da się zaobserwować ostatnich etapów ewolucji BH–BH z uwagi na częstotliwość obcięcia w okolicach 200-500 Hz w zależności od masy gwiazdowych BH, co jest poza zakresem czułości detektorów rezonansowych
- spektralna gęstość szumu dla detektora kulistego miniGrail jest na poziomie

$$S_n^{1/2} \sim 10^{-20} \text{ Hz}^{-1/2}$$

ale planowana ma być na poziomie 10^{-22} – $10^{-23} \text{ Hz}^{-1/2}$.

Detektory interferometryczne

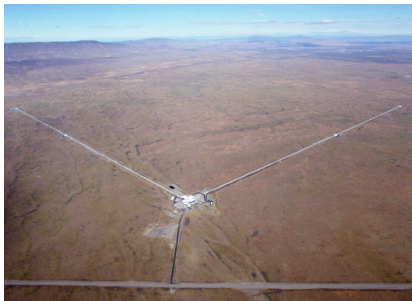
nazwa	lokalizacja	budowa
LIGO	Hanford & Livingston, USA	Interferometr Michelsona (4 km + 2 km) z wnękami Fabry-Perota i recyklingiem energii
Virgo	Piza, Włochy	Interferometr Michelsona (3 km + 3 km) z wnękami Fabry-Perota i recyklingiem energii
GEO 600	Hannover, Niemcy	Interferometr Michelsona (600 m + 600 m) z podwójnym recyklingiem energii
TAMA 300	Tokyo, Japonia	do 2008 roku Interferometr Michelsona (600 m + 600 m) z podwójnym recyklingiem energii
CLIO	Kamioka, Japonia	Interferometr Michelsona (100 m + 100 m) z chłodzonymi lustrami, podziemny

Detektory interferometryczne II i III generacji

Detektory interferometryczne II i III generacji

nazwa	lokalizacja	budowa
aLIGO	Hanford & Livingston, USA	oba ramiona 4 km i podwójny recykling energii
advance Virgo	Piza, Włochy	podwójny recykling energii
KAGRA	Kamioka, Japonia	Interferometr Michelsona (3 km + 3 km) z chłodzonymi lustrami, podziemny
LISA, TianQin, DECIGO	kosmiczne	planowane na lata 20-te i 30-te

<https://www.ligo.caltech.edu/page/about>

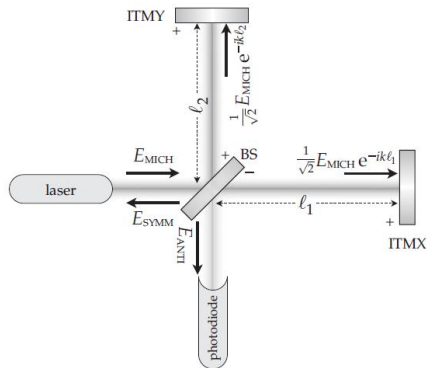


(Hanford, Washington)

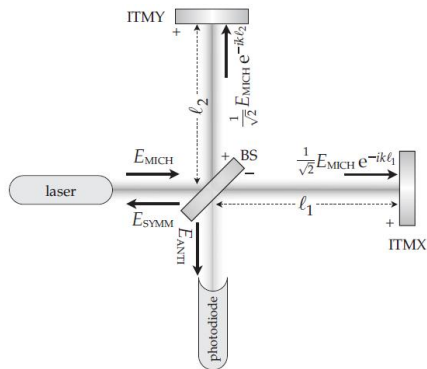


(Livingstone, Louisiana)

Interferometr Michelsona



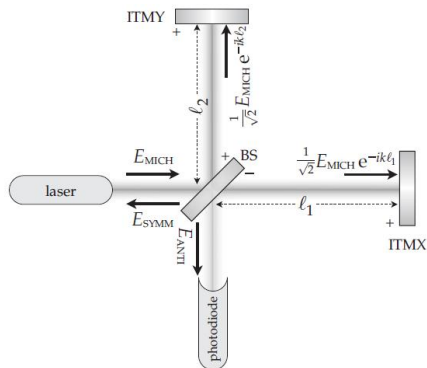
Interferometr Michelsona



$$E_{sym} = \frac{E_0}{2} [r_2 e^{-2ikl_2} + r_1 e^{-2ikl_1}] e^{i\omega t},$$

$$E_{niesym} = \frac{E_0}{2} [r_2 e^{-2ikl_2} - r_1 e^{-2ikl_1}] e^{i\omega t}$$

Interferometr Michelsona



$$E_{\text{sym}} = \frac{E_0}{2} [r_2 e^{-2ikl_2} + r_1 e^{-2ikl_1}] e^{i\omega t},$$

$$E_{\text{niesym}} = \frac{E_0}{2} [r_2 e^{-2ikl_2} - r_1 e^{-2ikl_1}] e^{i\omega t}$$

- Dobieramy l_1 oraz l_2 tak, aby w kierunku fotodiody nie biegły fotony (interferencja destruktywna)

- Fale i błyski grawitacyjne powodują względne zaburzenia czasoprzestrzeni na poziomie

$$h \lesssim 10^{-21}$$

- Fale i błyski grawitacyjne powodują względne zaburzenia czasoprzestrzeni na poziomie

$$h \lesssim 10^{-21}$$

- Deformacje względne, które można wykryć interferometrycznie

$$h \sim \frac{\Delta l}{l}$$

- Fale i błyski grawitacyjne powodują względne zaburzenia czasoprzestrzeni na poziomie

$$h \lesssim 10^{-21}$$

- Deformacje względne, które można wykryć interferometrycznie

$$h \sim \frac{\Delta l}{l}$$

- zmiana długości ramion $\Delta l = \Delta l_1 - \Delta l_2 \sim \lambda_{\text{laser}} \sim 1 \mu\text{m}$

$$h \sim \frac{\Delta l}{l} \sim \frac{\lambda_{\text{laser}}}{l} \sim \frac{10^{-6} \text{ m}}{10^3 \text{ m}} \sim 10^{-9}$$

- Fale i błyski grawitacyjne powodują względne zaburzenia czasoprzestrzeni na poziomie

$$h \lesssim 10^{-21}$$

- Deformacje względne, które można wykryć interferometrycznie

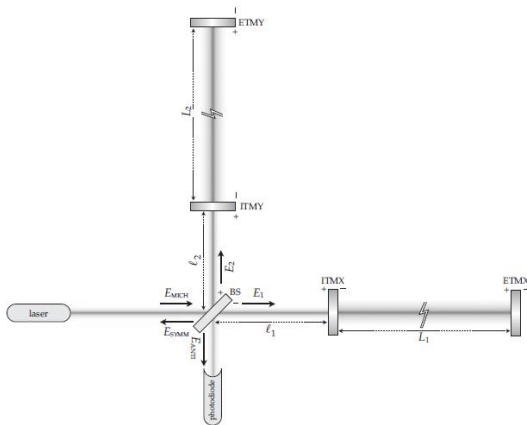
$$h \sim \frac{\Delta l}{l}$$

- zmiana długości ramion $\Delta l = \Delta l_1 - \Delta l_2 \sim \lambda_{\text{laser}} \sim 1 \mu\text{m}$

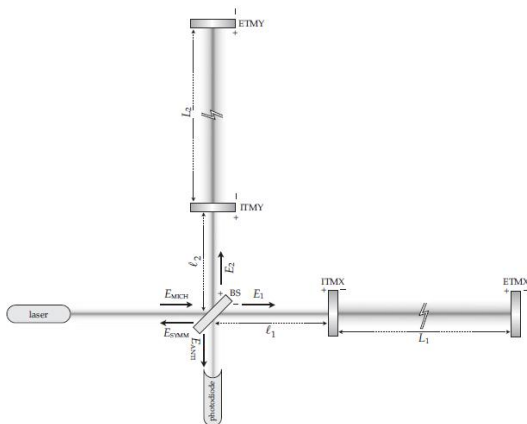
$$h \sim \frac{\Delta l}{l} \sim \frac{\lambda_{\text{laser}}}{l} \sim \frac{10^{-6} \text{ m}}{10^3 \text{ m}} \sim 10^{-9}$$

- Możemy zmniejszać Δl lub zwiększać l

Interferometr Michelsona z wnęką Fabry-Perota



Interferometr Michelsona z wnęką Fabry-Perota



- efektywna droga promieniowania $l \sim \lambda_{\text{GW}} \sim c/f_{\text{GW}} \sim 1000 \text{ km}$

$$h \sim \frac{\Delta l}{l} \sim \frac{\lambda_{\text{laser}}}{\lambda_{\text{GW}}} \sim \frac{10^{-6} \text{ m}}{10^6 \text{ m}} \sim 10^{-12}$$

Szum liczby fotonów

- Jaką zmianę światła może zarejestrować fotodioda?

- Jaką zmianę światła może zarejestrować fotodioda?
- Niech τ będzie czasem zbierania światła, N liczbą fotonów, szum (dyspersja) w liczbie fotonów $\sim \sqrt{N}$ (statystyka Poissona)

Szum liczby fotonów

- Jaką zmianę światła może zarejestrować fotodioda?
- Niech τ będzie czasem zbierania światła, N liczbą fotonów, szum (dyspersja) w liczbie fotonów $\sim \sqrt{N}$ (statystyka Poissona)
- możliwa do wykrycia ilość światła odpowiada

$$\Delta l \sim \frac{1}{\sqrt{N}} \lambda_{\text{laser}}$$

- Jaką zmianę światła może zarejestrować fotodioda?
- Niech τ będzie czasem zbierania światła, N liczbą fotonów, szum (dyspersja) w liczbie fotonów $\sim \sqrt{N}$ (statystyka Poissona)
- możliwa do wykrycia ilość światła odpowiada

$$\Delta l \sim \frac{1}{\sqrt{N}} \lambda_{\text{laser}}$$

- czas integracji fotonów $\tau \sim 1/f_{\text{GW}}$

Szum liczby fotonów

- Jaką zmianę światła może zarejestrować fotodioda?
- Niech τ będzie czasem zbierania światła, N liczbą fotonów, szum (dyspersja) w liczbie fotonów $\sim \sqrt{N}$ (statystyka Poissona)
- możliwa do wykrycia ilość światła odpowiada

$$\Delta l \sim \frac{1}{\sqrt{N}} \lambda_{\text{laser}}$$

- czas integracji fotonów $\tau \sim 1/f_{\text{GW}}$
- Liczba fotonów

$$N = \frac{P_{\text{laser}} \tau}{E_{\text{foton}}} = \frac{P_{\text{laser}}}{\hbar c / \lambda_{\text{laser}}} \frac{1}{f_{\text{GW}}}$$

Szum liczby fotonów

- Jaką zmianę światła może zarejestrować fotodioda?
- Niech τ będzie czasem zbierania światła, N liczbą fotonów, szum (dyspersja) w liczbie fotonów $\sim \sqrt{N}$ (statystyka Poissona)
- możliwa do wykrycia ilość światła odpowiada

$$\Delta l \sim \frac{1}{\sqrt{N}} \lambda_{\text{laser}}$$

- czas integracji fotonów $\tau \sim 1/f_{\text{GW}}$
- Liczba fotonów

$$N = \frac{P_{\text{laser}} \tau}{E_{\text{foton}}} = \frac{P_{\text{laser}}}{\hbar c / \lambda_{\text{laser}}} \frac{1}{f_{\text{GW}}}$$

- Przykład: dla $P_{\text{laser}} = 1 \text{ W}$, $\lambda_{\text{laser}} = 1 \mu\text{m}$, $f_{\text{GW}} = 300 \text{ Hz}$, dostajemy $N \sim 10^{16}$

Szum liczby fotonów

- Dla danych z Przykładu

$$h \sim \frac{\Delta l}{l} \sim \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\lambda_{\text{laser}}}{\lambda_{\text{GW}}} \sim 10^{-8} \cdot 10^{-12} = 10^{-20}$$

- Dla danych z Przykładu

$$h \sim \frac{\Delta l}{l} \sim \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\lambda_{\text{laser}}}{\lambda_{\text{GW}}} \sim 10^{-8} \cdot 10^{-12} = 10^{-20}$$

- Zwiększanie mocy promieniowania
 - laser większej mocy dla sygnału wejściowego

- Dla danych z Przykładu

$$h \sim \frac{\Delta l}{l} \sim \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\lambda_{\text{laser}}}{\lambda_{\text{GW}}} \sim 10^{-8} \cdot 10^{-12} = 10^{-20}$$

- Zwiększanie mocy promieniowania
 - laser większej mocy dla sygnału wejściowego
 - układ odzyskiwania energii

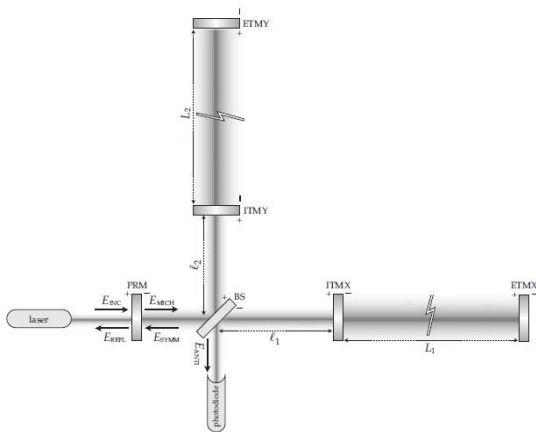
- Dla danych z Przykładu

$$h \sim \frac{\Delta l}{l} \sim \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\lambda_{\text{laser}}}{\lambda_{\text{GW}}} \sim 10^{-8} \cdot 10^{-12} = 10^{-20}$$

- Zwiększanie mocy promieniowania
 - laser większej mocy dla sygnału wejściowego
 - układ odzyskiwania energii
 - (planowany) układ odzyskiwania sygnału

Interferometr z układem odzyskiwania energii

Interferometr z układem odzyskiwania energii



Opis interferometru i jego oddziaływania z falą grawitacyjną

Opis interferometru i jego oddziaływania z falą grawitacyjną

- Klasyczna optyka wykorzystująca współczynniki odbicia luster, współczynniki transmisji i odbicia dla wnek (w szczególności relacje Stokesa), BS (beam splitter)

Opis interferometru i jego oddziaływania z falą grawitacyjną

- Klasyczna optyka wykorzystująca współczynniki odbicia luster, współczynniki transmisji i odbicia dla wnek (w szczególności relacje Stokesa), BS (beam splitter)
- Opis w układzie laboratoryjnym: czasoprzestrzeń jest płaska, a wskutek przejścia fali grawitacyjnej zmieniają się współrzędne elementów optycznych i odległości, jakie światło ma do przebycia

Opis interferometru i jego oddziaływania z falą grawitacyjną

- Klasyczna optyka wykorzystująca współczynniki odbicia luster, współczynniki transmisji i odbicia dla wnek (w szczególności relacje Stokesa), BS (beam splitter)
- Opis w układzie laboratoryjnym: czasoprzestrzeń jest płaska, a wskutek przejścia fali grawitacyjnej zmieniają się współrzędne elementów optycznych i odległości, jakie światło ma do przebycia
- Opis w zmiennych cechowania TT: układ, w którym pozycje (współrzędne) elementów optycznych nie zmieniają się, a fala świetlna odczuwa zmiany pola grawitacyjnego na skutek zaburzenia metryki

Oddziaływanie fali grawitacyjnej na układ pomiarowy

- Dla fali o polaryzacji $h_+(t)$ rozchodzącej się w kierunku osi Z OTW wynika metryka w zmiennych cechowania TT postaci

$$dl^2 = c^2 dt^2 - (1 + h_+(t))dx^2 - (1 - h_+(t))dy^2 - dz^2$$

Oddziaływanie fali grawitacyjnej na układ pomiarowy

- Dla fali o polaryzacji $h_+(t)$ rozchodzącej się w kierunku osi Z OTW wynika metryka w zmiennych cechowania TT postaci

$$dl^2 = c^2 dt^2 - (1 + h_+(t))dx^2 - (1 - h_+(t))dy^2 - dz^2$$

- zatem odległości w kierunkach X i Y są wyznaczone przez

$$dx = \pm \left(1 - \frac{1}{2}h_+(t)\right)cdt, \quad dy = \pm \left(1 + \frac{1}{2}h_+(t)\right)cdt$$

Oddziaływanie fali grawitacyjnej na układ pomiarowy

- Dla fali o polaryzacji $h_+(t)$ rozchodzącej się w kierunku osi Z OTW wynika metryka w zmiennych cechowania TT postaci

$$dl^2 = c^2 dt^2 - (1 + h_+(t))dx^2 - (1 - h_+(t))dy^2 - dz^2$$

- zatem odległości w kierunkach X i Y są wyznaczone przez

$$dx = \pm \left(1 - \frac{1}{2}h_+(t)\right)cdt, \quad dy = \pm \left(1 + \frac{1}{2}h_+(t)\right)cdt$$

- światło biegnące w kierunku X od BS (w chwili t_0) do lustra

$$l_1 = c(t_1 - t_0) - \frac{c}{2} \int_{t_0}^{t_1} h_+(t)dt$$

Oddziaływanie fali grawitacyjnej na układ pomiarowy

- Dla fali o polaryzacji $h_+(t)$ rozchodzącej się w kierunku osi Z OTW wynika metryka w zmiennych cechowania TT postaci

$$dl^2 = c^2 dt^2 - (1 + h_+(t))dx^2 - (1 - h_+(t))dy^2 - dz^2$$

- zatem odległości w kierunkach X i Y są wyznaczone przez

$$dx = \pm \left(1 - \frac{1}{2}h_+(t)\right)cdt, \quad dy = \pm \left(1 + \frac{1}{2}h_+(t)\right)cdt$$

- światło biegnące w kierunku X od BS (w chwili t_0) do lustra

$$l_1 = c(t_1 - t_0) - \frac{c}{2} \int_{t_0}^{t_1} h_+(t)dt$$

- światło biegnące w kierunku X od lustra (w chwili t_1) do BS

$$l_1 = c(t'_1 - t_1) - \frac{c}{2} \int_{t_1}^{t'_1} h_+(t)dt$$

Oddziaływanie fali grawitacyjnej na układ pomiarowy

- Ostatecznie dodając powyższe równania

$$t'_1 - t_0 = \frac{2l_1}{c} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t'_1} h_+(t) dt$$

- Ostatecznie dodając powyższe równania

$$t'_1 - t_0 = \frac{2l_1}{c} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t'_1} h_+(t) dt$$

- Niech $h_+(t) = h_0 \cos(\omega_{\text{gw}} t)$

$$t'_1 - t_0 = \frac{2l_1}{c} + \frac{h_0}{2\omega_{\text{gw}}} [\sin(\omega_{\text{gw}} t'_1) - \sin(\omega_{\text{gw}} t_0)]$$

- Ostatecznie dodając powyższe równania

$$t'_1 - t_0 = \frac{2l_1}{c} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t'_1} h_+(t) dt$$

- Niech $h_+(t) = h_0 \cos(\omega_{\text{gw}} t)$

$$t'_1 - t_0 = \frac{2l_1}{c} + \frac{h_0}{2\omega_{\text{gw}}} [\sin(\omega_{\text{gw}} t'_1) - \sin(\omega_{\text{gw}} t_0)]$$

- z uwagi na przybliżoną relację $t'_1 = t_0 + 2l_1/c + o(h_0)$, mamy

$$t'_1 - t_0 = \frac{2l_1}{c} + \frac{l_1 h_0}{c} \text{sinc}(\omega_{\text{gw}} l_1 / c) \cos(\omega_{\text{gw}} (t_0 + l_1 / c))$$

- Ostatecznie dodając powyższe równania

$$t'_1 - t_0 = \frac{2l_1}{c} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t'_1} h_+(t) dt$$

- Niech $h_+(t) = h_0 \cos(\omega_{\text{gw}} t)$

$$t'_1 - t_0 = \frac{2l_1}{c} + \frac{h_0}{2\omega_{\text{gw}}} [\sin(\omega_{\text{gw}} t'_1) - \sin(\omega_{\text{gw}} t_0)]$$

- z uwagi na przybliżoną relację $t'_1 = t_0 + 2l_1/c + o(h_0)$, mamy

$$t'_1 - t_0 = \frac{2l_1}{c} + \frac{l_1 h_0}{c} \text{sinc}(\omega_{\text{gw}} l_1/c) \cos(\omega_{\text{gw}}(t_0 + l_1/c))$$

- Podobnie dla światła biegnącego w kierunku Y

$$t'_2 - t_0 = \frac{2l_2}{c} + \frac{l_2 h_0}{c} \text{sinc}(\omega_{\text{gw}} l_2/c) \cos(\omega_{\text{gw}}(t_0 + l_2/c))$$

Przesunięcie fazy w wyniku przejścia fali

Przesunięcie fazy w wyniku przejścia fali

- Ostatecznie, na BS interferują fale, które opuściły go w chwilach t_0^x oraz t_0^y

$$t_0^x = t - \frac{2l_1}{c} - \frac{l_1}{c}h_+(t - l_1/c)\text{sinc}(\omega_{\text{gw}}l_1/c)$$
$$t_0^y = t - \frac{2l_2}{c} + \frac{l_2}{c}h_+(t - l_2/c)\text{sinc}(\omega_{\text{gw}}l_2/c)$$

Przesunięcie fazy w wyniku przejścia fali

- Ostatecznie, na BS interferują fale, które opuściły go w chwilach t_0^x oraz t_0^y

$$t_0^x = t - \frac{2l_1}{c} - \frac{l_1}{c}h_+(t - l_1/c)\text{sinc}(\omega_{\text{gw}}l_1/c)$$
$$t_0^y = t - \frac{2l_2}{c} + \frac{l_2}{c}h_+(t - l_2/c)\text{sinc}(\omega_{\text{gw}}l_2/c)$$

- Fale na BS biegnące w kierunku fotodiody (fazy ulegają zmianie tylko przy odbiciach/transmisji przez elementy optyczne)

$$E^x(t) = -\frac{1}{2}E_0e^{-i\omega t_0^x} = -\frac{1}{2}E_0e^{-i\omega(t-2l_1/c)+i\Delta\phi_x}$$
$$E^y(t) = \frac{1}{2}E_0e^{-i\omega t_0^y} = \frac{1}{2}E_0e^{-i\omega(t-2l_2/c)+i\Delta\phi_y}$$

Przesunięcie fazy w wyniku przejścia fali

- Ostatecznie, na BS interferują fale, które opuściły go w chwilach t_0^x oraz t_0^y

$$t_0^x = t - \frac{2l_1}{c} - \frac{l_1}{c} h_+ (t - l_1/c) \text{sinc}(\omega_{\text{gw}} l_1/c)$$

$$t_0^y = t - \frac{2l_2}{c} + \frac{l_2}{c} h_+ (t - l_2/c) \text{sinc}(\omega_{\text{gw}} l_2/c)$$

- Fale na BS biegnące w kierunku fotodiody (fazy ulegają zmianie tylko przy odbiciach/transmisji przez elementy optyczne)

$$E^x(t) = -\frac{1}{2} E_0 e^{-i\omega t_0^x} = -\frac{1}{2} E_0 e^{-i\omega(t-2l_1/c) + i\Delta\phi_x}$$

$$E^y(t) = \frac{1}{2} E_0 e^{-i\omega t_0^y} = \frac{1}{2} E_0 e^{-i\omega(t-2l_2/c) + i\Delta\phi_y}$$

gdzie

$$\Delta\phi_x = \frac{h_0 \omega l_1}{c} \text{sinc}(\omega_{\text{gw}} l_1/c) \cos(\omega_{\text{gw}}(t - l_1/c))$$

$$\Delta\phi_y = -\frac{h_0 \omega l_2}{c} \text{sinc}(\omega_{\text{gw}} l_2/c) \cos(\omega_{\text{gw}}(t - l_2/c))$$

Interferencja promieni biegnących w stronę fotodiody

- W najprostszej sytuacji, gdy $l_1 \simeq l_2 \equiv l$, $\Delta\phi_y = -\Delta\phi_x$

- W najprostszej sytuacji, gdy $l_1 \simeq l_2 \equiv l$, $\Delta\phi_y = -\Delta\phi_x$
- Fale $E^x(t)$ oraz $E^y(t)$ interferują

$$\begin{aligned} E(t) &= E^x(t) + E^y(t) = \frac{1}{2}E_0 e^{-i\omega(t-2l/c)} \left(e^{-\Delta\phi_x} - e^{i\Delta\phi_x} \right) \\ &= -iE_0 e^{-i\omega(t-2l/c)} \sin(\Delta\phi_x) \end{aligned}$$

- W najprostszej sytuacji, gdy $l_1 \simeq l_2 \equiv l$, $\Delta\phi_y = -\Delta\phi_x$
- Fale $E^x(t)$ oraz $E^y(t)$ interferują

$$\begin{aligned} E(t) &= E^x(t) + E^y(t) = \frac{1}{2}E_0e^{-i\omega(t-2l/c)} \left(e^{-\Delta\phi_x} - e^{i\Delta\phi_x} \right) \\ &= -iE_0e^{-i\omega(t-2l/c)} \sin(\Delta\phi_x) \end{aligned}$$

- **Fala grawitacyjna powoduje przesunięcie fazowe fali** na poziomie 10^{-8} rad!

- W najprostszej sytuacji, gdy $l_1 \simeq l_2 \equiv l$, $\Delta\phi_y = -\Delta\phi_x$
- Fale $E^x(t)$ oraz $E^y(t)$ interferują

$$\begin{aligned} E(t) &= E^x(t) + E^y(t) = \frac{1}{2}E_0e^{-i\omega(t-2l/c)}\left(e^{-\Delta\phi_x} - e^{i\Delta\phi_x}\right) \\ &= -iE_0e^{-i\omega(t-2l/c)}\sin(\Delta\phi_x) \end{aligned}$$

- **Fala grawitacyjna powoduje przesunięcie fazowe fali** na poziomie 10^{-8} rad!
- W praktyce, interferometr kalibruje się tak, aby w warunkach normalnej pracy, na fotodiodeę padało jak najmniej fotonów.

- szum sejsmiczny

$$S_n^{1/2}(f) \sim 10^{-12} \left(\frac{10 \text{ Hz}}{f} \right)^2 \text{ Hz}^{-1/2}, \quad f > 10 \text{ Hz}$$

- szum sejsmiczny

$$S_n^{1/2}(f) \sim 10^{-12} \left(\frac{10 \text{ Hz}}{f} \right)^2 \text{ Hz}^{-1/2}, \quad f > 10 \text{ Hz}$$

- Lustra na wahadłach

$$S_n^{1/2}(f) \sim 10^{-12} \left(\frac{f_{\text{wah}}}{f} \right)^2 \left(\frac{10 \text{ Hz}}{f} \right)^2 \text{ Hz}^{-1/2}, \quad f > 10 \text{ Hz}$$

$$f_{\text{wah}} = 0,76 \text{ Hz}$$

- szum sejsmiczny

$$S_n^{1/2}(f) \sim 10^{-12} \left(\frac{10 \text{ Hz}}{f} \right)^2 \text{ Hz}^{-1/2}, \quad f > 10 \text{ Hz}$$

- Lustra na wahadłach

$$S_n^{1/2}(f) \sim 10^{-12} \left(\frac{f_{\text{wah}}}{f} \right)^2 \left(\frac{10 \text{ Hz}}{f} \right)^2 \text{ Hz}^{-1/2}, \quad f > 10 \text{ Hz}$$

$$f_{\text{wah}} = 0,76 \text{ Hz}$$

- Siedmiostopniowy tłumik drgań

$$S_n^{1/2}(f) \sim 10^{-12} \left(\frac{f_{\text{wah}}}{f} \right)^2 \left(\frac{10 \text{ Hz}}{f} \right)^{10} \text{ Hz}^{-1/2}, \quad f > 10 \text{ Hz}$$

- Szum termiczny w temperaturze pokojowej związany ze wzbudzeniami modów wibracyjnych luster

$$S_n^{1/2}(f) \sim 10^{-23} \left(\frac{100 \text{ Hz}}{f} \right)^{1/2} \text{ Hz}^{-1/2},$$

- Szum termiczny w temperaturze pokojowej związany ze wzbudzeniami modów wibracyjnych luster

$$S_n^{1/2}(f) \sim 10^{-23} \left(\frac{100 \text{ Hz}}{f} \right)^{1/2} \text{ Hz}^{-1/2},$$

oraz termiczną rozciągliwością podwieszenia luster

$$S_n^{1/2}(f) \sim 10^{-23} \left(\frac{100 \text{ Hz}}{f} \right)^{5/2} \text{ Hz}^{-1/2},$$

- Szum termiczny w temperaturze pokojowej związany ze wzbudzeniami modów wibracyjnych luster

$$S_n^{1/2}(f) \sim 10^{-23} \left(\frac{100 \text{ Hz}}{f} \right)^{1/2} \text{ Hz}^{-1/2},$$

oraz termiczną rozciągliwością podwieszenia luster

$$S_n^{1/2}(f) \sim 10^{-23} \left(\frac{100 \text{ Hz}}{f} \right)^{5/2} \text{ Hz}^{-1/2},$$

- dyspersja rozkładu fotonów (shot noise)

- Szum termiczny w temperaturze pokojowej związany ze wzbudzeniami modów wibracyjnych lusterek

$$S_n^{1/2}(f) \sim 10^{-23} \left(\frac{100 \text{ Hz}}{f} \right)^{1/2} \text{ Hz}^{-1/2},$$

oraz termiczną rozciągliwością podwieszenia lusterek

$$S_n^{1/2}(f) \sim 10^{-23} \left(\frac{100 \text{ Hz}}{f} \right)^{5/2} \text{ Hz}^{-1/2},$$

- dyspersja rozkładu fotonów (shot noise)
- wahania ciśnienia promieniowania

- Szum termiczny w temperaturze pokojowej związany ze wzbudzeniami modów wibracyjnych luster

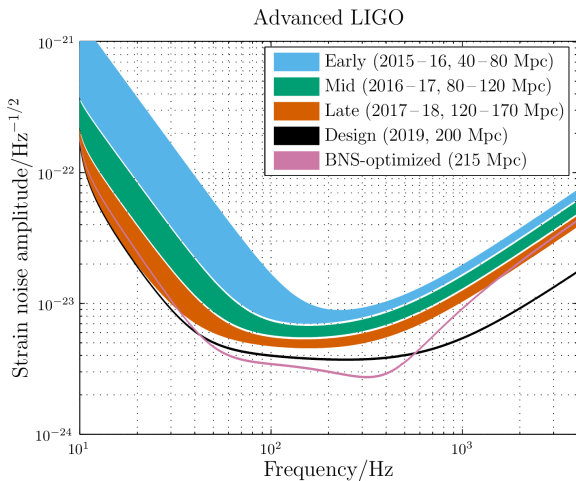
$$S_n^{1/2}(f) \sim 10^{-23} \left(\frac{100 \text{ Hz}}{f} \right)^{1/2} \text{ Hz}^{-1/2},$$

oraz termiczną rozciągliwością podwieszenia luster

$$S_n^{1/2}(f) \sim 10^{-23} \left(\frac{100 \text{ Hz}}{f} \right)^{5/2} \text{ Hz}^{-1/2},$$

- dyspersja rozkładu fotonów (shot noise)
- wahania ciśnienia promieniowania
- zmiany pola grawitacyjnego w okolicy

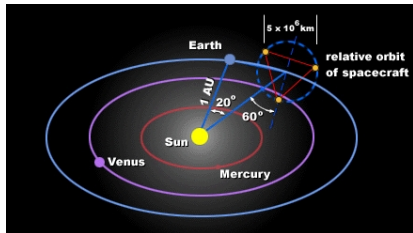
$$S_n^{1/2}(f) \sim 3 \cdot 10^{-23} \left(\frac{10 \text{ Hz}}{f} \right)^2 \text{ Hz}^{-1/2}, \quad f > 10 \text{ Hz}$$



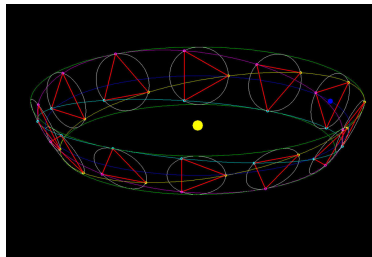
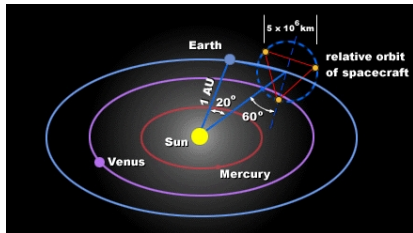
- ulepszona izolacja sejsmiczna
- aktywna izolacja sejsmiczna (sieć czujników z wyprzedzeniem informująca o zbliżających się ruchach gruntu) kompensująca przewidywane drgania
- lepszej jakości elementy optyczne zmniejszające szum termiczny na niskich częstotliwościach, a także umożliwiające zwiększenie mocy lasera
- masywniejsze lustra (dzięki temu mniejszy szum związany z ciśnieniem promieniowania)
- interferometry podziemne (mniejsze zaburzenia sejsmiczne) (Japonia)
- chłodzone lustra (cały układ tłumiący) (Japonia)

- Laser Interferometer Space Antenna (LISA) is a planned NASA/ESA mission to measure gravitational waves through spacecraft tracking using laser interferometry. LISA will consist of a triangular constellation of three spacecraft in heliocentric orbits that trail the Earth's orbit by 20° . The inter-spacecraft distance will be $5 \cdot 10^9$ m, and laser interferometry between pairs of detectors is used to track the inter-spacecraft separations. Contained within each spacecraft will be two proof masses that move along spacetime geodesics (the surrounding spacecraft follow the motion of the proof masses and shield them from external buffeting, e.g. from the solar wind and radiation). LISA will be sensitive to gravitational waves between 0.03 mHz and 0.1 Hz.

- Laser Interferometer Space Antenna (LISA) is a planned NASA/ESA mission to measure gravitational waves through spacecraft tracking using laser interferometry. LISA will consist of a triangular constellation of three spacecraft in heliocentric orbits that trail the Earth's orbit by 20° . The inter-spacecraft distance will be $5 \cdot 10^9$ m, and laser interferometry between pairs of detectors is used to track the inter-spacecraft separations. Contained within each spacecraft will be two proof masses that move along spacetime geodesics (the surrounding spacecraft follow the motion of the proof masses and shield them from external buffeting, e.g. from the solar wind and radiation). LISA will be sensitive to gravitational waves between 0.03 mHz and 0.1 Hz.



- Laser Interferometer Space Antenna (LISA) is a planned NASA/ESA mission to measure gravitational waves through spacecraft tracking using laser interferometry. LISA will consist of a triangular constellation of three spacecraft in heliocentric orbits that trail the Earth's orbit by 20° . The inter-spacecraft distance will be $5 \cdot 10^9$ m, and laser interferometry between pairs of detectors is used to track the inter-spacecraft separations. Contained within each spacecraft will be two proof masses that move along spacetime geodesics (the surrounding spacecraft follow the motion of the proof masses and shield them from external buffeting, e.g. from the solar wind and radiation). LISA will be sensitive to gravitational waves between 0.03 mHz and 0.1 Hz.



Filtr wzmacniający

- Sygnał grawitacyjny $h(t)$ jest efektywnie zaszumiony przez $n(t)$.
Detektor rejestruje sygnał

$$s(t) = h(t) + n(t)$$

- Sygnał grawitacyjny $h(t)$ jest efektywnie zaszumiony przez $n(t)$.
Detektor rejestruje sygnał

$$s(t) = h(t) + n(t)$$

$$\langle n(t) \rangle = 0, \quad \langle N(\omega)N^*(\omega') \rangle = \pi S_n(\omega)\delta(\omega - \omega')$$

- Sygnał grawitacyjny $h(t)$ jest efektywnie zaszumiony przez $n(t)$. Detektor rejestruje sygnał

$$s(t) = h(t) + n(t)$$

$$\langle n(t) \rangle = 0, \quad \langle N(\omega)N^*(\omega') \rangle = \pi S_n(\omega)\delta(\omega - \omega')$$

- szukamy (rzeczywistego) filtru wzmacniającego $k(t)$, takiego aby stosunek sygnału do szumu SNR był maksymalny

$$\text{SNR} := \frac{|\langle x \rangle|}{\sqrt{(\text{Var } x)_{h=0}}},$$

gdzie x jest zmienną losową

$$x = \int_{\mathbb{R}} k(t)s(t)dt, \quad \langle x \rangle = \int_{\mathbb{R}} k(t)h(t)dt$$

Filtr wzmacniający

- Sygnał grawitacyjny $h(t)$ jest efektywnie zaszumiony przez $n(t)$. Detektor rejestruje sygnał

$$s(t) = h(t) + n(t)$$

$$\langle n(t) \rangle = 0, \quad \langle N(\omega)N^*(\omega') \rangle = \pi S_n(\omega)\delta(\omega - \omega')$$

- szukamy (rzeczywistego) filtru wzmacniającego $k(t)$, takiego aby stosunek sygnału do szumu SNR był maksymalny

$$\text{SNR} := \frac{|\langle x \rangle|}{\sqrt{(\text{Var } x)_{h=0}}},$$

gdzie x jest zmienną losową

$$x = \int_{\mathbb{R}} k(t)s(t)dt, \quad \langle x \rangle = \int_{\mathbb{R}} k(t)h(t)dt$$

- Na poziomie częstotści

$$|\langle x \rangle|^2 = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \left| \int_{\mathbb{R}} K^*(\omega)H(\omega)d\omega \right|^2 = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 |\langle K|H \rangle|^2$$

Filtrowanie wzmacniające poszukiwany sygnał (matched filtering)

Filtrowanie wzmacniające poszukiwany sygnał (matched filtering)

- Na poziomie częstości

$$\text{Var } x = \langle x^2 \rangle_{h=0} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} S_n(\omega) |K(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{4\pi} \langle S_n^{1/2} K | S_n^{1/2} K \rangle$$

Filtrowanie wzmacniające poszukiwany sygnał (matched filtering)

- Na poziomie częstości

$$\text{Var } x = \langle x^2 \rangle_{h=0} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} S_n(\omega) |K(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{4\pi} \langle S_n^{1/2} K | S_n^{1/2} K \rangle$$

- Stosunek sygnału do szumu można zapisać jako

$$\text{SNR}^2 = \frac{1}{\pi} \frac{|\langle K | H \rangle|^2}{\langle S_n^{1/2} K | S_n^{1/2} K \rangle} = \frac{1}{\pi} \frac{|\langle S_n^{1/2} K | S_n^{-1/2} H \rangle|^2}{|S_n^{1/2} K|^2}$$

Filtrowanie wzmacniające poszukiwany sygnał (matched filtering)

- Na poziomie częstości

$$\text{Var } x = \langle x^2 \rangle_{h=0} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} S_n(\omega) |K(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{4\pi} \langle S_n^{1/2} K | S_n^{1/2} K \rangle$$

- Stosunek sygnału do szumu można zapisać jako

$$\text{SNR}^2 = \frac{1}{\pi} \frac{| \langle K | H \rangle |^2}{\langle S_n^{1/2} K | S_n^{1/2} K \rangle} = \frac{1}{\pi} \frac{| \langle S_n^{1/2} K | S_n^{-1/2} H \rangle |^2}{| S_n^{1/2} K |^2}$$

- Z nierówności Cauchy'ego-Schwartz'a

$$| \langle S_n^{1/2} K | S_n^{-1/2} H \rangle |^2 \leq | \langle S_n^{1/2} K \rangle |^2 | \langle S_n^{-1/2} H \rangle |^2$$

Filtrowanie wzmacniające poszukiwany sygnał (matched filtering)

- Na poziomie częstości

$$\text{Var } x = \langle x^2 \rangle_{h=0} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} S_n(\omega) |K(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{4\pi} \langle S_n^{1/2} K | S_n^{1/2} K \rangle$$

- Stosunek sygnału do szumu można zapisać jako

$$\text{SNR}^2 = \frac{1}{\pi} \frac{|\langle K | H \rangle|^2}{\langle S_n^{1/2} K | S_n^{1/2} K \rangle} = \frac{1}{\pi} \frac{|\langle S_n^{1/2} K | S_n^{-1/2} H \rangle|^2}{|S_n^{1/2} K|^2}$$

- Z nierówności Cauchy'ego-Schwartz'a

$$|\langle S_n^{1/2} K | S_n^{-1/2} H \rangle|^2 \leq |\langle S_n^{1/2} K \rangle|^2 |\langle S_n^{-1/2} H \rangle|^2$$

- Ostatecznie

$$\text{SNR}^2 \leq \frac{1}{\pi} |S_n^{-1/2} H|^2$$

przy czym równość jest osiągnięta przy spełnieniu warunku

$$S_n^{1/2}(\omega) K(\omega) = \alpha S_n^{-1/2}(\omega) H(\omega)$$

Filtrowanie wzmacniające poszukiwany sygnał (matched filtering)

Filtrowanie wzmacniające poszukiwany sygnał (matched filtering)

- Postać $k(t)$ ($\alpha = 2\pi$)

$$k(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{H(\omega)}{S_n(\omega)} e^{i\omega t} d\omega$$

Filtrowanie wzmacniające poszukiwany sygnał (matched filtering)

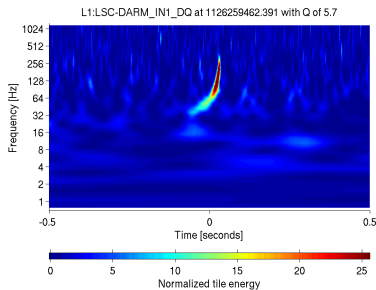
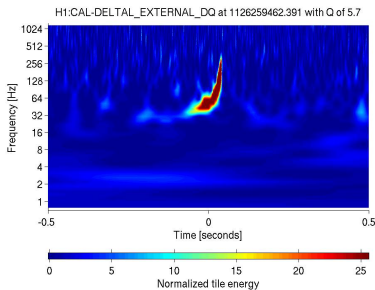
- Postać $k(t)$ ($\alpha = 2\pi$)

$$k(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{H(\omega)}{S_n(\omega)} e^{i\omega t} d\omega$$

- Optymalny stosunek sygnału do szumu

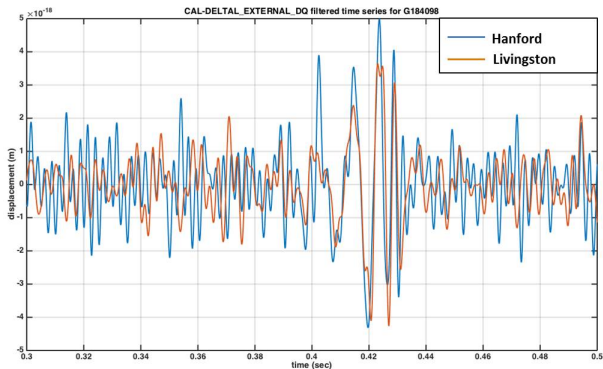
$$\text{SNR}^2 = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{|H(\omega)|^2}{S_n(\omega)} d\omega$$

Sygnał z 15 września 2015

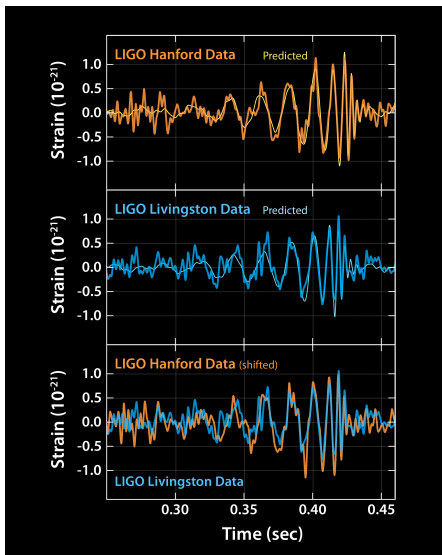


Rysunek : LIGO Livingston Observatory was the first detector to sense the passage of a gravitational wave. Hanford detected the gravitational wave signal 7 milliseconds after Livingston, but the Hanford signal was more prominent. Hanford's interferometer was more sensitive than Livingston at the time of the detection.

Sygnal z 15 września 2015



Rysunek : Shape of first detection 'waveform'. The blue line shows the stretching and shrinking of the Hanford Observatory's arms, and the orange line shows how Livingston's arms responded in the presence of the gravitational wave. The scale on the vertical axis (10^{-18} meters) reveals that for this detection, LIGO measured movement 4000–5000 times smaller than a proton!



Rysunek : The top two plots show data received at Livingston and Hanford, along with the predicted shapes for the waveform

**Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger**B. P. Abbott *et al.*^{*}

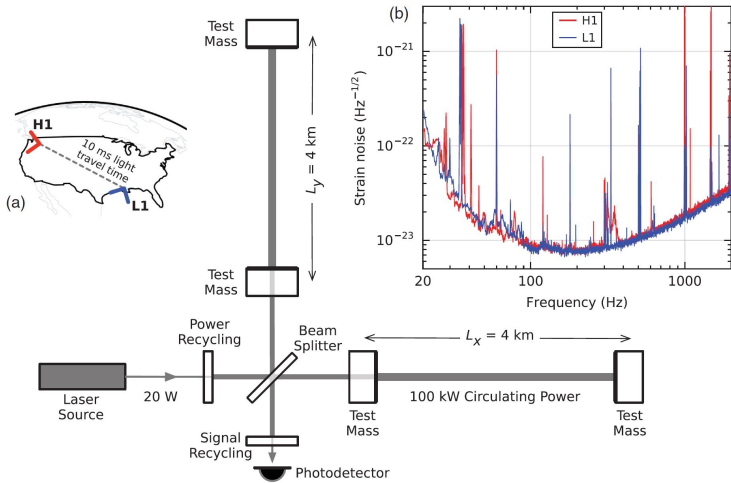
(LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration)

(Received 21 January 2016; published 11 February 2016)

On September 14, 2015 at 09:50:45 UTC the two detectors of the Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory simultaneously observed a transient gravitational-wave signal. The signal sweeps upwards in frequency from 35 to 250 Hz with a peak gravitational-wave strain of 1.0×10^{-21} . It matches the waveform predicted by general relativity for the inspiral and merger of a pair of black holes and the ringdown of the resulting single black hole. The signal was observed with a matched-filter signal-to-noise ratio of 24 and a false alarm rate estimated to be less than 1 event per 203 000 years, equivalent to a significance greater than 5.1σ . The source lies at a luminosity distance of 410^{+160}_{-180} Mpc corresponding to a redshift $z = 0.09^{+0.03}_{-0.04}$. In the source frame, the initial black hole masses are $36^{+5}_{-4} M_{\odot}$ and $29^{+4}_{-4} M_{\odot}$, and the final black hole mass is $62^{+4}_{-4} M_{\odot}$, with $3.0^{+0.5}_{-0.5} M_{\odot} c^2$ radiated in gravitational waves. All uncertainties define 90% credible intervals. These observations demonstrate the existence of binary stellar-mass black hole systems. This is the first direct detection of gravitational waves and the first observation of a binary black hole merger.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.061102

Detektor



- 1 Dwa rodzaje algorytmów wyszukujących z zastosowaniem filtrowania wzmacniającego poszukiwany sygnał (matched filtering)

- 1 Dwa rodzaje algorytmów wyszukujących z zastosowaniem filtrowania wzmacniającego poszukiwany sygnał (matched filtering)
 - poszukiwanie sygnału zderzeń masywnych obiektów w oparciu o wzorce sygnałów obliczone w ramach numerycznej Ogólnej Teorii Względności (ok. 250 000 wzorców zderzeń)
 - poszukiwanie silnego sygnału w możliwie najszerszym przedziale częstości i minimalnych założeniach co do jego wzorca

- 1 Dwa rodzaje algorytmów wyszukujących z zastosowaniem filtrowania wzmacniającego poszukiwany sygnał (matched filtering)
 - poszukiwanie sygnału zderzeń masywnych obiektów w oparciu o wzorce sygnałów obliczone w ramach numerycznej Ogólnej Teorii Względności (ok. 250 000 wzorców zderzeń)
 - poszukiwanie silnego sygnału w możliwie najszerszym przedziale częstości i minimalnych założeniach co do jego wzorca
- 2 Sprawdzanie zgodności obserwacji na obu detektorach i określenie statystycznej istotności zdarzenia (1 zdarzenie na 203 000 lat)

- 1 Dwa rodzaje algorytmów wyszukujących z zastosowaniem filtrowania wzmacniającego poszukiwany sygnał (matched filtering)
 - poszukiwanie sygnału zderzeń masywnych obiektów w oparciu o wzorce sygnałów obliczone w ramach numerycznej Ogólnej Teorii Względności (ok. 250 000 wzorców zderzeń)
 - poszukiwanie silnego sygnału w możliwie najszerszym przedziale częstości i minimalnych założeniach co do jego wzorca
- 2 Sprawdzanie zgodności obserwacji na obu detektorach i określenie statystycznej istotności zdarzenia (1 zdarzenie na 203 000 lat)

<https://polgraw.camk.edu.pl/>

<https://polgraw.camk.edu.pl/>

- 9 polskich jednostek naukowych
- Kierownikiem projektu jest prof. Andrzej Królak z Instytutu Matematycznego PAN
- Grupa zajmuje się analizą danych, rozwijaniem statystycznej teorii wykrywania sygnałów, modelowaniem astrofizycznych źródeł fal grawitacyjnych, przewidywaniami dotyczącymi populacji tych źródeł, obserwacjami emisji elektromagnetycznej towarzyszącej emisji fal grawitacyjnych oraz budową interferometru Virgo

Dane astrofizyczne i wnioski

Primary black hole mass	$36_{-4}^{+5} M_{\odot}$
Secondary black hole mass	$29_{-4}^{+4} M_{\odot}$
Final black hole mass	$62_{-4}^{+4} M_{\odot}$
Final black hole spin	$0.67_{-0.07}^{+0.05}$
Luminosity distance	410_{-180}^{+160} Mpc
Source redshift z	$0.09_{-0.04}^{+0.03}$

Primary black hole mass	$36_{-4}^{+5} M_{\odot}$
Secondary black hole mass	$29_{-4}^{+4} M_{\odot}$
Final black hole mass	$62_{-4}^{+4} M_{\odot}$
Final black hole spin	$0.67_{-0.07}^{+0.05}$
Luminosity distance	410_{-180}^{+160} Mpc
Source redshift z	$0.09_{-0.04}^{+0.03}$

- Masa grawitonu $< 1.2 \cdot 10^{-22}$ eV/c²

Primary black hole mass	$36_{-4}^{+5} M_{\odot}$
Secondary black hole mass	$29_{-4}^{+4} M_{\odot}$
Final black hole mass	$62_{-4}^{+4} M_{\odot}$
Final black hole spin	$0.67_{-0.07}^{+0.05}$
Luminosity distance	410_{-180}^{+160} Mpc
Source redshift z	$0.09_{-0.04}^{+0.03}$

- Masa grawitonu $< 1.2 \cdot 10^{-22} \text{ eV}/c^2$
- Istnienie czarnych dziur o masach $> 25 M_{\odot}$



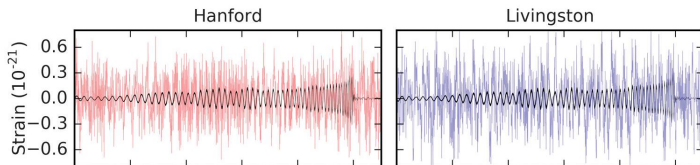
GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence

B. P. Abbott *et al.**

(LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration)

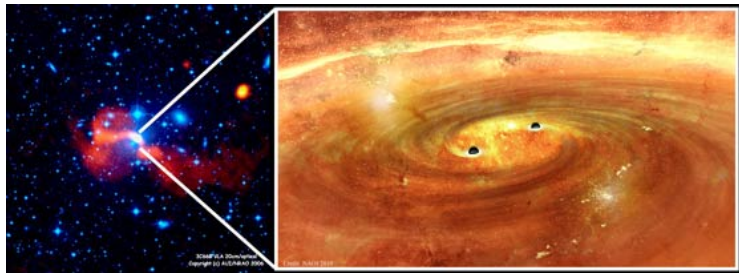
(Received 31 May 2016; published 15 June 2016)

We report the observation of a gravitational-wave signal produced by the coalescence of two stellar-mass black holes. The signal, GW151226, was observed by the twin detectors of the Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO) on December 26, 2015 at 03:38:53 UTC. The signal was initially identified within 70 s by an online matched-filter search targeting binary coalescences. Subsequent off-line analyses recovered GW151226 with a network signal-to-noise ratio of 13 and a significance greater than 5σ . The signal persisted in the LIGO frequency band for approximately 1 s, increasing in frequency and amplitude over about 55 cycles from 35 to 450 Hz, and reached a peak gravitational strain of $3.4^{+0.7}_{-0.9} \times 10^{-22}$. The inferred source-frame initial black hole masses are $14.2^{+8.3}_{-3.7} M_{\odot}$ and $7.5^{+2.3}_{-2.3} M_{\odot}$, and the final black hole mass is $20.8^{+6.1}_{-1.7} M_{\odot}$. We find that at least one of the component black holes has spin greater than 0.2. This source is located at a luminosity distance of 440^{+180}_{-190} Mpc corresponding to a redshift of $0.09^{+0.03}_{-0.04}$. All uncertainties define a 90% credible interval. This second gravitational-wave observation provides improved constraints on stellar populations and on deviations from general relativity.



Rysunek : Based on current waveform modeling, we find that GW151226 passed through LIGO's sensitive band in 1 s, increasing in frequency over approximately 55 cycles from 35 Hz to a peak amplitude at 450 Hz. The signal-to-noise ratio (SNR) accumulates equally in the early inspiral (45 cycles from 35 to 100 Hz) and late inspiral to merger (10 cycles from 100 to 450 Hz). This is different from the more massive GW150914 binary for which only the last 10 cycles, comprising inspiral and merger, dominated the SNR

Primary black hole mass	$14.2^{+8.3}_{-3.7} M_{\odot}$
Secondary black hole mass	$7.5^{+2.3}_{-2.3} M_{\odot}$
Chirp mass	$8.9^{+0.3}_{-0.3} M_{\odot}$
Total black hole mass	$21.8^{+5.9}_{-1.7} M_{\odot}$
Final black hole mass	$20.8^{+6.1}_{-1.7} M_{\odot}$
Radiated gravitational-wave energy	$1.0^{+0.1}_{-0.2} M_{\odot} c^2$
Peak luminosity	$3.3^{+0.8}_{-1.6} \times 10^{56} \text{ erg/s}$
Final black hole spin	$0.74^{+0.06}_{-0.06}$
Luminosity distance	$440^{+180}_{-190} \text{ Mpc}$
Source redshift z	$0.09^{+0.03}_{-0.04}$



Rysunek : The joint research team of NAOJ and other research institutes succeeded in observing a very close binary black hole system just before its merger. Recent observation results provide possible evidence that a supermassive black hole with billions of times the mass of the Sun exists in the center of active galactic nuclei 3C66B, which is a giant radio galaxy and a giant elliptical galaxy, by observing the orbital motion of the central core in the galaxy. The team conducted further detailed observations at millimeter wavelengths and identified that the binary black hole will merge in about 500 years.