

Elementy rachunku prawdopodobieństwa

Jacek Jurkowski, Fizyka Statystyczna

Instytut Fizyki

2015

- Ω — zbiór zdarzeń elementarnych (skończony, przeliczalny, nieprzeliczalny podzbiór w \mathbb{R}^n),

- Ω — zbiór zdarzeń elementarnych (skończony, przeliczalny, nieprzeliczalny podzbiór w \mathbb{R}^n),
- podzbiór zbioru Ω — zdarzenie losowe,

- Ω — zbiór zdarzeń elementarnych (skończony, przeliczalny, nieprzeliczalny podzbiór w \mathbb{R}^n),
- podzbiór zbioru Ω — zdarzenie losowe,
- zdarzenie pewne Ω — cała przestrzeń zdarzeń elementarnych,

- Ω — zbiór zdarzeń elementarnych (skończony, przeliczalny, nieprzeliczalny podzbiór w \mathbb{R}^n),
- podzbiór zbioru Ω — zdarzenie losowe,
- zdarzenie pewne Ω — cała przestrzeń zdarzeń elementarnych,
- zdarzenie niemożliwe — podzbiór pusty \emptyset przestrzeni Ω ,

- Ω — zbiór zdarzeń elementarnych (skończony, przeliczalny, nieprzeliczalny podzbiór w \mathbb{R}^n),
- podzbiór zbioru Ω — zdarzenie losowe,
- zdarzenie pewne Ω — cała przestrzeń zdarzeń elementarnych,
- zdarzenie niemożliwe — podzbiór pusty \emptyset przestrzeni Ω ,
- działania na zdarzeniach — jak na zbiorach:
 - suma zdarzeń ($A \cup B$),
 - iloczyn zdarzeń ($A \cap B$),
 - różnica zdarzeń ($A - B$),
 - zdarzenie przeciwne (\bar{A}),
 - zdarzenia wykluczające się, jeżeli $A \cap B = \emptyset$.

Definicja prawdopodobieństwa

Definicja

Prawdopodobieństwem na zbiorze Ω nazywamy funkcję p określoną na rodzinie podzbiorów Ω , taką że dla zdarzeń A , B i zdarzenia pewnego Ω :

- 1 $p(A) \geq 0$,
- 2 $p(\Omega) = 1$ — warunek normalizacji,
- 3 Jeśli A i B są zdarzeniami wykluczającymi się, to $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Definicja

Prawdopodobieństwem na zbiorze Ω nazywamy funkcję p określoną na rodzinie podzbiorów Ω , taką że dla zdarzeń A , B i zdarzenia pewnego Ω :

- 1 $p(A) \geq 0$,
- 2 $p(\Omega) = 1$ — warunek normalizacji,
- 3 Jeśli A i B są zdarzeniami wykluczającymi się, to $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Przykład: rzut kostką

W przypadku rzutu idealną kostką mamy sześćoelementowy zbiór

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\},$$

na którym prawdopodobieństwo możemy określić jako

$$p(\omega_i) = \frac{1}{6}, \quad i = 1, 2, \dots, 6.$$

1 $p(\emptyset) = 0,$

- 1 $p(\emptyset) = 0$,
- 2 prawdopodobieństwa zdarzeń przeciwnych sumują się do 1,

- 1 $p(\emptyset) = 0$,
- 2 prawdopodobieństwa zdarzeń przeciwnych sumują się do 1,
- 3 Jeśli $A \subset B \implies p(A) \leq p(B)$.

Własności prawdopodobieństwa

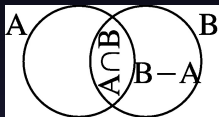
- 1 $p(\emptyset) = 0$,
- 2 prawdopodobieństwa zdarzeń przeciwnych sumują się do 1,
- 3 Jeśli $A \subset B \implies p(A) \leq p(B)$.



Jeśli A, B , są takie, że $A \subset B$, to
 $B = A \cup (B - A)$, $A \cap (B - A) = \emptyset$
oraz z aksjomatu (3): $p(B) = p(A) + \underbrace{p(B - A)}_{\geq 0} \geq p(A)$

- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$



$$A \cup B = A \cup (B - A), \quad A \cap (B - A) = \emptyset$$

$$B = (A \cap B) \cup (B - A), \quad (A \cap B) \cap (B - A) = \emptyset$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{z aksjomatu (3): } p(A \cup B) = p(A) + p(B - A) \\ p(B) = p(A \cap B) + p(B - A) \end{array} \right.$$

$$p(A \cup B) - p(B) = p(A) - p(A \cap B)$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Przykłady prawdopodobieństwa. Rozkłady dyskretne

- Ω — dyskretny zbiór zdarzeń elementarnych
- $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$, $N \in \mathbb{N}$ skończone lub nieskończone

- Ω — dyskretny zbiór zdarzeń elementarnych
- $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$, $N \in \mathbb{N}$ skończone lub nieskończone
- zdarzeniom elementarnym ω_i przypisujemy prawdopodobieństwa $p(\omega_i) = p_i$, tak aby spełnić warunek normalizacji

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1$$

- Ω — dyskretny zbiór zdarzeń elementarnych
- $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$, $N \in \mathbb{N}$ skończone lub nieskończone
- zdarzeniom elementarnym ω_i przypisujemy prawdopodobieństwa $p(\omega_i) = p_i$, tak aby spełnić warunek normalizacji

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1$$

- dowolnemu podzbiorowi $\Omega \supset A = \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$, $k \leq N$, przypisujemy prawdopodobieństwo:

$$p(A) = \sum_{i=1}^k p_i$$

Przykłady prawdopodobieństwa. Rozkłady ciągłe

Przykłady prawdopodobieństwa. Rozkłady ciągłe

- 1 Ω — zbiór nieprzeliczalny (o wiele trudniejsze!)
- 2 Weźmy $\Omega = \mathbb{R}$

Przykłady prawdopodobieństwa. Rozkłady ciągłe

- 1 Ω — zbiór nieprzeliczalny (o wiele trudniejsze!)
- 2 Weźmy $\Omega = \mathbb{R}$
 - prawdopodobieństwo p jest określone przez miarę probabilistyczną μ na Ω , tak aby

$$p(A) = \int_A d\mu = \int_A \rho(x) dx$$

Przykłady prawdopodobieństwa. Rozkłady ciągłe

- 1 Ω — zbiór nieprzeliczalny (o wiele trudniejsze!)
- 2 Weźmy $\Omega = \mathbb{R}$
 - prawdopodobieństwo p jest określone przez miarę probabilistyczną μ na Ω , tak aby

$$p(A) = \int_A d\mu = \int_A \rho(x) dx$$

gdzie $\rho(x)$ pewna funkcja określona na \mathbb{R} oraz dx miara Lebesgue'a na \mathbb{R}

- funkcja $\rho(x)$ musi być nieujemna oraz unormowana

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = 1$$

Przykłady prawdopodobieństwa. Rozkłady ciągłe

- 1 Ω — zbiór nieprzeliczalny (o wiele trudniejsze!)
- 2 Weźmy $\Omega = \mathbb{R}$
 - prawdopodobieństwo p jest określone przez miarę probabilistyczną μ na Ω , tak aby

$$p(A) = \int_A d\mu = \int_A \rho(x) dx$$

- gdzie $\rho(x)$ pewna funkcja określona na \mathbb{R} oraz dx miara Lebesgue'a na \mathbb{R}
- funkcja $\rho(x)$ musi być nieujemna oraz unormowana

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = 1$$

- 3 Łatwo można tę metodę uogólnić na przypadek $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Przykłady prawdopodobieństwa. Rozkłady ciągłe

- 1 Ω — zbiór nieprzeliczalny (o wiele trudniejsze!)
- 2 Weźmy $\Omega = \mathbb{R}$
 - prawdopodobieństwo p jest określone przez miarę probabilistyczną μ na Ω , tak aby

$$p(A) = \int_A d\mu = \int_A \rho(x) dx$$

- gdzie $\rho(x)$ pewna funkcja określona na \mathbb{R} oraz dx miara Lebesgue'a na \mathbb{R}
- funkcja $\rho(x)$ musi być nieujemna oraz unormowana

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = 1$$

- 3 Łatwo można tę metodę uogólnić na przypadek $\Omega \subset \mathbb{R}^n$
- 4 **Def.** Przestrzenią probabilistyczną nazywamy trójkę $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$, gdzie \mathfrak{M} jest σ -algebrą (zbiorów borelowskich) wyznaczającą rodzinę zdarzeń μ -mierzalnych.

Twierdzenie

Niech na przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω określone będą dwa prawdopodobieństwa $p^{(1)}$ oraz $p^{(2)}$. Wówczas kombinacja wypukła tych prawdopodobieństw także jest prawdopodobieństwem, tzn.

$$p(A) = \alpha p^{(1)}(A) + (1 - \alpha)p^{(2)}(A), \quad 0 \leq \alpha \leq 1,$$

stanowi rozkład prawdopodobieństwa.

Przykłady rozkładów dyskretnych

Rozkład Bernoulliego (dwumianowy)

$$B(n, N) = \binom{N}{n} w^n (1 - w)^{N-n},$$

gdzie $0 \leq w \leq 1$.

Rozkład Bernoulliego (dwumianowy)

$$B(n, N) = \binom{N}{n} w^n (1 - w)^{N-n},$$

gdzie $0 \leq w \leq 1$.

- Zachowania graniczne rozkładu dwumianowego
- Błądzenie przypadkowe na prostej

Rozkład Bernoulliego (dwumianowy)

$$B(n, N) = \binom{N}{n} w^n (1-w)^{N-n},$$

gdzie $0 \leq w \leq 1$.

- Zachowania graniczne rozkładu dwumianowego
- Błądzenie przypadkowe na prostej

Rozkład Poissona

$$P_\lambda(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

Jest to graniczny przypadek rozkładu dwumianowego przy $N \rightarrow \infty$ i jednocześnie $p \rightarrow 0$, tak aby $p \cdot N = \lambda$

Rozkład prostokątny (jednostajny)

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{dla } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{dla } x < 0 \text{ oraz } x > a \end{cases}$$

Rozkład trójkątny

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{2x}{ab} & \text{dla } 0 \leq x \leq a \\ \frac{2x}{ab - b^2} + \frac{2}{b - a} & \text{dla } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{dla } x < 0 \text{ oraz } x > b \end{cases}$$

Rozkład Gaussa

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Uwaga. Dystrybuanta rozkładu Gaussa nie jest funkcją elementarną! Wyraża się przez funkcję specjalną zwaną **funkcją błędu**

Dystrybuanta rozkładu na prostej

- Jako przestrzeń zdarzeń elementarnych przyjmujemy pewien dyskretny (dla rozkładów dyskretnych) lub nieprzeliczalny (dla rozkładów ciągłych) podzbiór Ω prostej rzeczywistej \mathbb{R} .

- Jako przestrzeń zdarzeń elementarnych przyjmujemy pewien dyskretny (dla rozkładów dyskretnych) lub nieprzeliczalny (dla rozkładów ciągłych) podzbiór Ω prostej rzeczywistej \mathbb{R} .
- W przypadku rozkładu dyskretnego prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia $A \subseteq \mathbb{R}$ można obliczyć jako

$$p(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i .$$

Dystrybuanta rozkładu na prostej

- Jako przestrzeń zdarzeń elementarnych przyjmujemy pewien dyskretny (dla rozkładów dyskretnych) lub nieprzeliczalny (dla rozkładów ciągłych) podzbiór Ω prostej rzeczywistej \mathbb{R} .
- W przypadku rozkładu dyskretnego prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia $A \subseteq \mathbb{R}$ można obliczyć jako

$$p(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i.$$

Definicja

Dystrybuantą rozkładu P na prostej nazywamy funkcję zmiennej rzeczywistej określoną jako

$$F(x) = p((-\infty, x)).$$

$$1 \quad p([x_1, x_2)) = F(x_2) - F(x_1),$$

Własności dystrybuanty

- 1 $p([x_1, x_2)) = F(x_2) - F(x_1)$,
- 2 jest funkcją niemalejącą oraz $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$,

Własności dystrybuanty

- 1 $p([x_1, x_2)) = F(x_2) - F(x_1)$,
- 2 jest funkcją niemalejącą oraz $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$,
- 3 jest funkcją lewostronnie ciągłą oraz

$$p(a) = \lim_{x \rightarrow a+} F(x) - F(a).$$

- 1 $p([x_1, x_2)) = F(x_2) - F(x_1)$,
- 2 jest funkcją niemalejącą oraz $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$,
- 3 jest funkcją lewostronnie ciągłą oraz

$$p(a) = \lim_{x \rightarrow a+} F(x) - F(a).$$

W szczególności, gdy rozkład jest ciągły, to $p(a) = 0$ dla każdego $a \in \mathbb{R}$,

- 4 $F(x) = \sum_{\{i; \omega_i < x\}} p_i$ dla rozkładu dyskretnego,

Własności dystrybuanty

- 1 $p([x_1, x_2)) = F(x_2) - F(x_1)$,
- 2 jest funkcją niemalejącą oraz $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$,
- 3 jest funkcją lewostronnie ciągłą oraz

$$p(a) = \lim_{x \rightarrow a+} F(x) - F(a).$$

W szczególności, gdy rozkład jest ciągły, to $p(a) = 0$ dla każdego $a \in \mathbb{R}$,

- 4 $F(x) = \sum_{\{i; \omega_i < x\}} p_i$ dla rozkładu dyskretnego,
- 5 $F(x) = \int_{-\infty}^x \rho(t) dt$ dla rozkładu ciągłego,

Własności dystrybuanty

- 1 $p([x_1, x_2)) = F(x_2) - F(x_1)$,
- 2 jest funkcją niemalejącą oraz $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$,
- 3 jest funkcją lewostronnie ciągłą oraz

$$p(a) = \lim_{x \rightarrow a+} F(x) - F(a).$$

W szczególności, gdy rozkład jest ciągły, to $p(a) = 0$ dla każdego $a \in \mathbb{R}$,

- 4 $F(x) = \sum_{\{i; \omega_i < x\}} p_i$ dla rozkładu dyskretnego,
- 5 $F(x) = \int_{-\infty}^x \rho(t) dt$ dla rozkładu ciągłego,
- 6 $F'(x) = \rho(x)$ w punktach, w których dystrybuanta jest ciągła i różniczkowalna.

- Dystrybuanta dla dyskretnego rozkładu

$$p(-2) = \frac{1}{3}, \quad p(0) = \frac{1}{6}, \quad p(1) = \frac{1}{2}.$$

- Dystrybuanta dla dyskretnego rozkładu

$$p(-2) = \frac{1}{3}, \quad p(0) = \frac{1}{6}, \quad p(1) = \frac{1}{2}.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq -2, \\ \frac{1}{3} & \text{dla } -2 < x \leq 0, \\ \frac{1}{2} & \text{dla } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{dla } x > 1. \end{cases}$$

- Dystrybuanta dla dyskretnego rozkładu

$$p(-2) = \frac{1}{3}, \quad p(0) = \frac{1}{6}, \quad p(1) = \frac{1}{2}.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq -2, \\ \frac{1}{3} & \text{dla } -2 < x \leq 0, \\ \frac{1}{2} & \text{dla } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{dla } x > 1. \end{cases}$$

- Dystrybuanta ciągłego rozkładu wykładniczego ($a > 0$)

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ a e^{-ax} & \text{dla } x \geq 0. \end{cases}$$

- Dystrybuanta dla dyskretnego rozkładu

$$p(-2) = \frac{1}{3}, \quad p(0) = \frac{1}{6}, \quad p(1) = \frac{1}{2}.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq -2, \\ \frac{1}{3} & \text{dla } -2 < x \leq 0, \\ \frac{1}{2} & \text{dla } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{dla } x > 1. \end{cases}$$

- Dystrybuanta ciągłego rozkładu wykładniczego ($a > 0$)

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ a e^{-ax} & \text{dla } x \geq 0. \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ \int_0^x a e^{-at} dt = 1 - e^{-ax} & \text{dla } x \geq 0. \end{cases}$$

Wartość średnia rozkładu dyskretnego

Definicja

Wartością średnią (lub wartością oczekiwaną) rozkładu dyskretnego na prostej p nazywamy liczbę

$$m = \sum_i \omega_i p_i ,$$

o ile powyższy szereg jest bezwzględnie zbieżny, tzn.

$$\sum_i |\omega_i| p_i < \infty .$$

Przykłady

- 1 Wartość średnia dla rozkładu dwumianowego wynosi

$$m = \sum_{n=0}^N nB(n, N) = Nw$$

Przykłady

- 1 Wartość średnia dla rozkładu dwumianowego wynosi

$$m = \sum_{n=0}^N nB(n, N) = Nw$$

- 2 Wartość średnia dla rozkładu Poissona wynosi

$$m = \sum_{n=0}^{\infty} nP_{\lambda}(n) = \lambda$$

Wariancja rozkładu dyskretnego

Definicja

Wariancją dyskretnego rozkładu na prostej nazywamy liczbę σ

$$\sigma^2 = \sum_i (\omega_i - m)^2 p_i.$$

Definicja

Wariancją dyskretnego rozkładu na prostej nazywamy liczbę σ

$$\sigma^2 = \sum_i (\omega_i - m)^2 p_i.$$

- Wariancja jest miarą rozproszenia rozkładu wokół jego wartości średniej.

Definicja

Wariancją dyskretnego rozkładu na prostej nazywamy liczbę σ

$$\sigma^2 = \sum_i (\omega_i - m)^2 p_i.$$

- Wariancja jest miarą rozproszenia rozkładu wokół jego wartości średniej.
- Minimalną wariancję (równą zero) ma rozkład skupiony na jednym zdarzeniu.

Definicja

Wariancją dyskretnego rozkładu na prostej nazywamy liczbę σ

$$\sigma^2 = \sum_i (\omega_i - m)^2 p_i.$$

- Wariancja jest miarą rozproszenia rozkładu wokół jego wartości średniej.
- Minimalną wariancję (równą zero) ma rozkład skupiony na jednym zdarzeniu.
- Jeżeli wariancja rozkładu jest mała, to prawdopodobieństwo zbiorów odległych od m jest małe (tw. Czebyszewa)

Twierdzenie Czebyszewa

Twierdzenie Czebyszewa

Jeżeli rozkład prawdopodobieństwa p na prostej (niekoniecznie dyskretny) ma wartość średnią m i wariancję σ , to dla każdego $\varepsilon > 0$ zachodzi nierówność Czebyszewa

$$p(\{x; |x - m| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Wartość średnia rozkładu ciągłego

Definicja

Wartością średnią (lub wartością oczekiwaną) ciągłego rozkładu na prostej o gęstości $\rho(x)$ nazywamy liczbę

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x) dx ,$$

o ile powyższa całka jest bezwzględnie zbieżna, tzn.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\rho(x) dx < \infty .$$

Przykład

Wartość średnia dla rozkładu Gaussa wynosi

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \exp \left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right] dx = m$$

gdzie wykorzystano wartość całki gaussowskiej:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Wariancja rozkładu ciągłego

Definicja

Wariancją ciągłego rozkładu na prostej o gęstości $\rho(x)$ i wartości średniej m nazywamy liczbę

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 \rho(x) dx .$$

Definicja

Wariancją ciągłego rozkładu na prostej o gęstości $\rho(x)$ i wartości średniej m nazywamy liczbę

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 \rho(x) dx .$$

- Wariancja rozkładu Gaussa wynosi σ

1 Przykład

- 1 Przykład
 - Rzucamy parą idealnych kostek

1 Przykład

- Rzucamy parą idealnych kostek
- Interesuje nas suma oczek wyrzuconych na obu kostkach

1 Przykład

- Rzucamy parą idealnych kostek
- Interesuje nas suma oczek wyrzuconych na obu kostkach
- Model probabilistyczny tego doświadczenia to para (Ω, p) , gdzie

$$\Omega = \{(i, j); i, j = 1, \dots, 6\}, \quad p(i, j) = \frac{1}{36}, \quad i, j = 1, \dots, 6.$$

1 Przykład

- Rzucamy parą idealnych kostek
- Interesuje nas suma oczek wyrzuconych na obu kostkach
- Model probabilistyczny tego doświadczenia to para (Ω, p) , gdzie

$$\Omega = \{(i, j); i, j = 1, \dots, 6\}, \quad p(i, j) = \frac{1}{36}, \quad i, j = 1, \dots, 6.$$

- Obserwację sumy oczek na kostkach można traktować jako nowe doświadczenie związane z poprzednim. Interesuje nas funkcja f określona na podzbiorach Ω dana formułą

$$f(i, j) = i + j.$$

Przykład

- Funkcja ta przekształca zbiór zdarzeń elementarnych Ω w zbiór $\Omega_f = \{2, 3, \dots, 12\}$

Przykład

- Funkcja ta przekształca zbiór zdarzeń elementarnych Ω w zbiór $\Omega_f = \{2, 3, \dots, 12\}$
- Na Ω_f możemy określić rozkład prawdopodobieństwa p_f wykorzystując rozkład p jako

$$p_f(k) = \sum_{i+j=k} p(i, j), \quad k = 2, 3, \dots, 12,$$

gdzie sumowanie odbywa się po tych prawdopodobieństwach $p(i, j)$, dla których $i + j = k$.

Przykład

- Funkcja ta przekształca zbiór zdarzeń elementarnych Ω w zbiór $\Omega_f = \{2, 3, \dots, 12\}$
- Na Ω_f możemy określić rozkład prawdopodobieństwa p_f wykorzystując rozkład p jako

$$p_f(k) = \sum_{i+j=k} p(i, j), \quad k = 2, 3, \dots, 12,$$

gdzie sumowanie odbywa się po tych prawdopodobieństwach $p(i, j)$, dla których $i + j = k$.

- Liczby $p_f(k)$ informują o prawdopodobieństwie otrzymania wartości k jako sumy wyrzuconych oczek

Przykład

- Funkcja ta przekształca zbiór zdarzeń elementarnych Ω w zbiór $\Omega_f = \{2, 3, \dots, 12\}$
- Na Ω_f możemy określić rozkład prawdopodobieństwa p_f wykorzystując rozkład p jako

$$p_f(k) = \sum_{i+j=k} p(i, j), \quad k = 2, 3, \dots, 12,$$

gdzie sumowanie odbywa się po tych prawdopodobieństwach $p(i, j)$, dla których $i + j = k$.

- Liczby $p_f(k)$ informują o prawdopodobieństwie otrzymania wartości k jako sumy wyrzuconych oczek
- Funkcja f wygenerowała nowy rozkład prawdopodobieństwa, a dokładniej parę (Ω_f, p_f)

Przykład

- Funkcja ta przekształca zbiór zdarzeń elementarnych Ω w zbiór $\Omega_f = \{2, 3, \dots, 12\}$
- Na Ω_f możemy określić rozkład prawdopodobieństwa p_f wykorzystując rozkład p jako

$$p_f(k) = \sum_{i+j=k} p(i, j), \quad k = 2, 3, \dots, 12,$$

gdzie sumowanie odbywa się po tych prawdopodobieństwach $p(i, j)$, dla których $i + j = k$.

- Liczby $p_f(k)$ informują o prawdopodobieństwie otrzymania wartości k jako sumy wyrzuconych oczek
- Funkcja f wygenerowała nowy rozkład prawdopodobieństwa, a dokładniej parę (Ω_f, p_f)
- p_f możemy zapisać także jako

$$p_f(k) = p(f^{-1}(k)) = p\left(\{(i, j); (i, j) \in \Omega, i + j = k\}\right),$$

gdzie $f^{-1}(k)$ oznacza przeciwobraz liczby k .

Definicja zmiennej losowej

Definicje

- Zmienną losową f nazywamy mierzalną funkcję określoną σ -algebrze \mathfrak{M} podzbiorów Ω o wartościach rzeczywistych.

Definicje

- Zmienną losową f nazywamy mierzalną funkcję określoną σ -algebrze \mathfrak{M} podzbiorów Ω o wartościach rzeczywistych.
- Jeśli zbiór wartości zmiennej losowej f jest co najwyżej przeliczalny, to zmienną losową nazywamy dyskretną.

Definicje

- Zmienną losową f nazywamy mierzalną funkcję określoną σ -algebrze \mathfrak{M} podzbiorów Ω o wartościach rzeczywistych.
- Jeśli zbiór wartości zmiennej losowej f jest co najwyżej przeliczalny, to zmienną losową nazywamy dyskretną.
- W pozostałych przypadkach mówimy o zmiennej losowej ciągłej.

- Na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathfrak{M}, p)$ zmienna losowa wprowadza odwzorowanie $F : (\Omega, \mathfrak{M}, p) \rightarrow (\Omega_f, \mathfrak{M}_f, p_f)$.

- Na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathfrak{M}, p)$ zmienna losowa wprowadza odwzorowanie $F : (\Omega, \mathfrak{M}, p) \rightarrow (\Omega_f, \mathfrak{M}_f, p_f)$.
- W Ω_f wybieramy klasę zdarzeń probabilizowalnych \mathfrak{M}_f , na której określamy prawdopodobieństwo

$$\forall A \in \mathfrak{M}_f \quad p_f(A) = p(f^{-1}(A)) = p(\{\omega; \omega \in \Omega, f(\omega) \in A\}).$$

- Aby powyższy wzór miał sens $f^{-1}(A) \in \mathfrak{M}$. Oznacza to, że funkcja f musi być mierzalna względem σ -algebry \mathfrak{M} .

- Na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathfrak{M}, p)$ zmienna losowa wprowadza odwzorowanie $F : (\Omega, \mathfrak{M}, p) \rightarrow (\Omega_f, \mathfrak{M}_f, p_f)$.
- W Ω_f wybieramy klasę zdarzeń probabilizowalnych \mathfrak{M}_f , na której określamy prawdopodobieństwo

$$\forall A \in \mathfrak{M}_f \quad p_f(A) = p(f^{-1}(A)) = p(\{\omega; \omega \in \Omega, f(\omega) \in A\}).$$

- Aby powyższy wzór miał sens $f^{-1}(A) \in \mathfrak{M}$. Oznacza to, że funkcja f musi być mierzalna względem σ -algebry \mathfrak{M} .
- Jako \mathfrak{M}_f przyjmujemy σ -algebrę zbiorów borelowskich na prostej \mathbb{R} , stąd $f^{-1}(A) \in \mathfrak{M}$ dla każdego zbioru borelowskiego $A \subset \mathbb{R}$.
- Jeśli Ω jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym, to problem mierzalności funkcji f nie wprowadza żadnych ograniczeń, bo względem rodziny wszystkich podzbiorów zbioru co najwyżej przeliczalnego każda funkcja jest mierzalna.

Definicja

Rozkładem dyskretnej zmiennej losowej nazywamy rozkład prawdopodobieństwa p_f określony na prostej z jakim zmienna losowa f przyjmuje swoje wartości f_i , $i = 1, 2, \dots$, tzn.

$$p_f(f_i) = p(f = f_i) = p_i, \quad \text{tak aby} \quad \sum_i p_i = 1.$$

Przykład rozkładu zmiennej losowej

1 Przykład:

Przykład rozkładu zmiennej losowej

1 Przykład:

- Niech

$$f(\omega_1) = \frac{1}{2}, \quad f(\omega_2) = -\frac{1}{3}, \quad f(\omega_3) = \frac{1}{2} \quad \text{lub} \quad \begin{array}{c|c|c|c} & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \hline f_i & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{array}$$

będzie dyskretną zmienną losową na $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

Przykład rozkładu zmiennej losowej

1 Przykład:

- Niech

$$f(\omega_1) = \frac{1}{2}, \quad f(\omega_2) = -\frac{1}{3}, \quad f(\omega_3) = \frac{1}{2} \quad \text{lub} \quad \begin{array}{c|c|c|c} & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \hline f_i & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{array}$$

będzie dyskretną zmienną losową na $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

- Wówczas rozkład zmiennej losowej f ma postać

$$\begin{array}{c|c|c} f_i & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \hline p_i & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}$$

Dystrybuanta i wartość średnia zmiennej losowej

- Niech $p(f < x)$ oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia, że zmienna losowa przyjmuje wartości mniejsze niż x , czyli $p(f < x) = p_f((-\infty, x))$.

Dystrybuanta i wartość średnia zmiennej losowej

- Niech $p(f < x)$ oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia, że zmienna losowa przyjmuje wartości mniejsze niż x , czyli $p(f < x) = p_f((-\infty, x))$.

Definicje

- Funkcję $F(x) = p(f < x)$ nazywamy dystrybuantą zmiennej losowej.

- Niech $p(f < x)$ oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia, że zmienna losowa przyjmuje wartości mniejsze niż x , czyli $p(f < x) = p_f((-\infty, x))$.

Definicje

- Funkcję $F(x) = p(f < x)$ nazywamy dystrybuantą zmiennej losowej.
- Wartością oczekiwaną (średnią) zmiennej losowej dyskretnej f o rozkładzie zmiennej losowej p nazywamy

$$E[f] = \sum_i f_i p_i,$$

gdzie f_i są wartościami zmiennej losowej.

Definicje

- Rozkładem zmiennej losowej ciągłej f nazywamy prawdopodobieństwo na prostej określone jako

$$\forall A \subset \mathbb{R} \quad p_f(A) = p\left(\{\omega; \omega \in \Omega, f(\omega) \in A\}\right).$$

Definicje

- Rozkładem zmiennej losowej ciągłej f nazywamy prawdopodobieństwo na prostej określone jako

$$\forall A \subset \mathbb{R} \quad p_f(A) = p\left(\{\omega; \omega \in \Omega, f(\omega) \in A\}\right).$$

- Funkcję

$$F(x) = p_f((-\infty, x))$$

nazywamy dystrybuantą zmiennej losowej ciągłej.

Definicje

- Rozkładem zmiennej losowej ciągłej f nazywamy prawdopodobieństwo na prostej określone jako

$$\forall A \subset \mathbb{R} \quad p_f(A) = p\left(\{\omega; \omega \in \Omega, f(\omega) \in A\}\right).$$

- Funkcję

$$F(x) = p_f((-\infty, x))$$

nazywamy dystrybuantą zmiennej losowej ciągłej.

- Wartością średnią zmiennej losowej f nazywamy wartość średnią rozkładu tej zmiennej p_f . Oznaczać ją będziemy $E[f]$ lub $\langle f \rangle$.

Wariancja zmiennej losowej

Definicja

Wariancją zmiennej losowej f nazywamy

$$\text{Var}[f] = E[(f - E[f])^2],$$

gdzie $E[f]$ jest wartością średnią zmiennej f .

Definicja

Wariancją zmiennej losowej f nazywamy

$$\text{Var}[f] = E[(f - E[f])^2],$$

gdzie $E[f]$ jest wartością średnią zmiennej f .

- w przypadku dyskretnej zmiennej losowej

$$\text{Var}[f] = \sum_i (f_i - m)^2 (p_f)_i,$$

gdzie p_f jest rozkładem zmiennej f

Definicja

Wariancją zmiennej losowej f nazywamy

$$\text{Var}[f] = E[(f - E[f])^2],$$

gdzie $E[f]$ jest wartością średnią zmiennej f .

- w przypadku dyskretnej zmiennej losowej

$$\text{Var}[f] = \sum_i (f_i - m)^2 (p_f)_i,$$

gdzie p_f jest rozkładem zmiennej f

- w przypadku ciągłej zmiennej losowej

$$\text{Var}[f] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[f])^2 \rho_f(x) dx,$$

gdzie $\rho_f(x)$ jest gęstością rozkładu na prostej zmiennej losowej

Wariancja zmiennej losowej

Definicja

Wariancją zmiennej losowej f nazywamy

$$\text{Var}[f] = E[(f - E[f])^2],$$

gdzie $E[f]$ jest wartością średnią zmiennej f .

- w przypadku dyskretnej zmiennej losowej

$$\text{Var}[f] = \sum_i (f_i - m)^2 (p_f)_i,$$

gdzie p_f jest rozkładem zmiennej f

- w przypadku ciągłej zmiennej losowej

$$\text{Var}[f] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[f])^2 \rho_f(x) dx,$$

gdzie $\rho_f(x)$ jest gęstością rozkładu na prostej zmiennej losowej

- zachodzi użyteczna tożsamość

$$\text{Var}(f) = E(f^2) - (E(f))^2$$

gdzie f^2 jest zmienną losową przyjmującą wartości f_i^2 z prawdopodobieństwem $(p_f)_i$ w przypadku dyskretnym oraz odpowiednio $(f(x))^2$ z gęstością $\rho_f(x)$ w przypadku ciągłej zmiennej losowej.

Przykład: W objętości V porusza się chaotycznie N nieoddziałujących i rozróżnialnych cząstek.

- Znaleźć prawdopodobieństwo $p_N(k)$ tego, że w objętości $v < V$ znajduje się jednocześnie k cząstek.
- Policzyc średnią liczbę cząstek w objętości v i wariancję liczby cząstek.
- Niech średnia liczba cząstek pozostaje stała, podczas gdy $N, V \rightarrow \infty$. Do jakiego rozkładu prawdopodobieństwa zmierza wówczas $p_N(k)$?

Definicja

Procesem stochastycznym nazywamy rodzinę zmiennych losowych $\{f_t : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}\}_{t \in T}$ określonych na tej samej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$.

Definicja

Procesem stochastycznym nazywamy rodzinę zmiennych losowych $\{f_t : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}\}_{t \in T}$ określonych na tej samej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$.

- Przez $P(B, t)$ oznaczmy prawdopodobieństwo tego, że zmienna losowa f w chwili t przyjmuje wartość ze zbioru $B \in \mathfrak{M}$ dla ustalonego ω

$$P(B, t) = p(f_t(\omega) \in B)$$

Definicja

Procesem stochastycznym nazywamy rodzinę zmiennych losowych $\{f_t : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}\}_{t \in T}$ określonych na tej samej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$.

- Przez $P(B, t)$ oznaczmy prawdopodobieństwo tego, że zmienna losowa f w chwili t przyjmuje wartość ze zbioru $B \in \mathfrak{M}$ dla ustalonego ω

$$P(B, t) = p(f_t(\omega) \in B)$$

- Niech T będzie zbiorem dyskretnych chwil czasu $t_1 < t_2 < \dots < t_n$

Hierarchia prawdopodobieństw łącznych

- Proces stochastyczny jest określony przez hierarchię prawdopodobieństw łącznych

$$\begin{aligned}P_1(B_1, t_1) &= p(f_{t_1} \in B_1) \\P_2(B_1, t_1; B_2, t_2) &= p(f_{t_1} \in B_1; f_{t_2} \in B_2) \\&\dots \quad \dots \\P_n(B_1, t_1; \dots; B_n, t_n) &= p(f_{t_1} \in B_1; \dots; f_{t_n} \in B_n)\end{aligned}$$

Hierarchia prawdopodobieństw łącznych

- Proces stochastyczny jest określony przez hierarchię prawdopodobieństw łącznych

$$\begin{aligned}P_1(B_1, t_1) &= p(f_{t_1} \in B_1) \\P_2(B_1, t_1; B_2, t_2) &= p(f_{t_1} \in B_1; f_{t_2} \in B_2) \\&\dots \quad \dots \\P_n(B_1, t_1; \dots; B_n, t_n) &= p(f_{t_1} \in B_1; \dots; f_{t_n} \in B_n)\end{aligned}$$

- Odpowiada mu hierarchia gęstości łącznej prawdopodobieństw $\rho_1(x_1, t_1), \rho_2(x_1, t_1; x_2, t_2), \dots, \rho_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$

Hierarchia prawdopodobieństw łącznych

- Proces stochastyczny jest określony przez hierarchię prawdopodobieństw łącznych

$$\begin{aligned}P_1(B_1, t_1) &= p(f_{t_1} \in B_1) \\P_2(B_1, t_1; B_2, t_2) &= p(f_{t_1} \in B_1; f_{t_2} \in B_2) \\&\dots \quad \dots \\P_n(B_1, t_1; \dots; B_n, t_n) &= p(f_{t_1} \in B_1; \dots; f_{t_n} \in B_n)\end{aligned}$$

- Odpowiada mu hierarchia gęstości łącznej prawdopodobieństw $\rho_1(x_1, t_1), \rho_2(x_1, t_1; x_2, t_2), \dots, \rho_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$
- Własności prawdopodobieństw P_n
 - 1 $P_n(B_1, t_1; \dots; B_n, t_n) \geq 0$
 - 2 $P_1(\Omega, t_1) = 1$
 - 3 $P_n(B_1, t_1; \dots; \Omega, t_n) = P_{n-1}(B_1, t_1; \dots; B_{n-1}, t_{n-1})$
- Własności gęstości ρ_n
 - 1 $\rho_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) \geq 0$
 - 2 $\int_{\Omega} \rho_1(x_1, t_1) dx_1 = 1$
 - 3 $\int_{\Omega} \rho_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) dx_n = \rho_{n-1}(x_1, t_1; \dots; x_{n-1}, t_{n-1})$

- Funkcje korelacyjne procesu stochastycznego

$$\langle f_{t_1} \dots f_{t_n} \rangle = \int_{\Omega^n} x_1 \dots x_n \rho_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) dx_1 \dots dx_n$$

- Funkcje korelacyjne procesu stochastycznego

$$\langle f_{t_1} \dots f_{t_n} \rangle = \int_{\Omega^n} x_1 \dots x_n \rho_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) dx_1 \dots dx_n$$

- Warunkowe gęstości łączne

$$\rho_{1|1}(x_1, t_1 | x_2, t_2) = \frac{\rho_2(x_1, t_1; x_2, t_2)}{\rho_1(x_1, t_1)}$$

- Funkcje korelacyjne procesu stochastycznego

$$\langle f_{t_1} \dots f_{t_n} \rangle = \int_{\Omega^n} x_1 \dots x_n \rho_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) dx_1 \dots dx_n$$

- Warunkowe gęstości łączne

$$\rho_{1|1}(x_1, t_1 | x_2, t_2) = \frac{\rho_2(x_1, t_1; x_2, t_2)}{\rho_1(x_1, t_1)}$$

- Własności

- 1 $\rho_1(x_2, t_2) = \int_{\Omega} \rho_1(x_1, t_1) \rho_{1|1}(x_1, t_1 | x_2, t_2) dx_1$
- 2 $\int_{\Omega} \rho_{1|1}(x_1, t_1 | x_2, t_2) dx_2 = 1$

- Funkcje korelacyjne procesu stochastycznego

$$\langle f_{t_1} \dots f_{t_n} \rangle = \int_{\Omega^n} x_1 \dots x_n \rho_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) dx_1 \dots dx_n$$

- Warunkowe gęstości łączne

$$\rho_{1|1}(x_1, t_1 | x_2, t_2) = \frac{\rho_2(x_1, t_1; x_2, t_2)}{\rho_1(x_1, t_1)}$$

- Własności

- 1 $\rho_1(x_2, t_2) = \int_{\Omega} \rho_1(x_1, t_1) \rho_{1|1}(x_1, t_1 | x_2, t_2) dx_1$

- 2 $\int_{\Omega} \rho_{1|1}(x_1, t_1 | x_2, t_2) dx_2 = 1$

- Ogólniej

$$\rho_{k|l}(x_1, t_1; \dots; x_k, t_k | x_{k+1}, t_{k+1}; \dots; x_{k+l}, t_{k+l}) = \frac{\rho_{k+l}(x_1, t_1; \dots; x_{k+l}, t_{k+l})}{\rho_k(x_1, t_1; \dots; x_k, t_k)}$$

- Proces zachowuje pamięć tylko o zdarzeniu z poprzedniej chwili czasu, tzn.

$$\rho_{n-1|1}(x_1, t_1; \dots; x_{n-1}, t_{n-1} | x_n, t_n) = \rho_{1|1}(x_{n-1}, t_{n-1} | x_n, t_n)$$

Propagator

Propagatorem nazywamy warunkową gęstość prawdopodobieństwa łącznego zdarzeń z dwóch chwil czasu

$$\rho_{1|1}(x_1, t_1 | x_2, t_2)$$

- Zwróćmy uwagę, że

$$\rho_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = \prod_{k=1}^{n-1} \rho_{1|1}(x_k, t_k | x_{k+1}, t_{k+1}) \rho_1(x_1, t_1)$$

- Proces zachowuje pamięć tylko o zdarzeniu z poprzedniej chwili czasu, tzn.

$$\rho_{n-1|1}(x_1, t_1; \dots; x_{n-1}, t_{n-1} | x_n, t_n) = \rho_{1|1}(x_{n-1}, t_{n-1} | x_n, t_n)$$

Propagator

Propagatorem nazywamy warunkową gęstość prawdopodobieństwa łącznego zdarzeń z dwóch chwil czasu

$$\rho_{1|1}(x_1, t_1 | x_2, t_2)$$

- Zwróćmy uwagę, że

$$\rho_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = \prod_{k=1}^{n-1} \rho_{1|1}(x_k, t_k | x_{k+1}, t_{k+1}) \rho_1(x_1, t_1)$$

- Całą hierarchię gęstości łącznych prawdopodobieństw można wyrazić tylko przez dwie funkcje: propagator $\rho_{1|1}$ oraz ρ_1 .

Równanie Chapmana–Kolmogorowa

- Niech $t_1 < t_2 < t_3$. Obowiązuje prawo składania propagatorów

$$\rho_{1|1}(x_1, t_1 | x_3, t_3) = \int_{\Omega} \rho_{1|1}(x_1, t_1 | x_2, t_2) \rho_{1|1}(x_2, t_2 | x_3, t_3) dx_2$$

- Niech $t_1 < t_2 < t_3$. Obowiązuje prawo składania propagatorów

$$\rho_{1|1}(x_1, t_1 | x_3, t_3) = \int_{\Omega} \rho_{1|1}(x_1, t_1 | x_2, t_2) \rho_{1|1}(x_2, t_2 | x_3, t_3) dx_2$$

- Wersja różniczkowa dla $t' > t$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{1|1}(x, t | x', t') = A(t) [\rho_{1|1}(x, t | x', t')]$$

gdzie $A(t)$ jest operatorem Liouville'a działającym na $\rho_{1|1}$.

Równanie Chapmana–Kolmogorowa

- Niech $t_1 < t_2 < t_3$. Obowiązuje prawo składania propagatorów

$$\rho_{1|1}(x_1, t_1 | x_3, t_3) = \int_{\Omega} \rho_{1|1}(x_1, t_1 | x_2, t_2) \rho_{1|1}(x_2, t_2 | x_3, t_3) dx_2$$

- Wersja różniczkowa dla $t' > t$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{1|1}(x, t | x', t') = A(t) [\rho_{1|1}(x, t | x', t')]$$

gdzie $A(t)$ jest operatorem Liouville'a działającym na $\rho_{1|1}$.

- Jeśli proces Markowa jest jednorodny, tzn. $\rho_{1|1}$ zależy tylko od $t' - t = \tau$, to

$$\rho_{1|1}(x, x', \tau) = \exp(\tau A) \delta(x - x')$$

oraz

$$\rho(x, \tau) = \exp(\tau A) \rho(x, 0)$$

- $\exp(\tau A)$ może nie być odwracalny w całej dziedzinie — **wprowadza to nieodwracalność ewolucji!**

Ewolucja deterministyczna

- Niech $x \in \mathbb{R}^n$ oraz $\Phi_t(x)$ oznacza rozwiązanie szczególne dynamiki

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x$$

tzn. trajektorię dynamiki przechodzącą przez punkt x .

- Niech $x \in \mathbb{R}^n$ oraz $\Phi_t(x)$ oznacza rozwiązanie szczególne dynamiki

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x$$

tzn. trajektorię dynamiki przechodzącą przez punkt x .

- Wówczas propagator jest postaci

$$\rho_{1|1}(x, t|x', t') = \delta(x - \Phi_{t'-t}(x'))$$

- Niech $x \in \mathbb{R}^n$ oraz $\Phi_t(x)$ oznacza rozwiązanie szczególne dynamiki

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x$$

tzn. trajektorię dynamiki przechodzącą przez punkt x .

- Wówczas propagator jest postaci

$$\rho_{1|1}(x, t | x', t') = \delta(x - \Phi_{t'-t}(x'))$$

- Taki propagator spełnia równanie Chapmana–Kolmogorowa dzięki temu, że rodzina $\{\Phi_t\}_t$ tworzy grupę
- Wówczas dynamika jest odwracalna dla każdego warunku początkowego $\rho(x, 0)$ oraz

$$A = -\operatorname{div} f = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

- Proces stochastyczny o dyskretnych chwilach czasu i dyskretnych zmiennych losowych

$$f_{t_s} = \{f_{n,s}\}, \quad n = 1, \dots, N, \quad t_s = s\tau$$

- Proces stochastyczny o dyskretnych chwilach czasu i dyskretnych zmiennych losowych

$$f_{t_s} = \{f_{n,s}\}, \quad n = 1, \dots, N, \quad t_s = s\tau$$

- Niech $p(n, s)$ oznacza prawdopodobieństwo uzyskania wartości f_n w chwili s
- $p(n, s)$ i $p_{1|1}(n_1, s_1 | n_2, s_2)$ w pełni określają łańcuch Markowa
- Równanie Chapmana–Kolmogorowa przyjmuje postać

$$p_{1|1}(n_1, s_1 | n_3, s_3) = \sum_{m=1}^N p_{1|1}(n_1, s_1 | m, s) p_{1|1}(m, s | n_3, s_3)$$

- Proces stochastyczny o dyskretnych chwilach czasu i dyskretnych zmiennych losowych

$$f_{t_s} = \{f_{n,s}\}, \quad n = 1, \dots, N, \quad t_s = s\tau$$

- Niech $p(n, s)$ oznacza prawdopodobieństwo uzyskania wartości f_n w chwili s
- $p(n, s)$ i $p_{1|1}(n_1, s_1 | n_2, s_2)$ w pełni określają łańcuch Markowa
- Równanie Chapmana–Kolmogorowa przyjmuje postać

$$p_{1|1}(n_1, s_1 | n_3, s_3) = \sum_{m=1}^N p_{1|1}(n_1, s_1 | m, s) p_{1|1}(m, s | n_3, s_3)$$

- i w szczególności

$$p_{1|1}(n, s | m, s+1) = \sum_{j=1}^N p_{1|1}(n, s | j, s) p_{1|1}(j, s | m, s+1)$$

$$p(n, s+1) = \sum_{j=1}^N p(j, s) p_{1|1}(j, s | n, s+1)$$

Macierz przejścia

Macierz przejścia

- Macierz przejścia pełni rolę propagatora

$$Q_{nm}(s) = p_{1|1}(n, s|m, s+1)$$

Macierz przejścia

- Macierz przejścia pełni rolę propagatora

$$Q_{nm}(s) = p_{1|1}(n, s|m, s+1)$$

- Załóżmy, że macierz przejścia nie zależy od czasu

$$Q(s) = \text{const.} = Q$$

- Wówczas

$$Q_{nm} = p_{1|1}(n, s|m, s+1) = p_{1|1}(n, 0|m, 1)$$

- oraz rozwiązanie równania Chapmana-Kolmogorowa ma postać

$$p_{1|1}(n, s_0|m, s) = (Q^{s-s_0})_{nm}$$

Macierz przejścia

- Macierz przejścia pełni rolę propagatora

$$Q_{nm}(s) = p_{1|1}(n, s|m, s+1)$$

- Załóżmy, że macierz przejścia nie zależy od czasu

$$Q(s) = \text{const.} = Q$$

- Wówczas

$$Q_{nm} = p_{1|1}(n, s|m, s+1) = p_{1|1}(n, 0|m, 1)$$

- oraz rozwiązanie równania Chapmana-Kolmogorowa ma postać

$$p_{1|1}(n, s_0|m, s) = (Q^{s-s_0})_{nm}$$

- Ewolucja prawdopodobieństwa

$$p(n, s) = \sum_{m=1}^N p(m, 0)(Q^s)_{mn}$$

Własności macierzy przejścia

Własności macierzy przejścia

- 1 Q jest macierzą rzeczywistą, ale niesymetryczną. Wartości własne mogą być zespolone.

Własności macierzy przejścia

- 1 \mathcal{Q} jest macierzą rzeczywistą, ale niesymetryczną. Wartości własne mogą być zespolone.
- 2 Prawo- i lewostronne wektory własne

$$\mathcal{Q}|\psi_i\rangle = \lambda_i|\psi_i\rangle, \quad \langle\chi_i|\mathcal{Q} = \lambda_i\langle\chi_i|$$

tworzą układ zupełny

$$\sum_{i=1}^N |\psi_i\rangle\langle\chi_i| = \mathbb{1}$$

oraz ortogonalny

$$\langle\psi_i|\chi_j\rangle = \delta_{ij}$$

Własności macierzy przejścia

- 1 \mathcal{Q} jest macierzą rzeczywistą, ale niesymetryczną. Wartości własne mogą być zespolone.
- 2 Prawo- i lewostronne wektory własne

$$\mathcal{Q}|\psi_i\rangle = \lambda_i|\psi_i\rangle, \quad \langle\chi_i|\mathcal{Q} = \lambda_i\langle\chi_i|$$

tworzą układ zupełny

$$\sum_{i=1}^N |\psi_i\rangle\langle\chi_i| = \mathbb{1}$$

oraz ortogonalny

$$\langle\psi_i|\chi_j\rangle = \delta_{ij}$$

- 3 Wartości własne λ_i spełniają relację $|\lambda_i| \leq 1, i = 1, \dots, N$, przy czym $\lambda_1 = 1$ odpowiada prawostronny wektor własny o składowych

$$\psi_1(n) = \sum_{m=1}^N \mathcal{Q}_{nm} \psi_1(m) = 1$$

oraz lewostronny wektor własny o składowych

$$\chi_1(n) = \sum_{m=1}^N \mathcal{Q}_{mn} \chi_1(m)$$

Własności macierzy przejścia

4 Rozkład spektralny

$$\mathcal{Q} = \sum_{i=1}^N \lambda_i |\psi_i\rangle \langle \chi_i|, \quad \mathcal{Q}_{mn} = \sum_{i=1}^N \lambda_i \psi_i(m) \chi_i(n)$$

5 Rozkład spektralny określa postać propagatora

$$p_{1|1}(m, s_0 | n, s) = \sum_{i=1}^N \lambda_i^{s-s_0} \psi_i(m) \chi_i(n)$$

- **Def.** Macierz \mathcal{Q} jest regularna, jeśli istnieje naturalne M , takie że $(\mathcal{Q}^M)_{mn} \neq 0$ dla wszystkich m, n .

Własności macierzy przejścia

4 Rozkład spektralny

$$Q = \sum_{i=1}^N \lambda_i |\psi_i\rangle \langle \chi_i|, \quad Q_{mn} = \sum_{i=1}^N \lambda_i \psi_i(m) \chi_i(n)$$

5 Rozkład spektralny określa postać propagatora

$$p_{1|1}(m, s_0 | n, s) = \sum_{i=1}^N \lambda_i^{s-s_0} \psi_i(m) \chi_i(n)$$

- **Def.** Macierz Q jest regularna, jeśli istnieje naturalne M , takie że $(Q^M)_{mn} \neq 0$ dla wszystkich m, n .

Twierdzenie

Jeśli macierz przejścia Q jest regularna, to prawdopodobieństwo $p(n, s)$ zmierza przy $s \rightarrow \infty$ do stanu stacjonarnego wyznaczonego przez lewostronny wektor własny $\langle \chi_1 |$ do wartości własnej $\lambda_1 = 1$.

Błądzenie przypadkowe na prostej

- Położenie na prostej x przy skokach o $\pm\Delta$ co przedział czasu τ
- Niech $p(n\Delta, s\tau)$ opisuje prawdopodobieństwo znalezienia się w punkcie $x = n\Delta$ po s skokach

Błądzenie przypadkowe na prostej

- Położenie na prostej x przy skokach o $\pm\Delta$ co przedział czasu τ
- Niech $p(n\Delta, s\tau)$ opisuje prawdopodobieństwo znalezienia się w punkcie $x = n\Delta$ po s skokach
- Z równania Chapmana–Kolmogorowa

$$p(n\Delta, (s+1)\tau) = p((n+1)\Delta, s\tau)p_{1|1}((n+1)\Delta, s\tau|n\Delta, (s+1)\tau) + p((n-1)\Delta, s\tau)p_{1|1}((n-1)\Delta, s\tau|n\Delta, (s+1)\tau)$$

Błądzenie przypadkowe na prostej

- Położenie na prostej x przy skokach o $\pm\Delta$ co przedział czasu τ
- Niech $p(n\Delta, s\tau)$ opisuje prawdopodobieństwo znalezienia się w punkcie $x = n\Delta$ po s skokach
- Z równania Chapmana–Kolmogorowa

$$p(n\Delta, (s+1)\tau) = p((n+1)\Delta, s\tau)p_{1|1}((n+1)\Delta, s\tau|n\Delta, (s+1)\tau) + p((n-1)\Delta, s\tau)p_{1|1}((n-1)\Delta, s\tau|n\Delta, (s+1)\tau)$$

- Załóżmy, że

$$p_{1|1}((n+1)\Delta, s\tau|n\Delta, (s+1)\tau) = p_{1|1}((n-1)\Delta, s\tau|n\Delta, (s+1)\tau) = \frac{1}{2}$$

- Wówczas

Błądzenie przypadkowe na prostej

- Położenie na prostej x przy skokach o $\pm\Delta$ co przedział czasu τ
- Niech $p(n\Delta, s\tau)$ opisuje prawdopodobieństwo znalezienia się w punkcie $x = n\Delta$ po s skokach
- Z równania Chapmana–Kolmogorowa

$$p(n\Delta, (s+1)\tau) = p((n+1)\Delta, s\tau)p_{1|1}((n+1)\Delta, s\tau|n\Delta, (s+1)\tau) + p((n-1)\Delta, s\tau)p_{1|1}((n-1)\Delta, s\tau|n\Delta, (s+1)\tau)$$

- Załóżmy, że

$$p_{1|1}((n+1)\Delta, s\tau|n\Delta, (s+1)\tau) = p_{1|1}((n-1)\Delta, s\tau|n\Delta, (s+1)\tau) = \frac{1}{2}$$

- Wówczas

$$p(n\Delta, (s+1)\tau) = \frac{1}{2}p((n+1)\Delta, s\tau) + \frac{1}{2}p((n-1)\Delta, s\tau)$$

Granica ciągłego błędzenia

- Rozważmy granicę

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \rightarrow 0 \\ \tau \rightarrow 0 \end{array} \right. \quad \text{tak aby} \quad \frac{\Delta^2}{2\tau} = \text{const.} = D$$

- Rozważmy granicę

$$\begin{cases} \Delta \rightarrow 0 \\ \tau \rightarrow 0 \end{cases} \quad \text{tak aby} \quad \frac{\Delta^2}{2\tau} = \text{const.} = D$$

- Mamy

$$\frac{p(n\Delta, (s+1)\tau) - p(n\Delta, s\tau)}{\tau} = \frac{\Delta^2}{2\tau} \frac{p((n+1)\Delta, s\tau) + p((n-1)\Delta, s\tau) - 2p(n\Delta, s\tau)}{\Delta^2}$$

i w rozważanej granicy dostaniemy **równanie dyfuzji**

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2}$$

którego rozwiązanie przy warunku początkowym $p(x, 0) = \delta(x)$ ma postać

$$p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$$

Równanie fundamentalne (Master equation)

Równanie fundamentalne (Master equation)

- Równanie fundamentalne to ciągle w czasie odpowiednik równania Chapmana-Kolmogorowa

$$p(n, t + \Delta t) = \sum_{m=1}^N p(m, t) p_{1|1}(m, t | n, t + \Delta t)$$

- Przekształcić je można do postaci

$$\frac{p(n, t + \Delta t) - p(n, t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \sum_{m=1}^N p(m, t) [p_{1|1}(m, t | n, t + \Delta t) - \delta_{mn}]$$

- Rozwijając propagator w szereg (W — macierz przejścia)

$$p_{1|1}(m, t | n, t + \Delta t) = \delta_{mn} + W_{m,n} \Delta t + \dots$$

i biorąc granicę $\Delta t \rightarrow 0$

$$\frac{\partial p(n, t)}{\partial t} = \sum_{m=1}^N p(m, t) W_{m,n}(t)$$

otrzymamy **równanie fundamentalne**

Szybkości przejść

- Wprowadźmy szybkości przejść w_{mn} (transition probability rates)

$$W_{m,n}(t) = w_{mn}(t) - \delta_{mn} \sum_{k=1}^N w_{nk}(t)$$

- Wówczas

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(n,t)}{\partial t} &= \sum_{m=1}^N p(m,t) [w_{mn}(t) - \delta_{mn} \sum_{k=1}^N w_{nk}(t)] \\ &= \sum_{m=1}^N \left[p(m,t) w_{mn}(t) - p(n,t) w_{nm}(t) \right] \end{aligned}$$

Szybkości przejść

- Wprowadźmy szybkości przejść w_{mn} (transition probability rates)

$$W_{m,n}(t) = w_{mn}(t) - \delta_{mn} \sum_{k=1}^N w_{nk}(t)$$

- Wówczas

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(n,t)}{\partial t} &= \sum_{m=1}^N p(m,t) [w_{mn}(t) - \delta_{mn} \sum_{k=1}^N w_{nk}(t)] \\ &= \sum_{m=1}^N [p(m,t)w_{mn}(t) - p(n,t)w_{nm}(t)] \end{aligned}$$

- Bilans zmiany prawdopodobieństwa

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{szybkość zmiany} \\ \text{prawdopodobieństwa w stanie } n \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{przejścia ze stanów } m \rightarrow n \\ \text{z szybkościami } w_{mn} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{przejścia ze stanu } n \rightarrow m \\ \text{z szybkościami } w_{nm} \end{array} \right\}$$

Ruchy Browna i równanie Langevina

- Cząstka o jednostkowej masie pod wpływem stochastycznej siły $\xi(t)$ i oporu ruchu typu Stokesa

- Cząstka o jednostkowej masie pod wpływem stochastycznej siły $\xi(t)$ i oporu ruchu typu Stokesa
- Równanie Langevina

$$\begin{cases} \dot{v}(t) &= -\gamma v(t) + \xi(t) \\ \dot{x}(t) &= v(t) \end{cases}$$

- Cząstka o jednostkowej masie pod wpływem stochastycznej siły $\xi(t)$ i oporu ruchu typu Stokesa
- Równanie Langevina

$$\begin{cases} \dot{v}(t) &= -\gamma v(t) + \xi(t) \\ \dot{x}(t) &= v(t) \end{cases}$$

- O procesie stochastycznym $\xi(t)$ zakładamy, że

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle = g\delta(t_1 - t_2)$$

Jest to tzw. **biały szum**.

- $x(t)$ oraz $v(t)$ są procesami stochastycznymi.

- Rozwiązanie

$$v(t) = v_0 e^{-\gamma t} + \int_0^t \xi(s) e^{-\gamma(t-s)} ds$$

$$x(t) = x_0 + \frac{v_0}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) + \frac{1}{\gamma} \int_0^t (1 - e^{-\gamma(t-s)}) \xi(s) ds$$

- Rozwiązanie

$$v(t) = v_0 e^{-\gamma t} + \int_0^t \xi(s) e^{-\gamma(t-s)} ds$$

$$x(t) = x_0 + \frac{v_0}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) + \frac{1}{\gamma} \int_0^t (1 - e^{-\gamma(t-s)}) \xi(s) ds$$

- Wartości średnie

$$\begin{aligned}\langle v(t) \rangle &= v_0 e^{-\gamma t} \\ \langle x(t) - x_0 \rangle &= \frac{v_0}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t})\end{aligned}$$

- Funkcja korelacji prędkości

$$\langle v(t_1)v(t_2) \rangle = \left(v_0^2 - \frac{g}{2\gamma} \right) e^{-\gamma(t_1+t_2)} + \frac{g}{2\gamma} e^{-\gamma(t_2-t_1)}$$

- Dyspersja położenia

$$\langle (x(t) - x_0)^2 \rangle = \frac{1}{\gamma^3} (\gamma g t + \gamma v_0^2 - 3/2g) + \frac{2}{\gamma^3} e^{-\gamma t} (g - \gamma v_0) + \frac{1}{\gamma^3} e^{-2\gamma t} (\gamma v_0^2 - 1/2g)$$

- Dodatkowe założenie, że stan układu po długim czasie powinien być w równowadze termodynamicznej z rezerwuarem o temperaturze T , wymaga aby

- 1 $\frac{1}{2} \langle v_0^2 \rangle_T = \frac{1}{2} kT$

- 2 funkcje korelacji po uśrednieniu termodynamicznym zależały tylko od różnicy czasów $t_1 - t_2$ (stan stacjonarny)

$$v_0^2 = \frac{g}{2\gamma} \implies g = 2\gamma kT$$

- Dodatkowe założenie, że stan układu po długim czasie powinien być w równowadze termodynamicznej z rezerwuarem o temperaturze T , wymaga aby

❶ $\frac{1}{2} \langle v_0^2 \rangle_T = \frac{1}{2} kT$

- ❷ funkcje korelacji po uśrednieniu termodynamicznym zależały tylko od różnicy czasów $t_1 - t_2$ (stan stacjonarny)

$$v_0^2 = \frac{g}{2\gamma} \implies g = 2\gamma kT$$

- Wówczas w granicy długiego czasu

$$\langle\langle (x(t) - x_0)^2 \rangle\rangle_T \sim \frac{g}{\gamma^2} t = \frac{2kT}{\gamma} t$$

- Dodatkowe założenie, że stan układu po długim czasie powinien być w równowadze termodynamicznej z rezerwuarem o temperaturze T , wymaga aby

❶ $\frac{1}{2} \langle v_0^2 \rangle_T = \frac{1}{2} kT$

- ❷ funkcje korelacji po uśrednieniu termodynamicznym zależały tylko od różnicy czasów $t_1 - t_2$ (stan stacjonarny)

$$v_0^2 = \frac{g}{2\gamma} \implies g = 2\gamma kT$$

- Wówczas w granicy długiego czasu

$$\langle\langle (x(t) - x_0)^2 \rangle\rangle_T \sim \frac{g}{\gamma^2} t = \frac{2kT}{\gamma} t$$

- Porównując z błędzeniem przypadkowym w 1D można wyznaczyć stałą dyfuzji

$$D = \frac{kT}{\gamma}$$

