

Gazy kwantowe

Jacek Jurkowski, Fizyka Statystyczna

Instytut Fizyki

2015

Wyznaczenie

- średniego obsadzenia
- średniej energii
- równania stanu

dla nieoddziałujących gazów kwantowych

- fermionowego (gaz elektronowy w ciele stałym)
- bozonowego (kondensaty)
- fotonowego (promieniowanie termiczne)
- fononowego (drżania sieci krystalicznej)

Założenia modelu

- układ nierozróżnialnych cząstek o dyskretnym widmie hamiltonianu E_1, E_2, \dots (dla uproszczenia założmy brak degeneracji!)

Założenia modelu

- układ nierozróżnialnych cząstek o dyskretnym widmie hamiltonianu E_1, E_2, \dots (dla uproszczenia założymy brak degeneracji!)
- energię E_k ma N_k cząstek, $N_k = 0, 1, 2, \dots$

Założenia modelu

- układ nierozróżnialnych cząstek o dyskretnym widmie hamiltonianu E_1, E_2, \dots (dla uproszczenia założymy brak degeneracji!)
- energię E_k ma N_k cząstek, $N_k = 0, 1, 2, \dots$
- całkowita liczba cząstek w układzie $N = \sum_k N_k$ oraz energia układu $U = \sum_k N_k E_k$

Założenia modelu

- układ nierozróżnialnych cząstek o dyskretnym widmie hamiltonianu E_1, E_2, \dots (dla uproszczenia założymy brak degeneracji!)
- energię E_k ma N_k cząstek, $N_k = 0, 1, 2, \dots$
- całkowita liczba cząstek w układzie $N = \sum_k N_k$ oraz energia układu $U = \sum_k N_k E_k$
- przestrzeń Hilberta budujemy z wektorów konfiguracji

$$\psi_{N_1, N_2, \dots} = |N_1, N_2, \dots\rangle = |\underline{N}\rangle$$

tzw. **reprezentacja liczby obsadzeń**

Założenia modelu

- układ nierozróżnialnych cząstek o dyskretnym widmie hamiltonianu E_1, E_2, \dots (dla uproszczenia założymy brak degeneracji!)
- energię E_k ma N_k cząstek, $N_k = 0, 1, 2, \dots$
- całkowita liczba cząstek w układzie $N = \sum_k N_k$ oraz energia układu $U = \sum_k N_k E_k$
- przestrzeń Hilberta budujemy z wektorów konfiguracji

$$\psi_{N_1, N_2, \dots} = |N_1, N_2, \dots\rangle = |\underline{N}\rangle$$

tzw. **reprezentacja liczby obsadzeń**

- wprowadzamy **operator całkowitej liczby cząstek** w układzie $\hat{N} = \sum_k \hat{N}_k$ oraz **operator Hamiltona** $\hat{H} = \sum_k E_k \hat{N}_k$, dla których wektory konfiguracji $|\underline{N}\rangle$ są wektorami własnymi

Reprezentacja liczby obsadzeń

- Prawdopodobieństwo konfiguracji \underline{N} określone jest jako

$$p(\underline{N}) = \mathcal{Z}^{-1}(\beta, \mu) \exp \left[\sum_k \beta(\mu - E_k) N_k \right]$$

- Prawdopodobieństwo konfiguracji \underline{N} określone jest jako

$$p(\underline{N}) = \mathcal{Z}^{-1}(\beta, \mu) \exp \left[\sum_k \beta(\mu - E_k) N_k \right]$$

- Wielka suma statystyczna

$$\mathcal{Z}(\beta, \mu) = \text{Tr} \exp \left[\beta(\mu \hat{N} - \hat{H}) \right] = \sum_{\{N\}} \exp \left[\sum_k \beta(\mu - E_k) N_k \right]$$

$$\mathcal{Z}(\beta, \mu) = \prod_k \left[1 \pm e^{\beta(\mu - E_k)} \right]^{\pm 1}$$

- Prawdopodobieństwo konfiguracji \underline{N} określone jest jako

$$p(\underline{N}) = \mathcal{Z}^{-1}(\beta, \mu) \exp \left[\sum_k \beta(\mu - E_k) N_k \right]$$

- Wielka suma statystyczna

$$\mathcal{Z}(\beta, \mu) = \text{Tr} \exp \left[\beta(\mu \hat{N} - \hat{H}) \right] = \sum_{\{N\}} \exp \left[\sum_k \beta(\mu - E_k) N_k \right]$$

$$\mathcal{Z}(\beta, \mu) = \prod_k \left[1 \pm e^{\beta(\mu - E_k)} \right]^{\pm 1}$$

- W ogólności trzeba wziąć pod uwagę degenerację poziomów energetycznych przy konstrukcji przestrzeni Hilberta układu!

- Statystyka Bose-Einsteina

$$\begin{cases} N &= \sum_i \frac{g_i}{z^{-1}e^{\beta E_i} - 1} \\ U &= \sum_i \frac{g_i E_i}{z^{-1}e^{\beta E_i} - 1} \end{cases}$$

$z = e^{\beta\mu}$, μ — potencjał chemiczny

- Statystyka Bose-Einsteina

$$\begin{cases} N &= \sum_i \frac{g_i}{z^{-1}e^{\beta E_i} - 1} \\ U &= \sum_i \frac{g_i E_i}{z^{-1}e^{\beta E_i} - 1} \end{cases}$$

$z = e^{\beta\mu}$, μ — potencjał chemiczny

- Statystyka Fermiego-Diraca

$$\begin{cases} N &= \sum_i \frac{g_i}{z^{-1}e^{\beta E_i} + 1} \\ U &= \sum_i \frac{g_i E_i}{z^{-1}e^{\beta E_i} + 1} \end{cases}$$

- Obsadzenie stanu dla fermionów

$$N_k = \frac{g_k}{e^{\beta(E_k - \mu)} + 1}$$

- Obsadzenie stanu dla fermionów

$$N_k = \frac{g_k}{e^{\beta(E_k - \mu)} + 1}$$

- W granicy zerowej temperatury

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} N_k = \begin{cases} 0 & E_k > \mu \\ g_k & E_k < \mu \end{cases}$$

- Obsadzenie stanu dla fermionów

$$N_k = \frac{g_k}{e^{\beta(E_k - \mu)} + 1}$$

- W granicy zerowej temperatury

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} N_k = \begin{cases} 0 & E_k > \mu \\ g_k & E_k < \mu \end{cases}$$

- Potencjał chemiczny μ w 0 K w przypadku fermionów odgrywa rolę **energii Fermiego!**

Kondensacja Bosego Einsteina

- Obsadzenie stanów dla bozonów

$$N = \sum_{k \neq 0} \frac{g_k}{e^{\beta(E_k - \mu)} - 1} + \frac{g_0}{e^{\beta(E_0 - \mu)} - 1}$$

- Obsadzenie stanów dla bozonów

$$N = \sum_{k \neq 0} \frac{g_k}{e^{\beta(E_k - \mu)} - 1} + \frac{g_0}{e^{\beta(E_0 - \mu)} - 1}$$

- Przyjmując $0 = E_0 < E_1 \leq E_2 \leq \dots E_k \leq \dots$ i oznaczając $z = e^{\beta\mu} \neq 1$ mamy

$$N = \frac{g_0}{z^{-1} - 1} + \sum_{k \neq 0} \frac{g_k}{z^{-1} e^{\beta E_k} - 1}$$

- Obsadzenie stanów dla bozonów

$$N = \sum_{k \neq 0} \frac{g_k}{e^{\beta(E_k - \mu)} - 1} + \frac{g_0}{e^{\beta(E_0 - \mu)} - 1}$$

- Przyjmując $0 = E_0 < E_1 \leq E_2 \leq \dots E_k \leq \dots$ i oznaczając $z = e^{\beta\mu} \neq 1$ mamy

$$N = \frac{g_0}{z^{-1} - 1} + \sum_{k \neq 0} \frac{g_k}{z^{-1} e^{\beta E_k} - 1}$$

- W granicy zerowej temperatury mamy

$$\forall k \neq 0 \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} N_k = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{g_k}{z^{-1} e^{\beta E_k} - 1} = 0$$

- Obsadzenie stanów dla bozonów

$$N = \sum_{k \neq 0} \frac{g_k}{e^{\beta(E_k - \mu)} - 1} + \frac{g_0}{e^{\beta(E_0 - \mu)} - 1}$$

- Przyjmując $0 = E_0 < E_1 \leq E_2 \leq \dots E_k \leq \dots$ i oznaczając $z = e^{\beta\mu} \neq 1$ mamy

$$N = \frac{g_0}{z^{-1} - 1} + \sum_{k \neq 0} \frac{g_k}{z^{-1} e^{\beta E_k} - 1}$$

- W granicy zerowej temperatury mamy

$$\forall k \neq 0 \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} N_k = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{g_k}{z^{-1} e^{\beta E_k} - 1} = 0$$

- Cząstki kondensują w stanie o minimalnej energii!

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} N = N_0$$

Obsadzenie i średnia energia w przybliżeniu półklasycznym

Obsadzenie i średnia energia w przybliżeniu półklasycznym

- Obsadzenie stanów dla fermionów i bozonów

$$N = \sum_k \frac{g_k}{e^{\beta(E_k - \mu)} \pm 1} = \sum_k \frac{g_k}{z^{-1} e^{\beta E_k} \pm 1}$$

Obsadzenie i średnia energia w przybliżeniu półklasycznym

- Obsadzenie stanów dla fermionów i bozonów

$$N = \sum_k \frac{g_k}{e^{\beta(E_k - \mu)} \pm 1} = \sum_k \frac{g_k}{z^{-1} e^{\beta E_k} \pm 1}$$

- Średnia energia układu fermionów i bozonów

$$U = \sum_k \frac{g_k E_k}{e^{\beta(E_k - \mu)} \pm 1} = \sum_k \frac{g_k E_k}{z^{-1} e^{\beta E_k} \pm 1}$$

Obsadzenie i średnia energia w przybliżeniu półklasycznym

- Obsadzenie stanów dla fermionów i bozonów

$$N = \sum_k \frac{g_k}{e^{\beta(E_k - \mu)} \pm 1} = \sum_k \frac{g_k}{z^{-1} e^{\beta E_k} \pm 1}$$

- Średnia energia układu fermionów i bozonów

$$U = \sum_k \frac{g_k E_k}{e^{\beta(E_k - \mu)} \pm 1} = \sum_k \frac{g_k E_k}{z^{-1} e^{\beta E_k} \pm 1}$$

Przybliżenie półklasyczne

Obsadzenie i średnia energia w przybliżeniu półklasycznym

- Obsadzenie stanów dla fermionów i bozonów

$$N = \sum_k \frac{g_k}{e^{\beta(E_k - \mu)} \pm 1} = \sum_k \frac{g_k}{z^{-1} e^{\beta E_k} \pm 1}$$

- Średnia energia układu fermionów i bozonów

$$U = \sum_k \frac{g_k E_k}{e^{\beta(E_k - \mu)} \pm 1} = \sum_k \frac{g_k E_k}{z^{-1} e^{\beta E_k} \pm 1}$$

Przybliżenie półklasyczne

Przybliżenie półklasyczne polega na przybliżeniu sumy przez całki względem ciągłego rozkładu prawdopodobieństwa $g(E)$ rozkładu poziomów energetycznych

$$\sum_k g_k \dots \longrightarrow \int_0^{\infty} g(E) \dots dE$$

Obsadzenie i średnia energia w przybliżeniu półklasycznym

- Obsadzenie stanów dla fermionów i bozonów

$$N = \sum_k \frac{g_k}{e^{\beta(E_k - \mu)} \pm 1} = \sum_k \frac{g_k}{z^{-1} e^{\beta E_k} \pm 1}$$

- Średnia energia układu fermionów i bozonów

$$U = \sum_k \frac{g_k E_k}{e^{\beta(E_k - \mu)} \pm 1} = \sum_k \frac{g_k E_k}{z^{-1} e^{\beta E_k} \pm 1}$$

Przybliżenie półklasyczne

Przybliżenie półklasyczne polega na przybliżeniu sumy przez całki względem ciągłego rozkładu prawdopodobieństwa $g(E)$ rozkładu poziomów energetycznych

$$\sum_k g_k \dots \longrightarrow \int_0^{\infty} g(E) \dots dE$$

- Pozostaje obliczyć E_k oraz $g(E)$ dla konkretnych modeli!

Swobodna cząstka kwantowa w sześcienniej studni o krawędzi l

- Równanie Schrödingera dla cząstki w pudle

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$$

- Równanie Schrödingera dla cząstki w pudle

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$$

- Rozwiązanie tego równania znikające na ścianach sześcianu ma postać

$$\psi(x, y, z) = C \sin\left(\frac{n_1\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{n_2\pi}{l}y\right) \sin\left(\frac{n_3\pi}{l}z\right)$$

- Równanie Schrödingera dla cząstki w pudle

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$$

- Rozwiązanie tego równania znikające na ścianach sześcianu ma postać

$$\psi(x, y, z) = C \sin\left(\frac{n_1\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{n_2\pi}{l}y\right) \sin\left(\frac{n_3\pi}{l}z\right)$$

- Energia jest skwantowana i wyznaczona przez trzy liczby naturalne (n_1, n_2, n_3)

$$E_{n_1, n_2, n_3} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)$$

Liczba stanów

Ponieważ każdy stan zajmuje w przestrzeni (n_1, n_2, n_3) jednostkową objętość, to liczba stanów $N(E)$ o energii mniejszej niż E wynosi 1/8 objętości kuli o równaniu

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = R^2 = \left(\frac{l}{\pi \hbar} \sqrt{2mE} \right)^2$$

Liczba stanów

Ponieważ każdy stan zajmuje w przestrzeni (n_1, n_2, n_3) jednostkową objętość, to liczba stanów $N(E)$ o energii mniejszej niż E wynosi 1/8 objętości kuli o równaniu

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = R^2 = \left(\frac{l}{\pi \hbar} \sqrt{2mE} \right)^2$$

- Liczba stanów energetycznych

$$N(E) = \frac{1}{6} \pi R^3 = \frac{l^3 (2m)^{3/2}}{6\pi^2 \hbar^3} E^{3/2}$$

Gęstość stanów energetycznych

- Gęstość stanów energetycznych

$$g(E) = \frac{dN(E)}{dE} = \frac{l^3 (2m)^{3/2}}{4\pi^2 \hbar^3} E^{1/2}$$

- Gęstość stanów energetycznych

$$g(E) = \frac{dN(E)}{dE} = \frac{l^3 (2m)^{3/2}}{4\pi^2 \hbar^3} E^{1/2}$$

- Uwzględniając dodatkowe stopnie swobody (np. spinowe) otrzymamy ostatecznie

$$g(E) = g' \frac{V (2m)^{3/2}}{4\pi^2 \hbar^3} E^{1/2}$$

Liczba cząstek i energia dla gazów kwantowych

$$\frac{N(-N_0)}{V} = \frac{1}{V} \int_0^{\infty} g(E) \frac{dE}{z^{-1}e^{\beta E} \pm 1} = g' \lambda^{-3} f_{3/2}^{\pm}(z)$$

$$\frac{U}{V} = \frac{1}{V} \int_0^{\infty} g(E) \frac{E dE}{z^{-1}e^{\beta E} \pm 1} = \frac{3}{2} g' kT \lambda^{-3} f_{5/2}^{\pm}(z)$$

gdzie λ jest **termiczną długością fali** $\lambda = \sqrt{\frac{\beta \hbar^2}{2m\pi}}$ oraz $f_l^{\pm}(z)$ funkcją specjalną Fermiego-Diraca (+) lub Bosego-Einsteina (-)

$$f_l^{\pm}(z) = \frac{1}{\Gamma(l)} \int_0^{\infty} \frac{x^{l-1}}{z^{-1}e^x \pm 1} dx$$

$\Gamma(l)$ jest funkcją gamma Eulera $\Gamma(l) = \int_0^{\infty} x^{l-1} e^{-x} dx$.

1 Własności funkcji gamma Eulera

- $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$
- w szczególności dla $x = n \in \mathbb{N}$ otrzymamy $\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) = n!$ — uogólnienie silni
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

1 Własności funkcji gamma Eulera

- $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
- w szczególności dla $x = n \in \mathbb{N}$ otrzymamy $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$ — uogólnienie silni
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

2 Funkcje specjalne są zbieżne dla

- $0 \leq z < +\infty$ w przypadku fermionów ($f^+(z)$),
- $0 \leq z \leq 1$ w przypadku bozonów ($f^-(z)$)

i rosnące w całym obszarze zbieżności.

1 Własności funkcji gamma Eulera

- $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
- w szczególności dla $x = n \in \mathbb{N}$ otrzymamy $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$ — uogólnienie silni
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

2 Funkcje specjalne są zbieżne dla

- $0 \leq z < +\infty$ w przypadku fermionów ($f^+(z)$),
- $0 \leq z \leq 1$ w przypadku bozonów ($f^-(z)$)

i rosnące w całym obszarze zbieżności.

3 Rozwinięcia funkcji specjalnych $f^\pm(z)$

$$f_l^+(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n^l}, \quad f_l^-(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^l},$$

Równanie stanu dla gazów kwantowych

Równanie stanu dla gazów kwantowych

- W ramach wielkiego rozkładu kanonicznego dla gazu doskonałego mamy $pV = NkT$, czyli

$$\frac{pV}{kT} = N = \ln \mathcal{Z} = \pm \sum_k g_k \ln(1 \pm ze^{-\beta E_k})$$

Równanie stanu dla gazów kwantowych

- W ramach wielkiego rozkładu kanonicznego dla gazu doskonałego mamy $pV = NkT$, czyli

$$\frac{pV}{kT} = N = \ln \mathcal{Z} = \pm \sum_k g_k \ln(1 \pm ze^{-\beta E_k})$$

- W przybliżeniu półklasycznym

$$\begin{aligned} \frac{p}{kT} &= \begin{cases} \frac{g'}{4} \frac{(2m)^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{\infty} \sqrt{E} \ln[1 + ze^{-\beta E}] dE \\ -\frac{g'}{4} \frac{(2m)^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{\infty} \sqrt{E} \ln[1 - ze^{-\beta E}] dE - \frac{1}{V} \ln(1 - z) \end{cases} \\ &= \begin{cases} g' \lambda^{-3} f_{5/2}^+(z) \\ g' \lambda^{-3} f_{5/2}^-(z) - \frac{1}{V} \ln(1 - z) \end{cases} \end{aligned}$$

- Równania termodynamiki

$$\frac{1}{v} = g' \lambda^{-3} f_{3/2}^+(z), \quad u = \frac{3}{2} g' kT \lambda^{-3} f_{5/2}^+(z), \quad \frac{p}{kT} = g' \lambda^{-3} f_{5/2}^+(z)$$

$$\frac{pv}{kT} = \frac{f_{5/2}^+(z)}{f_{3/2}^+(z)}, \quad u = \frac{3}{2} p$$

$g' = 2$ (elektrony mają spin $1/2\hbar$)

- Równania termodynamiki

$$\frac{1}{v} = g' \lambda^{-3} f_{3/2}^+(z), \quad u = \frac{3}{2} g' kT \lambda^{-3} f_{5/2}^+(z), \quad \frac{p}{kT} = g' \lambda^{-3} f_{5/2}^+(z)$$

$$\frac{pv}{kT} = \frac{f_{5/2}^+(z)}{f_{3/2}^+(z)}, \quad u = \frac{3}{2} p$$

$g' = 2$ (elektrony mają spin $1/2\hbar$)

- Przypadek **słabego zwyrodnienia** $z = e^{\beta\mu} \ll 1$ odpowiada wysokim temperaturom i małym gęstościom

- Równania termodynamiki

$$\frac{1}{v} = g' \lambda^{-3} f_{3/2}^+(z), \quad u = \frac{3}{2} g' kT \lambda^{-3} f_{5/2}^+(z), \quad \frac{p}{kT} = g' \lambda^{-3} f_{5/2}^+(z)$$

$$\frac{pv}{kT} = \frac{f_{5/2}^+(z)}{f_{3/2}^+(z)}, \quad u = \frac{3}{2} p$$

$g' = 2$ (elektrony mają spin $1/2\hbar$)

- Przypadek **słabego zwyrodnienia** $z = e^{\beta\mu} \ll 1$ odpowiada wysokim temperaturom i małym gęstościom
- Funkcje specjalne mają wówczas rozwinięcia

$$f_{3/2}^+ = z \left(1 - \frac{z}{2\sqrt{2}} + \dots \right), \quad f_{5/2}^+ = z \left(1 - \frac{z}{4\sqrt{2}} + \dots \right)$$

- Równania termodynamiki

$$\frac{1}{v} = g' \lambda^{-3} f_{3/2}^+(z), \quad u = \frac{3}{2} g' kT \lambda^{-3} f_{5/2}^+(z), \quad \frac{p}{kT} = g' \lambda^{-3} f_{5/2}^+(z)$$

$$\frac{pv}{kT} = \frac{f_{5/2}^+(z)}{f_{3/2}^+(z)}, \quad u = \frac{3}{2} p$$

$g' = 2$ (elektrony mają spin $1/2\hbar$)

- Przypadek **słabego zwyrodnienia** $z = e^{\beta\mu} \ll 1$ odpowiada wysokim temperaturom i małym gęstościom
- Funkcje specjalne mają wówczas rozwinięcia

$$f_{3/2}^+ = z \left(1 - \frac{z}{2\sqrt{2}} + \dots \right), \quad f_{5/2}^+ = z \left(1 - \frac{z}{4\sqrt{2}} + \dots \right)$$

- Rozwinięcie wirialne z czysto kwantową poprawką

$$\frac{pv}{kT} = 1 + \frac{z}{4\sqrt{2}} + \dots = 1 + \frac{\lambda^3}{8\sqrt{2}} \left(\frac{1}{v} \right) + \dots$$

Gaz elektronowy w metalu: silne zwyrodnienie

- W niskich temperaturach i przy dużych gęstościach występuje **silne zwyrodnienie**, tzn. $z \gg 1$. Stosuje się wówczas rozwinięcie

$$f_{3/2}^+(z) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left((\ln z)^{3/2} + \frac{\pi^2}{8} (\ln z)^{-1/2} + \dots \right)$$

- W niskich temperaturach i przy dużych gęstościach występuje **silne zwyrodnienie**, tzn. $z \gg 1$. Stosuje się wówczas rozwinięcie

$$f_{3/2}^+(z) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left((\ln z)^{3/2} + \frac{\pi^2}{8} (\ln z)^{-1/2} + \dots \right)$$

- Wówczas w najniższym rzędzie

$$\frac{\lambda^3}{v} \approx \frac{8}{3\sqrt{\pi}} (\ln z)^{3/2}, \quad z \approx e^{\beta E_F}$$

gdzie E_F jest energią Fermiego

- W niskich temperaturach i przy dużych gęstościach występuje **silne zwyrodnienie**, tzn. $z \gg 1$. Stosuje się wówczas rozwinięcie

$$f_{3/2}^+(z) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left((\ln z)^{3/2} + \frac{\pi^2}{8} (\ln z)^{-1/2} + \dots \right)$$

- Wówczas w najniższym rzędzie

$$\frac{\lambda^3}{v} \approx \frac{8}{3\sqrt{\pi}} (\ln z)^{3/2}, \quad z \approx e^{\beta E_F}$$

gdzie E_F jest energią Fermiego

- Przy ustalonej koncentracji elektronów $1/v$ energię Fermiego można znaleźć z relacji

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi^2}{v} \right)^{2/3}$$

Temperatura Fermiego

Temperatura Fermiego

Temperatura Fermiego $T_F = E_F/k$ klasyfikuje zachowanie się gazu elektronowego

Temperatura Fermiego $T_F = E_F/k$ klasyfikuje zachowanie się gazu elektronowego

- Typowa wartość temperatury Fermiego w metalach $T_F \sim 10^4$ K

Temperatura Fermiego $T_F = E_F/k$ klasyfikuje zachowanie się gazu elektronowego

- Typowa wartość temperatury Fermiego w metalach $T_F \sim 10^4$ K
- gaz klasyczny (niezwyrodniały) — dla $T \gg T_F$

Temperatura Fermiego $T_F = E_F/k$ klasyfikuje zachowanie się gazu elektronowego

- Typowa wartość temperatury Fermiego w metalach $T_F \sim 10^4$ K
- gaz klasyczny (niezwyrodniały) — dla $T \gg T_F$
- gaz kwantowy (zwyrodniały) — dla $T \ll T_F$

Temperatura Fermiego

Temperatura Fermiego $T_F = E_F/k$ klasyfikuje zachowanie się gazu elektronowego

- Typowa wartość temperatury Fermiego w metalach $T_F \sim 10^4$ K
- gaz klasyczny (niezwyrodniały) — dla $T \gg T_F$
- gaz kwantowy (zwyrodniały) — dla $T \ll T_F$

Poprawki związane ze zwyrodnieniem

Temperatura Fermiego

Temperatura Fermiego $T_F = E_F/k$ klasyfikuje zachowanie się gazu elektronowego

- Typowa wartość temperatury Fermiego w metalach $T_F \sim 10^4$ K
- gaz klasyczny (niezwyrodniały) — dla $T \gg T_F$
- gaz kwantowy (zwyrodniały) — dla $T \ll T_F$

Poprawki związane ze zwyrodnieniem

- potencjał chemiczny:
$$\mu = E_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 + \dots \right]$$

Temperatura Fermiego

Temperatura Fermiego $T_F = E_F/k$ klasyfikuje zachowanie się gazu elektronowego

- Typowa wartość temperatury Fermiego w metalach $T_F \sim 10^4$ K
- gaz klasyczny (niezwyrodniały) — dla $T \gg T_F$
- gaz kwantowy (zwyrodniały) — dla $T \ll T_F$

Poprawki związane ze zwyrodnieniem

- potencjał chemiczny: $\mu = E_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 + \dots \right]$
- gęstość energii: $u = \frac{3}{5} \frac{E_F}{v} \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 + \dots \right]$

Temperatura Fermiego

Temperatura Fermiego $T_F = E_F/k$ klasyfikuje zachowanie się gazu elektronowego

- Typowa wartość temperatury Fermiego w metalach $T_F \sim 10^4$ K
- gaz klasyczny (niezwyrodniały) — dla $T \gg T_F$
- gaz kwantowy (zwyrodniały) — dla $T \ll T_F$

Poprawki związane ze zwyrodnieniem

- potencjał chemiczny: $\mu = E_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 + \dots \right]$
- gęstość energii: $u = \frac{3}{5} \frac{E_F}{v} \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 + \dots \right]$
- ciśnienie: $p = \frac{2}{3}u = \frac{2}{5} \frac{E_F}{v} \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 + \dots \right]$

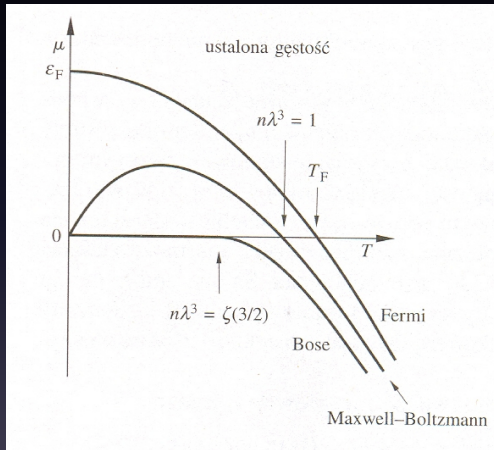
Temperatura Fermiego

Temperatura Fermiego $T_F = E_F/k$ klasyfikuje zachowanie się gazu elektronowego

- Typowa wartość temperatury Fermiego w metalach $T_F \sim 10^4$ K
- gaz klasyczny (niezwyrodniały) — dla $T \gg T_F$
- gaz kwantowy (zwyrodniały) — dla $T \ll T_F$

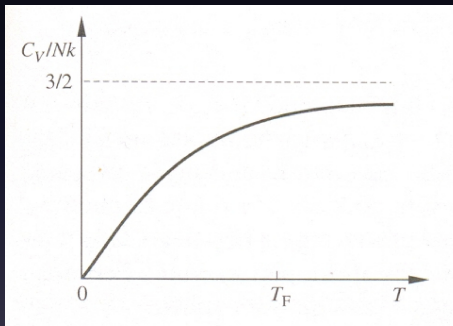
Poprawki związane ze zwyrodnieniem

- potencjał chemiczny: $\mu = E_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 + \dots \right]$
- gęstość energii: $u = \frac{3}{5} \frac{E_F}{v} \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 + \dots \right]$
- ciśnienie: $p = \frac{2}{3}u = \frac{2}{5} \frac{E_F}{v} \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 + \dots \right]$
- energia Fermiego: $E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi^2}{v} \right)^{2/3}$

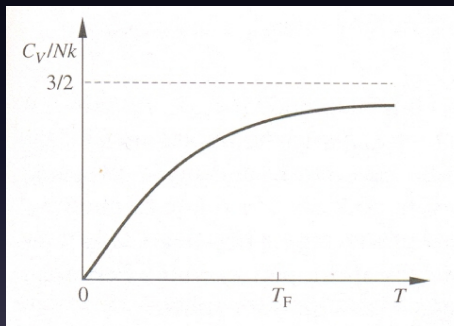


$$C_V = \frac{N_A}{N} \left(\frac{dU}{dT} \right)_V = k N_A \cdot \frac{\pi^2}{2} \frac{T}{T_F} + \dots$$

$$C_V = \frac{N_A}{N} \left(\frac{dU}{dT} \right)_V = k N_A \cdot \frac{\pi^2}{2} \frac{T}{T_F} + \dots$$



$$C_V = \frac{N_A}{N} \left(\frac{dU}{dT} \right)_V = k N_A \cdot \frac{\pi^2}{2} \frac{T}{T_F} + \dots$$



Wnioski

- liniowa zależność od temperatury w zakresie $T < T_F$
- zmierza do wartości $\frac{3}{2} N_A k$ dla dużych temperatur (jak gaz klasyczny)

Ciśnienie gazu elektronowego

- Zależność ciśnienia od koncentracji w przypadku nierelatywistycznym ma postać

$$p = \frac{\hbar^2 (3\pi^2)^{2/3}}{5m} \left(\frac{1}{v}\right)^{5/3} \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F}\right)^2 + \dots \right]$$

- Zależność ciśnienia od koncentracji w przypadku nierelatywistycznym ma postać

$$p = \frac{\hbar^2 (3\pi^2)^{2/3}}{5m} \left(\frac{1}{v}\right)^{5/3} \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F}\right)^2 + \dots \right]$$

- Przypadek nierelatywistyczny nie zawsze wystarcza!

- Zależność ciśnienia od koncentracji w przypadku nierelatywistycznym ma postać

$$p = \frac{\hbar^2 (3\pi^2)^{2/3}}{5m} \left(\frac{1}{v}\right)^{5/3} \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F}\right)^2 + \dots \right]$$

- Przypadek nierelatywistyczny nie zawsze wystarcza!
- Dla gazu elektronowego w białym karle $T_F \sim 10^{11}$ K, a temperatura gazu w centrum $T \sim 10^7$ K

- Zależność ciśnienia od koncentracji w przypadku nierelatywistycznym ma postać

$$p = \frac{\hbar^2 (3\pi^2)^{2/3}}{5m} \left(\frac{1}{v}\right)^{5/3} \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F}\right)^2 + \dots \right]$$

- Przypadek nierelatywistyczny nie zawsze wystarcza!
- Dla gazu elektronowego w białym karle $T_F \sim 10^{11}$ K, a temperatura gazu w centrum $T \sim 10^7$ K
- Gaz jest bardzo silnie zdegenerowany i obsadzenie poziomów niewiele odbiega od stanu wypełnienia tylko kuli Fermiego.

- Zależność ciśnienia od koncentracji w przypadku nierelatywistycznym ma postać

$$p = \frac{\hbar^2 (3\pi^2)^{2/3}}{5m} \left(\frac{1}{v}\right)^{5/3} \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F}\right)^2 + \dots \right]$$

- Przypadek nierelatywistyczny nie zawsze wystarcza!
- Dla gazu elektronowego w białym karle $T_F \sim 10^{11}$ K, a temperatura gazu w centrum $T \sim 10^7$ K
- Gaz jest bardzo silnie zdegenerowany i obsadzenie poziomów niewiele odbiega od stanu wypełnienia tylko kuli Fermiego.
- Prędkości elektronów są relatywistyczne!

Energia relatywistycznego gazu elektronowego

Energia relatywistycznego gazu elektronowego

- W przypadku relatywistycznym

$$U = \sum_k \frac{E_k}{z^{-1} e^{\beta E_k} - 1} \quad \text{dla} \quad E_k = \sqrt{(p_k c)^2 + (m c^2)^2}$$

gdzie sumowanie powinno dotyczyć stanów pędowych p_k

Energia relatywistycznego gazu elektronowego

- W przypadku relatywistycznym

$$U = \sum_k \frac{E_k}{z^{-1} e^{\beta E_k} - 1} \quad \text{dla} \quad E_k = \sqrt{(p_k c)^2 + (m c^2)^2}$$

gdzie sumowanie powinno dotyczyć stanów pędowych p_k

- W przybliżeniu silnego zdegenerowania i przy $\beta \rightarrow \infty$,

$$U \rightarrow E_0 = \sum_k \sqrt{(p_k c)^2 + (m c^2)^2} \rightarrow \int_0^{\infty} \tilde{m}(P) \sqrt{(Pc)^2 + (mc^2)^2} dP$$

Energia relatywistycznego gazu elektronowego

- W przypadku relatywistycznym

$$U = \sum_k \frac{E_k}{z^{-1} e^{\beta E_k} - 1} \quad \text{dla} \quad E_k = \sqrt{(p_k c)^2 + (m c^2)^2}$$

gdzie sumowanie powinno dotyczyć stanów pędowych p_k

- W przybliżeniu silnego zdegenerowania i przy $\beta \rightarrow \infty$,

$$U \rightarrow E_0 = \sum_k \sqrt{(p_k c)^2 + (m c^2)^2} \rightarrow \int_0^{\infty} \tilde{m}(P) \sqrt{(P c)^2 + (m c^2)^2} dP$$

$$m(E) dE = \tilde{m}(P) dP = \frac{8\pi V}{h^3} P^2 dP$$

Energia relatywistycznego gazu elektronowego

- W przypadku relatywistycznym

$$U = \sum_k \frac{E_k}{z^{-1} e^{\beta E_k} - 1} \quad \text{dla} \quad E_k = \sqrt{(p_k c)^2 + (m c^2)^2}$$

gdzie sumowanie powinno dotyczyć stanów pędowych p_k

- W przybliżeniu silnego zdegenerowania i przy $\beta \rightarrow \infty$,

$$U \rightarrow E_0 = \sum_k \sqrt{(p_k c)^2 + (m c^2)^2} \rightarrow \int_0^\infty \tilde{m}(P) \sqrt{(Pc)^2 + (mc^2)^2} dP$$

$$m(E)dE = \tilde{m}(P)dP = \frac{8\pi V}{h^3} P^2 dP$$

- Podstawienie $x = P/(mc)$ pozwala otrzymać

$$E_0 = \frac{8\pi V}{h^3} m^4 c^5 \int_0^{x_F} x^2 \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{8\pi V}{h^3} m^4 c^5 f(x_F)$$

Ciśnienie relatywistycznego gazu elektronowego

- energia swobodna $F = U + TS \rightarrow E_0$

- energia swobodna $F = U + TS \rightarrow E_0$
- ciśnienie

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V} \rightarrow -\frac{\partial E_0}{\partial V}$$

Ciśnienie relatywistycznego gazu elektronowego

- energia swobodna $F = U + TS \rightarrow E_0$
- ciśnienie

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V} \rightarrow -\frac{\partial E_0}{\partial V}$$

- Obliczenia pokazują, że wówczas

$$p \sim \begin{cases} \left(\frac{1}{v}\right)^{5/3} & \text{dla gazu nierelatywistycznego} \\ \left(\frac{1}{v}\right)^{4/3} - \left(\frac{1}{v}\right)^{2/3} & \text{dla gazu ultrarelatywistycznego} \end{cases}$$

- Koncentracja elektronów jest proporcjonalna do gęstości gwiazdy

$$\frac{1}{v} \sim \frac{M}{R^3}$$

- Koncentracja elektronów jest proporcjonalna do gęstości gwiazdy

$$\frac{1}{v} \sim \frac{M}{R^3}$$

- Dlatego

$$p \sim \begin{cases} \frac{M^{5/3}}{R^5} & \text{dla gazu nierelatywistycznego} \\ \frac{M^{4/3}}{R^4} - \frac{M^{2/3}}{R^2} & \text{dla gazu ultrarelatywistycznego} \end{cases}$$

- Koncentracja elektronów jest proporcjonalna do gęstości gwiazdy

$$\frac{1}{v} \sim \frac{M}{R^3}$$

- Dlatego

$$p \sim \begin{cases} \frac{M^{5/3}}{R^5} & \text{dla gazu nierelatywistycznego} \\ \frac{M^{4/3}}{R^4} - \frac{M^{2/3}}{R^2} & \text{dla gazu ultrarelatywistycznego} \end{cases}$$

- Ciśnienie grawitacyjne

$$p_{\text{graw}} \sim \rho g R \sim \frac{M}{R^3} \frac{GM}{R^2} R \sim \frac{M^2}{R^4} = \kappa \frac{M^2}{R^4}$$

- Koncentracja elektronów jest proporcjonalna do gęstości gwiazdy

$$\frac{1}{v} \sim \frac{M}{R^3}$$

- Dlatego

$$p \sim \begin{cases} \frac{M^{5/3}}{R^5} & \text{dla gazu nierelatywistycznego} \\ \frac{M^{4/3}}{R^4} - \frac{M^{2/3}}{R^2} & \text{dla gazu ultrarelatywistycznego} \end{cases}$$

- Ciśnienie grawitacyjne

$$p_{\text{graw}} \sim \rho g R \sim \frac{M}{R^3} \frac{GM}{R^2} R \sim \frac{M^2}{R^4} = \kappa \frac{M^2}{R^4}$$

- Stabilność gwiazdy wymaga aby

$$p \sim p_{\text{graw}}$$

Stabilność białych karłów. Przypadek małej masy

- Z warunku stabilności

$$\kappa \frac{M^2}{R^4} = \frac{M^{5/3}}{R^5}$$

- Z warunku stabilności

$$\kappa \frac{M^2}{R^4} = \frac{M^{5/3}}{R^5}$$

$$M^{1/3} R = \text{const.}$$

Stabilność białych karłów. Przypadek dużej masy

- Z warunku stabilności

$$\kappa \frac{M^2}{R^4} = \frac{M^{4/3}}{R^4} - \frac{M^{2/3}}{R^2}$$

- Z warunku stabilności

$$\kappa \frac{M^2}{R^4} = \frac{M^{4/3}}{R^4} - \frac{M^{2/3}}{R^2}$$

$$R = M^{1/3} \left[1 - \left(\frac{M}{M_0} \right)^{2/3} \right]^{1/2}$$

- Z warunku stabilności

$$\kappa \frac{M^2}{R^4} = \frac{M^{4/3}}{R^4} - \frac{M^{2/3}}{R^2}$$

$$R = M^{1/3} \left[1 - \left(\frac{M}{M_0} \right)^{2/3} \right]^{1/2}$$

- Istnieje górne ograniczenie na masę białego karła!

$$M < M_0 \sim 1.4 M_{\odot}$$

Powstawanie kondensatu Bosego-Einsteina

- Z równania na średnią liczbę cząstek mamy

$$\frac{\mathcal{N}}{V} = \underbrace{\frac{\mathcal{N}_0(z)}{V}}_{\text{gęstość kondensatu}} + \underbrace{\lambda^{-3} f_{3/2}^-(z)}_{\text{gęstość cząstek o pędzie } \neq 0}$$

$$\lambda^3 \frac{\mathcal{N}_0(z)}{V} = \frac{\lambda^3}{v} - f_{3/2}^-(z)$$

- Z równania na średnią liczbę cząstek mamy

$$\frac{\mathcal{N}}{V} = \underbrace{\frac{\mathcal{N}_0(z)}{V}}_{\text{gęstość kondensatu}} + \underbrace{\lambda^{-3} f_{3/2}^-(z)}_{\text{gęstość cząstek o pędzie } \neq 0}$$

$$\lambda^3 \frac{\mathcal{N}_0(z)}{V} = \frac{\lambda^3}{v} - f_{3/2}^-(z)$$

- Wraz z obniżaniem temperatury z rośnie $\frac{\partial \ln z}{\partial T} < 0$

Powstawanie kondensatu Bosego-Einsteina

- Z równania na średnią liczbę cząstek mamy

$$\frac{\mathcal{N}}{V} = \underbrace{\frac{\mathcal{N}_0(z)}{V}}_{\text{gęstość kondensatu}} + \underbrace{\lambda^{-3} f_{3/2}^-(z)}_{\text{gęstość cząstek o pędzie } \neq 0}$$

$$\lambda^3 \frac{\mathcal{N}_0(z)}{V} = \frac{\lambda^3}{v} - f_{3/2}^-(z)$$

- Wraz z obniżaniem temperatury z rośnie $\frac{\partial \ln z}{\partial T} < 0$
- Ale $f_{3/2}^-(z)$ przyjmuje maksymalną wartość dla $z = 1$, $f_{3/2}^-(1) = 2,612$ i dalej już rosnąć nie może!

Powstawanie kondensatu Bosego-Einsteina

- Z równania na średnią liczbę cząstek mamy

$$\frac{\mathcal{N}}{V} = \underbrace{\frac{\mathcal{N}_0(z)}{V}}_{\text{gęstość kondensatu}} + \underbrace{\lambda^{-3} f_{3/2}^-(z)}_{\text{gęstość cząstek o pędzie } \neq 0}$$

$$\lambda^3 \frac{\mathcal{N}_0(z)}{V} = \frac{\lambda^3}{v} - f_{3/2}^-(z)$$

- Wraz z obniżaniem temperatury z rośnie $\frac{\partial \ln z}{\partial T} < 0$
- Ale $f_{3/2}^-(z)$ przyjmuje maksymalną wartość dla $z = 1$, $f_{3/2}^-(1) = 2,612$ i dalej już rosnąć nie może!
- Obszar kondensacji Bosego-Einsteina określamy jako

$$\frac{\lambda^3}{v} > f_{3/2}^-(1)$$

Powstawanie kondensatu Bosego-Einsteina

- Dla zadanej koncentracji bozonów $1/v$ warunek powyższy definiuje temperaturę krytyczną

$$\lambda_c^3 = v f_{3/2}^-(1), \quad T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{mk} \left[v f_{3/2}^-(1) \right]^{-2/3}$$

Powstawanie kondensatu Bosego-Einsteina

- Dla zadanej koncentracji bozonów $1/v$ warunek powyższy definiuje temperaturę krytyczną

$$\lambda_c^3 = v f_{3/2}^-(1), \quad T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{mk} \left[v f_{3/2}^-(1) \right]^{-2/3}$$

- W obszarze kondensatu $T < T_c$

$$\lambda^3 \frac{\mathcal{N}_0}{V} = \frac{\lambda^3}{v} - f_{3/2}^-(1) = \frac{\lambda^3 - \lambda_c^3}{v}$$

Powstawanie kondensatu Bosego-Einsteina

- Dla zadanej koncentracji bozonów $1/v$ warunek powyższy definiuje temperaturę krytyczną

$$\lambda_c^3 = v f_{3/2}^-(1), \quad T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{mk} \left[v f_{3/2}^-(1) \right]^{-2/3}$$

- W obszarze kondensatu $T < T_c$

$$\lambda^3 \frac{\mathcal{N}_0}{V} = \frac{\lambda^3}{v} - f_{3/2}^-(1) = \frac{\lambda^3 - \lambda_c^3}{v}$$

- Średnia liczba cząstek w kondensacie

$$\mathcal{N}_0 = \mathcal{N} \left[1 - \left(\frac{\lambda_c}{\lambda} \right)^3 \right]$$

Powstawanie kondensatu Bosego-Einsteina

- Dla zadanej koncentracji bozonów $1/v$ warunek powyższy definiuje temperaturę krytyczną

$$\lambda_c^3 = v f_{3/2}^-(1), \quad T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{mk} \left[v f_{3/2}^-(1) \right]^{-2/3}$$

- W obszarze kondensatu $T < T_c$

$$\lambda^3 \frac{\mathcal{N}_0}{V} = \frac{\lambda^3}{v} - f_{3/2}^-(1) = \frac{\lambda^3 - \lambda_c^3}{v}$$

- Średnia liczba cząstek w kondensacie

$$\mathcal{N}_0 = \mathcal{N} \left[1 - \left(\frac{\lambda_c}{\lambda} \right)^3 \right]$$

- Udział liczby cząstek w kondensacie w stosunku do średniej liczby cząstek

$$\frac{\mathcal{N}_0}{\mathcal{N}} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}$$

- Jeżeli bozony oddziałują potrzebny jest opis bazujący na kwantowej teorii pola!

- Jeżeli bozony oddziałują potrzebny jest opis bazujący na kwantowej teorii pola!
- Pojęcie jednocząstkowej funkcji falowej bozonu traci wówczas sens, ale jej rolę przejmuje amplituda kreacji (lub anihilacji) bozonu w zadanym punkcie — $\psi(\mathbf{r})$.

- Jeżeli bozony oddziałują potrzebny jest opis bazujący na kwantowej teorii pola!
- Pojęcie jednocząstkowej funkcji falowej bozonu traci wówczas sens, ale jej rolę przejmuje amplituda kreacji (lub anihilacji) bozonu w zadanym punkcie — $\psi(\mathbf{r})$.
- Funkcja falowa kondensatu $\psi(\mathbf{r})$ minimalizuje energię swobodną Ginzburga-Landaua

$$F[\psi, \psi^*] = \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla\psi \cdot \nabla\psi^* + (U(\mathbf{r}) - \mu)\psi\psi^* + \frac{\gamma}{2}(\psi\psi^*)^2 \right] d\mathbf{r}$$

- Jeżeli bozony oddziałują potrzebny jest opis bazujący na kwantowej teorii pola!
- Pojęcie jednocząstkowej funkcji falowej bozonu traci wówczas sens, ale jej rolę przejmuje amplituda kreacji (lub anihilacji) bozonu w zadanym punkcie — $\psi(\mathbf{r})$.
- Funkcja falowa kondensatu $\psi(\mathbf{r})$ minimalizuje energię swobodną Ginzburga-Landaua

$$F[\psi, \psi^*] = \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla\psi \cdot \nabla\psi^* + (U(\mathbf{r}) - \mu)\psi\psi^* + \frac{\gamma}{2}(\psi\psi^*)^2 \right] d\mathbf{r}$$

- $\psi(\mathbf{r})$ spełnia równanie Grossa-Pitajewskiego

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) + \gamma|\psi|^2 \right] \psi = \mu\psi,$$

gdzie

$$\int_V |\psi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} = \mathcal{N}_0$$

Funkcja falowa kondensatu

- Jeśli zewnętrzne pole $U(\mathbf{r}) = 0$, to (najprostszym) rozwiązaniem jest

$$\psi(\mathbf{r}) = \text{const.}$$

- Jeśli zewnętrzne pole $U(\mathbf{r}) = 0$, to (najprostszym) rozwiązaniem jest

$$\psi(\mathbf{r}) = \text{const.}$$

- wtedy

$$|\psi(\mathbf{r})| = \begin{cases} 0 & \mu < 0 \\ \sqrt{\mu/\gamma} & \mu \geq 0 \end{cases}$$

- Jeśli zewnętrzne pole $U(\mathbf{r}) = 0$, to (najprostszym) rozwiązaniem jest

$$\psi(\mathbf{r}) = \text{const.}$$

- wtedy

$$|\psi(\mathbf{r})| = \begin{cases} 0 & \mu < 0 \\ \sqrt{\mu/\gamma} & \mu \geq 0 \end{cases}$$

- Inaczej niż dla gazu doskonałego, potencjał chemiczny nie znika w fazie kondensatu

$$\mu = \frac{\gamma \mathcal{N}_0}{V}$$

- Jeśli zewnętrzne pole $U(\mathbf{r}) = 0$, to (najprostszym) rozwiązaniem jest

$$\psi(\mathbf{r}) = \text{const.}$$

- wtedy

$$|\psi(\mathbf{r})| = \begin{cases} 0 & \mu < 0 \\ \sqrt{\mu/\gamma} & \mu \geq 0 \end{cases}$$

- Inaczej niż dla gazu doskonałego, potencjał chemiczny nie znika w fazie kondensatu

$$\mu = \frac{\gamma \mathcal{N}_0}{V}$$

- Gdy $U(\mathbf{r}) \neq 0$, powszechnie stosuje się przybliżeniu Thomasa–Fermiego

$$|\psi(\mathbf{r})|^2 = \frac{1}{\gamma} (\mu - U(\mathbf{r}))$$

Inne zjawiska oparte na kondensacji

- Interferencja dwóch kondensatów,
- Nadciekłość — przepływ i krążenie cieczy bez przejawów lepkości,
- Nadprzewodnictwo — kondensacja par Coopera,
- złącze Josephsona — układ dwóch nadprzewodników połączonych izolatorem, przez które tunelują pary Coopera, własności prostujące,
- SQUID (Superconducting Quantum Interference Device) — urządzenie do pomiaru strumienia magnetycznego oparte o dwa złącza Josephsona połączone równolegle.

Fala elektromagnetyczna w sześciennym wnętrzu

- Elektromagnetyczna fala stojąca we wnętrzu sześciennym jest superpozycją fal płaskich o wektorach falowych $\vec{k} = \frac{\pi}{l}\vec{n}$, gdzie \vec{n} jest wektorem o składowych naturalnych

- Elektromagnetyczna fala stojąca we wnętrzu sześciennym jest superpozycją fal płaskich o wektorach falowych $\vec{k} = \frac{\pi}{l}\vec{n}$, gdzie \vec{n} jest wektorem o składowych naturalnych
- Gaz fotonowy we wnętrzu składa się z fotonów o energiach

$$E_{n_1, n_2, n_3} = \hbar c |\vec{k}| = \frac{c \hbar \pi}{l} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)^{1/2}$$

Gęstość stanów fotonowych

- Ilość stanów energetycznych

$$N(E) = \frac{1}{6} \pi \left(\frac{l}{c\hbar\pi} \right)^3 E^3$$

- Ilość stanów energetycznych

$$N(E) = \frac{1}{6} \pi \left(\frac{l}{c\hbar\pi} \right)^3 E^3$$

- Gęstość stanów energetycznych

$$g(E) = \frac{dN(E)}{dE} = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{l}{c\hbar\pi} \right)^3 E^2$$

- Ilość stanów energetycznych

$$N(E) = \frac{1}{6} \pi \left(\frac{l}{c\hbar\pi} \right)^3 E^3$$

- Gęstość stanów energetycznych

$$g(E) = \frac{dN(E)}{dE} = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{l}{c\hbar\pi} \right)^3 E^2$$

- Uwzględniając dodatkowe stopnie swobody otrzymamy ostatecznie

$$g(E) = \pi \left(\frac{l}{c\hbar\pi} \right)^3 E^2$$

- Gęstość energii gazu fotonowego ($z = 1$) w przybliżeniu półklasycznym

$$\frac{U}{V} = \frac{1}{(c\hbar)^3 \pi^2} \int_0^{\infty} \frac{E^3 dE}{e^{\beta E} - 1} = \frac{\hbar}{c^3 \pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}$$

- Gęstość energii gazu fotonowego ($z = 1$) w przybliżeniu półklasycznym

$$\frac{U}{V} = \frac{1}{(c\hbar)^3 \pi^2} \int_0^{\infty} \frac{E^3 dE}{e^{\beta E} - 1} = \frac{\hbar}{c^3 \pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}$$

Rozkład Plancka

Gęstość spektralna energii nazywana jest rozkładem Plancka

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar}{c^3 \pi^2} \frac{\omega^3}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}$$

Gęstość energii gazu fotonowego

- Gęstość energii gazu fotonowego ($z = 1$) w przybliżeniu półklasycznym

$$\frac{U}{V} = \frac{1}{(c\hbar)^3 \pi^2} \int_0^{\infty} \frac{E^3 dE}{e^{\beta E} - 1} = \frac{\hbar}{c^3 \pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}$$

Rozkład Plancka

Gęstość spektralna energii nazywana jest rozkładem Plancka

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar}{c^3 \pi^2} \frac{\omega^3}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}$$

- Gęstość energii jest proporcjonalna do T^4

$$u(T) = \frac{(kT)^4}{(c\hbar)^3 \pi^2} \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{(kT)^4}{(c\hbar)^3 \pi^2} f_4^-(1) \Gamma(4)$$

Gęstość energii gazu fotonowego

- Gęstość energii gazu fotonowego ($z = 1$) w przybliżeniu półklasycznym

$$\frac{U}{V} = \frac{1}{(c\hbar)^3 \pi^2} \int_0^{\infty} \frac{E^3 dE}{e^{\beta E} - 1} = \frac{\hbar}{c^3 \pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}$$

Rozkład Plancka

Gęstość spektralna energii nazywana jest rozkładem Plancka

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar}{c^3 \pi^2} \frac{\omega^3}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}$$

- Gęstość energii jest proporcjonalna do T^4

$$u(T) = \frac{(kT)^4}{(c\hbar)^3 \pi^2} \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{(kT)^4}{(c\hbar)^3 \pi^2} f_4^-(1) \Gamma(4)$$

- $f_4^-(1) = \pi^4/90$, $\Gamma(4) = 6$, $f_4^-(1)\Gamma(4) = \pi^4/15$

Zdolność emisyjna (całkowita i spektralna)

$$e(\omega, T) = \frac{1}{4}cu(\omega, T)$$

Zdolność emisyjna (całkowita i spektralna)

$$e(\omega, T) = \frac{1}{4}cu(\omega, T)$$

Prawo Stefana-Boltzmannna

Całkowita zdolność emisyjna jest proporcjonalna do T^4

$$e(T) = \frac{\pi^2 k^4}{60 \hbar^3 c^2} T^4 = \sigma T^4$$

gdzie σ jest stałą Stefana-Boltzmannna

Zdolność emisyjna (całkowita i spektralna)

$$e(\omega, T) = \frac{1}{4}cu(\omega, T)$$

Prawo Stefana-Boltzmann

Całkowita zdolność emisyjna jest proporcjonalna do T^4

$$e(T) = \frac{\pi^2 k^4}{60 \hbar^3 c^2} T^4 = \sigma T^4$$

gdzie σ jest stałą Stefana-Boltzmann

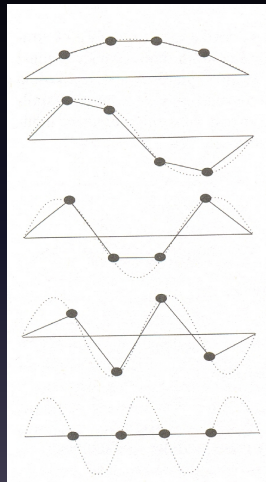
Prawo Wiena

Długość fali, dla której przypada maksimum spektralnej zdolności emisyjnej, jest odwrotnie proporcjonalna do temperatury

$$\lambda_{\max} = \frac{\text{const.}}{T}$$

- kwanty modów drgań własnych atomów sieci krystalicznej
- podlegają one statystyce Bosego-Einsteina (bozony)
- energia fononu $E_P = c_f P$, c_f — prędkość propagacji fali, P — pęd fononu,
- istnieją trzy typy modów: dwa poprzeczne (jak dla fotonów) i jeden podłużny (fale dźwiękowe)
- widmo częstotliwości fononów jest ograniczone z góry ze względu na istnienie minimalnej odległości pomiędzy węzłami sieci

- kwanty modów drgań własnych atomów sieci krystalicznej
- podlegają one statystyce Bosego-Einsteina (bozony)
- energia fononu $E_P = c_f P$, c_f — prędkość propagacji fali, P — pęd fononu,
- istnieją trzy typy modów: dwa poprzeczne (jak dla fotonów) i jeden podłużny (fale dźwiękowe)
- widmo częstotliwości fononów jest ograniczone z góry ze względu na istnienie minimalnej odległości pomiędzy węzłami sieci



- liczbę stanów liczymy jak fotonów uwzględniając obecność trzech modów

$$N(E)dE = \frac{3\pi}{2} \left(\frac{l}{c_f \hbar \pi} \right)^3 E^2 dE = \frac{3V\omega^2}{2c_f^3 \pi^2} d\omega$$

- liczbę stanów liczymy jak fotonów uwzględniając obecność trzech modów

$$N(E)dE = \frac{3\pi}{2} \left(\frac{l}{c_f \hbar \pi} \right)^3 E^2 dE = \frac{3V\omega^2}{2c_f^3 \pi^2} d\omega$$

- całkowita liczba modów w układzie musi być równa $3N$, gdzie N jest ilością atomów w sieci

- liczbę stanów liczymy jak fotonów uwzględniając obecność trzech modów

$$N(E)dE = \frac{3\pi}{2} \left(\frac{l}{c_f \hbar \pi} \right)^3 E^2 dE = \frac{3V\omega^2}{2c_f^3 \pi^2} d\omega$$

- całkowita liczba modów w układzie musi być równa $3N$, gdzie N jest ilością atomów w sieci
- częstość obcięcia ω_{\max} określona jest z warunku

$$\int_0^{\omega_{\max}} N(\omega) d\omega = 3N$$

- liczbę stanów liczymy jak fotonów uwzględniając obecność trzech modów

$$N(E)dE = \frac{3\pi}{2} \left(\frac{l}{c_f \hbar \pi} \right)^3 E^2 dE = \frac{3V\omega^2}{2c_f^3 \pi^2} d\omega$$

- całkowita liczba modów w układzie musi być równa $3N$, gdzie N jest ilością atomów w sieci
- częstość obcięcia ω_{\max} określona jest z warunku

$$\int_0^{\omega_{\max}} N(\omega) d\omega = 3N$$

- w konsekwencji $\omega_{\max} = c_f \left(\frac{6\pi^2}{v} \right)^{1/3}$

- charakterystyczna energia $\hbar\omega_{\max}$ określa temperaturę Debye'a

$$\hbar\omega_{\max} = kT_D$$

- charakterystyczna energia $\hbar\omega_{\max}$ określa temperaturę Debye'a

$$\hbar\omega_{\max} = kT_D$$

- Dla typowych metali temperatura Debye'a wynosi $T_D \sim 100 - 400$ K

Energia drgań sieci krystalicznej

- charakterystyczna energia $\hbar\omega_{\max}$ określa **temperaturę Debye'a**

$$\hbar\omega_{\max} = kT_D$$

- Dla typowych metali temperatura Debye'a wynosi $T_D \sim 100 - 400$ K
- łatwo policzyć, że

$$\frac{U}{N} = \frac{3\hbar V}{2c_f^3 \pi^2 N} \int_0^{\omega_{\max}} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} = 3kT D(w)$$

gdzie $w = T_D/T$ oraz

$$D(w) = \frac{3}{w^3} \int_0^w \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

jest **funkcją Debye'a**

Ciepło molowe Debye'a

- asymptotyczne rozwinięcia $D(w)$ mają postać

$$D(w) = 1 - \frac{3}{8}w + \dots \quad \text{małe } w$$

$$D(w) = \frac{\pi^4}{5w^3} + \dots \quad \text{duże } w$$

- asymptotyczne rozwinięcia $D(w)$ mają postać

$$D(w) = 1 - \frac{3}{8}w + \dots \quad \text{małe } w$$

$$D(w) = \frac{\pi^4}{5w^3} + \dots \quad \text{duże } w$$

- ciepło molowe wynosi

$$C_V = N_A \frac{d}{dT} \left(\frac{U}{N} \right)_V = 3kN_A \left(D(w) + T \frac{dD(w)}{dT} \right)$$

$$\frac{C_V}{N_A k} = \begin{cases} 3 & \text{dla } T \rightarrow \infty \\ \frac{12\pi^4}{5} \left(\frac{T}{T_D} \right)^3 & \text{dla } T \ll T_D \end{cases}$$

Ciepło molowe kryształu

- Na ciepło molowe kryształu składa się ciepło molowe sieci (fononów) oraz ciepło molowe gazu elektronowego

- Na ciepło molowe kryształu składa się ciepło molowe sieci (fononów) oraz ciepło molowe gazu elektronowego

$$C_V \approx N_A \left[\frac{\pi^2}{2} \left(\frac{T}{T_F} \right) + \frac{12\pi^4}{5} \left(\frac{T}{T_D} \right)^3 \right]$$

- W temperaturach pokojowych dominuje wkład od sieci krystalicznej, ale w niskich temperaturach udział ciepła molowego gazu elektronowego staje się coraz większy.

Nadprzewodnictwo (Kamerlingh-Onnes, 1911)

Nadprzewodnictwo (Kamerlingh-Onnes, 1911)

- zanik oporu elektrycznego w temperaturach $T < T_c$ i w polu magnetycznym o natężeniu $H < H_c$,

- zanik oporu elektrycznego w temperaturach $T < T_c$ i w polu magnetycznym o natężeniu $H < H_c$,
 - w metalach $T_c \sim 1 - 10$ K
 - w stopach $T_c \sim 1 - 50$ K
 - materiałach organicznych $T_c \sim 50$ K

- zanik oporu elektrycznego w temperaturach $T < T_c$ i w polu magnetycznym o natężeniu $H < H_c$,
 - w metalach $T_c \sim 1 - 10$ K
 - w stopach $T_c \sim 1 - 50$ K
 - materiałach organicznych $T_c \sim 50$ K
- pole krytyczne H_c zależy od temperatury

$$H_c(T) = H_c(0) \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right], \quad H_c(0) \sim 10^4 - 10^5 \text{ A/m}$$

- efekt Meissnera — wypchnięcie linii zewnętrznego pola magnetycznego z obszaru nadprzewodnika przy $H < H_c$, w którym pole magnetyczne pozostaje zero,

- zanik oporu elektrycznego w temperaturach $T < T_c$ i w polu magnetycznym o natężeniu $H < H_c$,
 - w metalach $T_c \sim 1 - 10$ K
 - w stopach $T_c \sim 1 - 50$ K
 - materiałach organicznych $T_c \sim 50$ K
- pole krytyczne H_c zależy od temperatury

$$H_c(T) = H_c(0) \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right], \quad H_c(0) \sim 10^4 - 10^5 \text{ A/m}$$

- efekt Meissnera — wypchnięcie linii zewnętrznego pola magnetycznego z obszaru nadprzewodnika przy $H < H_c$, w którym pole magnetyczne pozostaje zero,
- efekt izotopowy — zależność temperatury krytycznej od masy izotopu jonu sieci krystalicznej.

Nadprzewodnictwo wysokotemperaturowe

- Nadprzewodniki II rodzaju — dwa pola krytyczne H_{c1} oraz H_{c2} . W obszarze przejściowym pole wnika do nadprzewodnika w postaci regularnej struktury nadprzewodzących wirów prądu (macierz wirów Abrikosova) wokół strumieni pola magnetycznego,

- Nadprzewodniki II rodzaju — dwa pola krytyczne H_{c1} oraz H_{c2} . W obszarze przejściowym pole wnika do nadprzewodnika w postaci regularnej struktury nadprzewodzących wirów prądu (macierz wirów Abrikosova) wokół strumieni pola magnetycznego,
- Nadprzewodnictwo wysokotemperaturowe w strukturach zawierających płaszczyzny CuO_4 , np. $(\text{CaSr})_2\text{CuO}_4$,
- $T_c \approx 30 - 150 \text{ K}$

- prawo Ohma jest postaci $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, tymczasem I równanie Londonów

$$\frac{d\vec{j}_s}{dt} = \frac{n_s q^2}{m^*} \vec{E}$$

- prawo Ohma jest postaci $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, tymczasem I równanie Londonów

$$\frac{d\vec{j}_s}{dt} = \frac{n_s q^2}{m^*} \vec{E}$$

- z prawa Maxwella

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = -\nabla \times \vec{E} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m^*}{n_s q^2} \nabla \times \vec{j}_s \right)$$

- prawo Ohma jest postaci $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, tymczasem I równanie Londonów

$$\frac{d\vec{j}_s}{dt} = \frac{n_s q^2}{m^*} \vec{E}$$

- z prawa Maxwella

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = -\nabla \times \vec{E} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m^*}{n_s q^2} \nabla \times \vec{j}_s \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\nabla \times \vec{j}_s + \frac{n_s q^2}{m^*} \vec{B} \right) = 0$$

- prawo Ohma jest postaci $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, tymczasem I równanie Londonów

$$\frac{d\vec{j}_s}{dt} = \frac{n_s q^2}{m^*} \vec{E}$$

- z prawa Maxwella

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = -\nabla \times \vec{E} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m^*}{n_s q^2} \nabla \times \vec{j}_s \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\nabla \times \vec{j}_s + \frac{n_s q^2}{m^*} \vec{B} \right) = 0$$

- II równanie Londonów

$$\nabla \times \vec{j}_s + \frac{n_s q^2}{m^*} \vec{B} = 0$$

- Z równania Maxwella $\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{j}_s$ wynika, że

$$\nabla \times \vec{j}_s = \frac{1}{\mu} \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = -\frac{1}{\mu} \nabla^2 \vec{B}$$

zatem uwzględniając równania Londonów

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{\mu n_s q^2}{m^*} \vec{B} \quad (1)$$

- Z równania Maxwella $\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{j}_s$ wynika, że

$$\nabla \times \vec{j}_s = \frac{1}{\mu} \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = -\frac{1}{\mu} \nabla^2 \vec{B}$$

zatem uwzględniając równania Londonów

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{\mu n_s q^2}{m^*} \vec{B} \quad (1)$$

- Przyjmując kierunek z jako prostopadły do lokalnej powierzchni nadprzewodnika i ograniczając (1) do jednego wymiaru otrzymamy

$$\vec{B}(z) = \vec{B}_0 e^{-z/\lambda}, \quad \frac{1}{\lambda^2} = \frac{\mu n_s q^2}{m^*}$$

- Z równania Maxwella $\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{j}_s$ wynika, że

$$\nabla \times \vec{j}_s = \frac{1}{\mu} \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = -\frac{1}{\mu} \nabla^2 \vec{B}$$

zatem uwzględniając równania Londonów

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{\mu n_s q^2}{m^*} \vec{B} \quad (1)$$

- Przyjmując kierunek z jako prostopadły do lokalnej powierzchni nadprzewodnika i ograniczając (1) do jednego wymiaru otrzymamy

$$\vec{B}(z) = \vec{B}_0 e^{-z/\lambda}, \quad \frac{1}{\lambda^2} = \frac{\mu n_s q^2}{m^*}$$

- \vec{B} wnika do nadprzewodnika na niewielką głębokość określoną przez głębokość wnikania λ .

- Stan nadprzewodzący opisuje zespolona funkcja $\psi(\vec{r})$ nazywana parametrem porządku, która znika w stanie normalnym i spełnia unormowanie

$$\int_V |\psi(\vec{r})|^2 d\vec{r} = \mathcal{N}_s, \quad |\psi(\vec{r})|^2 = n_s(\vec{r})$$

- Stan nadprzewodzący opisuje zespolona funkcja $\psi(\vec{r})$ nazywana parametrem porządku, która znika w stanie normalnym i spełnia unormowanie

$$\int_V |\psi(\vec{r})|^2 d\vec{r} = \mathcal{N}_s, \quad |\psi(\vec{r})|^2 = n_s(\vec{r})$$

- Gęstości energii swobodnych w stanach normalnym i nadprzewodzącym łączy relacja

$$f_s(\vec{r}, T) = f_n(\vec{r}, T) + W(\psi, T)$$

gdzie funkcja W parametru porządku powinna być rzeczywista i analityczna w pobliżu $\psi = 0$

- Stan nadprzewodzący opisuje zespolona funkcja $\psi(\vec{r})$ nazywana parametrem porządku, która znika w stanie normalnym i spełnia unormowanie

$$\int_V |\psi(\vec{r})|^2 d\vec{r} = \mathcal{N}_s, \quad |\psi(\vec{r})|^2 = n_s(\vec{r})$$

- Gęstości energii swobodnych w stanach normalnym i nadprzewodzącym łączy relacja

$$f_s(\vec{r}, T) = f_n(\vec{r}, T) + W(\psi, T)$$

gdzie funkcja W parametru porządku powinna być rzeczywista i analityczna w pobliżu $\psi = 0$

- Ginzburg i Landau przyjęli ($b(T) > 0$)

$$W(|\psi|, T) = a(T)|\psi|^2 + \frac{b(T)}{2}|\psi|^4$$

Podstawy teorii Ginzburga-Landaua

- Stan nadprzewodzący opisuje zespolona funkcja $\psi(\vec{r})$ nazywana parametrem porządku, która znika w stanie normalnym i spełnia unormowanie

$$\int_V |\psi(\vec{r})|^2 d\vec{r} = \mathcal{N}_s, \quad |\psi(\vec{r})|^2 = n_s(\vec{r})$$

- Gęstości energii swobodnych w stanach normalnym i nadprzewodzącym łączy relacja

$$f_s(\vec{r}, T) = f_n(\vec{r}, T) + W(\psi, T)$$

gdzie funkcja W parametru porządku powinna być rzeczywista i analityczna w pobliżu $\psi = 0$

- Ginzburg i Landau przyjęli ($b(T) > 0$)

$$W(|\psi|, T) = a(T)|\psi|^2 + \frac{b(T)}{2}|\psi|^4$$

- Zauważmy, że

$$\min_{|\psi|} W(|\psi|) = \begin{cases} 0 & a > 0 \\ -a^2/(2b) & a < 0 \end{cases} \quad \frac{a^2}{2b} = \frac{H_c^2}{8\pi}$$

Równania Ginzburga-Landaua

- Uzupełniając teorię pola $\psi(\vec{r})$ o człon kinetyczny i oddziaływanie z zewnętrznym polem magnetycznym otrzymali ostatecznie energię swobodną stanu nadprzewodzącego

$$F_s(T) = F_n(T) + \int_V \left[\frac{1}{2m^*} \left| (-i\hbar\nabla - q\vec{A})\psi(\vec{r}) \right|^2 + a(T)|\psi(\vec{r})|^2 + \frac{b(T)}{2} |\psi(\vec{r})|^4 \right] d\vec{r}$$

- Uzupełniając teorię pola $\psi(\vec{r})$ o człon kinetyczny i oddziaływanie z zewnętrznym polem magnetycznym otrzymali ostatecznie energię swobodną stanu nadprzewodzącego

$$F_s(T) = F_n(T) + \int_V \left[\frac{1}{2m^*} \left| (-i\hbar\nabla - q\vec{A})\psi(\vec{r}) \right|^2 + a(T)|\psi(\vec{r})|^2 + \frac{b(T)}{2} |\psi(\vec{r})|^4 \right] d\vec{r}$$

- Minimalizacja energii swobodnej po ψ , ψ^* oraz \vec{A} prowadzi do równań

$$\frac{1}{2m^*} (-i\hbar\nabla - q\vec{A})^2 \psi(\vec{r}) + a(T)\psi(\vec{r}) + b(T)|\psi(\vec{r})|^2 \psi(\vec{r}) = 0$$

$$\vec{j}_s = -\frac{i\hbar q}{2m^*} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{q^2}{m^*} |\psi|^2 \vec{A}$$

Teoria BCS (Bardeen, Cooper, Schrieffer, 1957)

- H. Fröhlich pokazał, że oddziaływanie elektron–fonon–elektron może być w pewnych warunkach efektywnie przyciągającym oddziaływaniem dla pary elektronów
- Oddziaływanie to może być silniejsze niż elektrostatyczne odpychanie się elektronów

- H. Fröhlich pokazał, że oddziaływanie elektron–fonon–elektron może być w pewnych warunkach efektywnie przyciągającym oddziaływaniem dla pary elektronów
- Oddziaływanie to może być silniejsze niż elektrostatyczne odpychanie się elektronów
- Mikroskopowa teoria pola zakładająca parowanie elektronów w przestrzeni pędów: dwa elektrony o pędzie \vec{p} i $-\vec{p}$ (z wąskiego otoczenia pędu Fermiego) łączą się w pary Coopera ($q = 2e$) dzięki pośrednictwu sieci krystalicznej (fononów).

- H. Fröhlich pokazał, że oddziaływanie elektron–fonon–elektron może być w pewnych warunkach efektywnie przyciągającym oddziaływaniem dla pary elektronów
- Oddziaływanie to może być silniejsze niż elektrostatyczne odpychanie się elektronów
- Mikroskopowa teoria pola zakładająca parowanie elektronów w przestrzeni pędów: dwa elektrony o pędzie \vec{p} i $-\vec{p}$ (z wąskiego otoczenia pędu Fermiego) łączą się w pary Coopera ($q = 2e$) dzięki pośrednictwu sieci krystalicznej (fononów).
- Odległość pomiędzy elektronami jest rzędu 100 nm.

- H. Fröhlich pokazał, że oddziaływanie elektron–fonon–elektron może być w pewnych warunkach efektywnie przyciągającym oddziaływaniem dla pary elektronów
- Oddziaływanie to może być silniejsze niż elektrostatyczne odpychanie się elektronów
- Mikroskopowa teoria pola zakładająca parowanie elektronów w przestrzeni pędów: dwa elektrony o pędzie \vec{p} i $-\vec{p}$ (z wąskiego otoczenia pędu Fermiego) łączą się w pary Coopera ($q = 2e$) dzięki pośrednictwu sieci krystalicznej (fononów).
- Odległość pomiędzy elektronami jest rzędu 100 nm.
- Tworzenie par Coopera zaburza strukturę stanów elektronowych w pobliżu powierzchni Fermiego prowadząc do powstania przerwy energetycznej $\Delta(0)$ (może być uważana za parametr porządku w teorii GL)

$$\frac{\Delta(0)}{kT_c} = 1,764, \quad \frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} \approx 1,74 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{1/2}$$

Hamiltonian BCS w zapisie II kwantyzacji

Hamiltonian BCS w zapisie II kwantyzacji

- CAR dla fermionowych operatorów kreacji i anihilacji elektronu o pędzie k i spinie σ

$$[c_{k\sigma}, c_{k'\sigma'}^*]_+ = c_{k\sigma}c_{k'\sigma'}^* + c_{k'\sigma'}^*c_{k\sigma} = \delta_{kk'}\delta_{\sigma\sigma'}$$

$$[c_{k\sigma}, c_{k'\sigma'}]_+ = [c_{k\sigma}^*, c_{k'\sigma'}^*]_+ = 0$$

Hamiltonian BCS w zapisie II kwantyzacji

- CAR dla fermionowych operatorów kreacji i anihilacji elektronu o pędzie k i spinie σ

$$[c_{k\sigma}, c_{k'\sigma'}^*]_+ = c_{k\sigma}c_{k'\sigma'}^* + c_{k'\sigma'}^*c_{k\sigma} = \delta_{kk'}\delta_{\sigma\sigma'}$$

$$[c_{k\sigma}, c_{k'\sigma'}]_+ = [c_{k\sigma}^*, c_{k'\sigma'}^*]_+ = 0$$

- operator liczby cząstek $n_{k\sigma} = c_{k\sigma}^*c_{k\sigma}$

Hamiltonian BCS w zapisie II kwantyzacji

- CAR dla fermionowych operatorów kreacji i anihilacji elektronu o pędzie \mathbf{k} i spinie σ

$$[c_{\mathbf{k}\sigma}, c_{\mathbf{k}'\sigma'}^*]_+ = c_{\mathbf{k}\sigma}c_{\mathbf{k}'\sigma'}^* + c_{\mathbf{k}'\sigma'}^*c_{\mathbf{k}\sigma} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{\sigma\sigma'}$$

$$[c_{\mathbf{k}\sigma}, c_{\mathbf{k}'\sigma'}]_+ = [c_{\mathbf{k}\sigma}^*, c_{\mathbf{k}'\sigma'}^*]_+ = 0$$

- operator liczby cząstek $n_{\mathbf{k}\sigma} = c_{\mathbf{k}\sigma}^*c_{\mathbf{k}\sigma}$
- para Coopera o sparowanych pędach i spinach opisywana jest przez

$$|\text{CP}\rangle = v_{\mathbf{k}}c_{\mathbf{k}\uparrow}^*c_{-\mathbf{k}\downarrow}^*|0\rangle$$

Hamiltonian BCS w zapisie II kwantyzacji

- CAR dla fermionowych operatorów kreacji i anihilacji elektronu o pędzie k i spinie σ

$$[c_{k\sigma}, c_{k'\sigma'}^*]_+ = c_{k\sigma}c_{k'\sigma'}^* + c_{k'\sigma'}^*c_{k\sigma} = \delta_{kk'}\delta_{\sigma\sigma'}$$

$$[c_{k\sigma}, c_{k'\sigma'}]_+ = [c_{k\sigma}^*, c_{k'\sigma'}^*]_+ = 0$$

- operator liczby cząstek $n_{k\sigma} = c_{k\sigma}^*c_{k\sigma}$
- para Coopera o sparowanych pędach i spinach opisywana jest przez

$$|\text{CP}\rangle = v_k c_{k\uparrow}^* c_{-k\downarrow} |0\rangle$$

- stan podstawowy BCS

$$|\text{BCS}\rangle = \prod_{\mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^* c_{-\mathbf{k}\downarrow}) |0\rangle$$

Hamiltonian BCS w zapisie II kwantyzacji

- CAR dla fermionowych operatorów kreacji i anihilacji elektronu o pędzie k i spinie σ

$$[c_{k\sigma}, c_{k'\sigma'}^*]_+ = c_{k\sigma}c_{k'\sigma'}^* + c_{k'\sigma'}^*c_{k\sigma} = \delta_{kk'}\delta_{\sigma\sigma'}$$

$$[c_{k\sigma}, c_{k'\sigma'}]_+ = [c_{k\sigma}^*, c_{k'\sigma'}^*]_+ = 0$$

- operator liczby cząstek $n_{k\sigma} = c_{k\sigma}^*c_{k\sigma}$
- para Coopera o sparowanych pędach i spinach opisywana jest przez

$$|\text{CP}\rangle = v_k c_{k\uparrow}^* c_{-k\downarrow} |0\rangle$$

- stan podstawowy BCS

$$|\text{BCS}\rangle = \prod_{\mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^* c_{-\mathbf{k}\downarrow}) |0\rangle$$

- Hamiltonian (zredukowany)

$$H = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \epsilon_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}\sigma} + \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}\uparrow}^* c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{-\mathbf{k}'\downarrow} c_{\mathbf{k}'\uparrow}$$

Minimalizacja energii

- Energia (w zerowej temperaturze)

$$F = \langle \text{BCS} | H - \mu N | \text{BCS} \rangle$$

- Metoda wariacyjna prowadząca do równań pola średniego

$$\delta \langle \text{BCS} | \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \xi_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}\sigma} + \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}\uparrow}^* c_{-\mathbf{k}\downarrow}^* c_{-\mathbf{k}'\downarrow} c_{\mathbf{k}'\uparrow} | \text{BCS} \rangle = 0$$

gdzie $\xi_{\mathbf{k}} = \epsilon_{\mathbf{k}} - \mu$

- Energia (w zerowej temperaturze)

$$F = \langle \text{BCS} | H - \mu N | \text{BCS} \rangle$$

- Metoda wariacyjna prowadząca do równań pola średniego

$$\delta \langle \text{BCS} | \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \xi_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}\sigma} + \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}\uparrow}^* c_{-\mathbf{k}\downarrow}^* c_{-\mathbf{k}'\downarrow} c_{\mathbf{k}'\uparrow} | \text{BCS} \rangle = 0$$

gdzie $\xi_{\mathbf{k}} = \epsilon_{\mathbf{k}} - \mu$

- przerwa energetyczna

$$\Delta_{\mathbf{k}} = - \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}'}$$

Kwantowanie strumienia magnetycznego

- Strumień magnetyczny (F. London)

$$\Phi = \frac{1}{q} \oint \vec{p} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{q} \oint (m^* \vec{v}_s + q\vec{A}) \cdot d\vec{l}$$

podlega kwantowaniu analogicznemu do reguły Bohra–Sommerfelda

$$\oint \vec{p} \cdot d\vec{l} = 2\pi\hbar n$$

- Strumień magnetyczny (F. London)

$$\Phi = \frac{1}{q} \oint \vec{p} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{q} \oint (m^* \vec{v}_s + q\vec{A}) \cdot d\vec{l}$$

podlega kwantowaniu analogicznemu do reguły Bohra–Sommerfelda

$$\oint \vec{p} \cdot d\vec{l} = 2\pi\hbar n$$

- Strumień magnetyczny jest wielokrotnością fluksonu Φ_0

$$\Phi = n \frac{2\pi\hbar}{q} = n\Phi_0$$

Zjawisko Josephsona (1962)

Zjawisko Josephsona (1962)

- Funkcja falowa nadprzewodnika ma postać $\psi = |\psi|e^{i\varphi}$
- Niech $\vartheta = \Delta\varphi$ będzie różnicą faz dwóch funkcji falowych nadprzewodników oddzielonych warstwą materiału o normalnym przewodnictwie (metal, izolator, dielektryk)

Zjawisko Josephsona (1962)

- Funkcja falowa nadprzewodnika ma postać $\psi = |\psi|e^{i\varphi}$
- Niech $\vartheta = \Delta\varphi$ będzie różnicą faz dwóch funkcji falowych nadprzewodników oddzielonych warstwą materiału o normalnym przewodnictwie (metal, izolator, dielektryk)
- Przez złącze nadprzewodnik–izolator–nadprzewodnik nawet przy zerowej różnicy potencjałów może przepływać prąd tunelujących par Coopera
- (I równanie Josephsona) W nieobecności zewnętrznego potencjału magnetycznego

$$I = I_c \sin \vartheta, \quad I_c \sim 10^{-6} - 10^{-3} \text{ A}$$

Zjawisko Josephsona (1962)

- Funkcja falowa nadprzewodnika ma postać $\psi = |\psi|e^{i\varphi}$
- Niech $\vartheta = \Delta\varphi$ będzie różnicą faz dwóch funkcji falowych nadprzewodników oddzielonych warstwą materiału o normalnym przewodnictwie (metal, izolator, dielektryk)
- Przez złącze nadprzewodnik–izolator–nadprzewodnik nawet przy zerowej różnicy potencjałów może przepływać prąd tunelujących par Coopera
- (I równanie Josephsona) W nieobecności zewnętrznego potencjału magnetycznego

$$I = I_c \sin \vartheta, \quad I_c \sim 10^{-6} - 10^{-3} \text{ A}$$

- (II równanie Josephsona) Jeśli przyłożymy do złącza różnicę potencjałów U to

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{qU}{\hbar}$$

Zjawisko Josephsona (1962)

- Funkcja falowa nadprzewodnika ma postać $\psi = |\psi|e^{i\varphi}$
- Niech $\vartheta = \Delta\varphi$ będzie różnicą faz dwóch funkcji falowych nadprzewodników oddzielonych warstwą materiału o normalnym przewodnictwie (metal, izolator, dielektryk)
- Przez złącze nadprzewodnik–izolator–nadprzewodnik nawet przy zerowej różnicy potencjałów może przepływać prąd tunelujących par Coopera
- (I równanie Josephsona) W nieobecności zewnętrznego potencjału magnetycznego

$$I = I_c \sin \vartheta, \quad I_c \sim 10^{-6} - 10^{-3} \text{ A}$$

- (II równanie Josephsona) Jeśli przyłożymy do złącza różnicę potencjałów U to

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{qU}{\hbar}$$

- Przy stałym napięciu $U = 1 \text{ V}$ przez złącze płynie prąd przemienny o wysokiej częstotliwości

$$\omega = \frac{2e}{\hbar} \sim 3,2 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

- SQUID (Superconducting Quantum Interference Device) — urządzenie do pomiaru strumienia magnetycznego oparte o dwa złącza Josephsona połączone równolegle.

- SQUID (Superconducting Quantum Interference Device) — urządzenie do pomiaru strumienia magnetycznego oparte o dwa złącza Josephsona połączone równolegle.
- Pod nieobecność strumienia magnetycznego obejmowanego przez obwód, prąd I dzieli się na dwie równe części w obu ramionach SQUIDA

- SQUID (Superconducting Quantum Interference Device) — urządzenie do pomiaru strumienia magnetycznego oparte o dwa złącza Josephsona połączone równolegle.
- Pod nieobecność strumienia magnetycznego obejmowanego przez obwód, prąd I dzieli się na dwie równe części w obu ramionach SQUIDA
- Pojawienie się strumienia zaburza tę symetrię prowadząc do zmian różnic faz ϑ_1, ϑ_2 na obu złączach

- SQUID (Superconducting Quantum Interference Device) — urządzenie do pomiaru strumienia magnetycznego oparte o dwa złącza Josephsona połączone równolegle.
- Pod nieobecność strumienia magnetycznego obejmowanego przez obwód, prąd I dzieli się na dwie równe części w obu ramionach SQUIDA
- Pojawienie się strumienia zaburza tę symetrię prowadząc do zmian różnic faz ϑ_1, ϑ_2 na obu złączach
- Równania SQUIDA

$$I = I_1 + I_2$$

- SQUID (Superconducting Quantum Interference Device) — urządzenie do pomiaru strumienia magnetycznego oparte o dwa złącza Josephsona połączone równolegle.
- Pod nieobecność strumienia magnetycznego obejmowanego przez obwód, prąd I dzieli się na dwie równe części w obu ramionach SQUIDA
- Pojawienie się strumienia zaburza tę symetrię prowadząc do zmian różnic faz ϑ_1, ϑ_2 na obu złączach
- Równania SQUIDA

$$I = I_1 + I_2$$

$$I_1 = I_c \sin \vartheta_1 + \frac{U_1}{R}, \quad I_2 = I_c \sin \vartheta_2 + \frac{U_2}{R}$$

- SQUID (Superconducting Quantum Interference Device) — urządzenie do pomiaru strumienia magnetycznego oparte o dwa złącza Josephsona połączone równolegle.
- Pod nieobecność strumienia magnetycznego obejmowanego przez obwód, prąd I dzieli się na dwie równe części w obu ramionach SQUIDA
- Pojawienie się strumienia zaburza tę symetrię prowadząc do zmian różnic faz ϑ_1, ϑ_2 na obu złączach
- Równania SQUIDA

$$I = I_1 + I_2$$

$$I_1 = I_c \sin \vartheta_1 + \frac{U_1}{R}, \quad I_2 = I_c \sin \vartheta_2 + \frac{U_2}{R}$$

$$U = U_1 + L\dot{I}_1 = U_2 + L\dot{I}_2$$

- SQUID (Superconducting Quantum Interference Device) — urządzenie do pomiaru strumienia magnetycznego oparte o dwa złącza Josephsona połączone równolegle.
- Pod nieobecność strumienia magnetycznego obejmowanego przez obwód, prąd I dzieli się na dwie równe części w obu ramionach SQUIDA
- Pojawienie się strumienia zaburza tę symetrię prowadząc do zmian różnic faz ϑ_1, ϑ_2 na obu złączach
- Równania SQUIDA

$$I = I_1 + I_2$$

$$I_1 = I_c \sin \vartheta_1 + \frac{U_1}{R}, \quad I_2 = I_c \sin \vartheta_2 + \frac{U_2}{R}$$

$$U = U_1 + L\dot{I}_1 = U_2 + L\dot{I}_2$$

$$\dot{\vartheta}_1 = \frac{qU_1}{\hbar}, \quad \dot{\vartheta}_2 = \frac{qU_2}{\hbar}$$