II. Ciągi. Pochodna funkcji jednej zmiennej

II.1. Obliczyć sumę S_n ciągu arytmetycznego (a_n), jeśli

a) $a_1 = 1, \quad r = 3, \quad n = 12$

b) $a_1 = 100, \quad r = -2, \quad n = 50$

c) $a_1 = -10, \quad r = 5, \quad n = 25$

II.2. Wskazać i uzasadnić, który z ciągów arytmetycznych jest malejący, a który rosnący

a) $a_n = 2 + 3n$

b) $b_n = 3 - 5n$

c) $c_n = 4n - 3$

d) $d_n = -1 - 3n$

II.3. Jeśli podany ciąg jest geometryczny, to wyznaczyć jego iloraz:

a) $1, 3, 9, 27, \ldots$

b) $5, 5, 5, \ldots$

c) $-2, 4, -6, 8, -12, \ldots$

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \ldots,$

e) $\sqrt{2}, -2, 2\sqrt{2}, \ldots.$

II.4. Obliczyć sumę S_n ciągu geometrycznego (a_n), w którym:

a) $a_1 = \frac{1}{2}, \quad q = \sqrt{2}, \quad n = 8$

b) $a_1 = -1, \quad q = -2, \quad n = 6$

c) $a_1 = 5, \quad q = \frac{3}{2}, \quad n = 5.$

II.5. Obliczyć sumy

a) $x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$

b) $1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n}$

c) $x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots + x^n$

d) $1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{1}{x^n}$

II.6. Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym a_n oraz dwie liczby g i ϵ. Które wyrazy danego ciągu spełniają nierówność: $|a_n - g| < \epsilon$, gdy:

a) $a_n = \frac{n-1}{n}, \quad g = 1, \quad \epsilon = 10^{-3}$

b) $a_n = \frac{2n}{n^2+1}, \quad g = 0, \quad \epsilon = 2{\cdot}10^{-3}$

c) $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}, \quad g = 0, \quad \epsilon = 3 \cdot 10^{-2}$

d) $a_n = \frac{1}{2^n}, \quad g = 0, \quad \epsilon = \frac{1}{2^{10}}.$

II.7. Znajdź granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n-3}{7-5n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{3-n^3}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{6n-2}{4n-7}\right)^3$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{4n^2+1} - 2n)$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^3+4n^2} - n)$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3 \cdot 2^{2n+2} - 10}{5 \cdot 4^{n-1} + 3}$

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)}$

k) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+5+5^2+\cdots+5^n}{n^5}$

II.8. Zbadaj, czy podany szereg geometryczny jest zbieżny. Jeśli tak, to znajdź jego granicę:

a) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\dots$

b) $3-9+27-81+\dots$

c) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{2}{3\sqrt{3}}+\dots$

d) $0.2+0.02+0.002+\dots,$

e) $\frac{4}{3}+1+\frac{3}{4}+\dots$

f) $\sqrt{3}+1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}+\dots.$

II.9. Dla jakich wartości x podany szereg geometryczny jest zbieżny:

a) $x-3x^2+9x^3+\dots$

b) $x^2-x^3+x^4\pm\dots$

c) $1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\dots$

d) $1+\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}+\dots$

e) $1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\dots$

II.10. Oblicz granicę:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{6}+\frac{13}{36}+\dots+\frac{2^n+3^n}{6^n}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7}{12}+\frac{25}{144}+\dots+\frac{3^n+4^n}{12^n}\right).$

II.11. Oblicz:

a) $1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}+\dots$

b) $12+6+3+\dots$

c) $1-\frac{3}{5}+\frac{9}{25}-\frac{27}{125}+\dots$

d) $\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}+\dots.$

II.12. Znaleźć granicę funkcji w punkcie

a) $\lim\limits_{x\to-1}(-3x^2+4x+7)$

b) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3+1}{(x-20)^{10}}$

c) $\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2-11x+30}{x-5}$

d) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2-9}{x+3}$

e) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2+4x+4}{x+2}$

f) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(5x)}{x}$

g) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$

h) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{\cos x-\cos(\pi/4)}{\sin x-\sin(\pi/4)}$

i) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

j) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 2x}{\sin^2 3x}$

k) $\lim\limits_{x\to0}\frac{6x^2-2x-1}{2x^3-x^2-1}$

l) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

m) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+mx}-1}{x}$

n) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

o) $\lim\limits_{x\to25}\frac{\sqrt{x}-5}{x-25}$

p) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+16}-4}{\sqrt{x^2+25}-5}$

q) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}$

r) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{e^{3x}-1}$

s) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sinh x}{x}$

t) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x-3^x}{x}$

u) $\lim\limits_{x\to0}\frac{5^x-1}{7^x-1}$

v) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sinh(2x)}{\sin(5x)}$

II.13. Wyznaczyć granicę funkcji w nieskończoności

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3+5x^2-3x+7)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+2x^2-6x+1)$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x-2x^4)$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3-4x^2+8x-4)$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+5}{2-4x-3x^2}$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+5}{3x^3+6x^2-6x+1}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-4x^2+x-2}{2-x-x^2}$

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2+x+1}$

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+4x-7}{3x^2-2x+3}$

j) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-5x^2+7x-8}{3x^4-6x^2-10}$

k) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{3x^3-10x^2-7x+11}{2x^2-12x^3-13x-5}$

l) $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2-3}-x)$

m) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{3x}$

n) $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}\right)^{5\sqrt{x}}$

II.14. Zbadać granice jednostronne funkcji w punktach nie należących do dziedziny funkcji f

a) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

b) $f(x)=\dfrac{x}{x-4}$

c) $f(x)=\dfrac{2}{x+2}$

d) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$

e) $f(x)=\dfrac{12-x}{x-5}$

f) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-15}{x+5}$

g) $f(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$

h) $f(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}$

i) $f(x)=\dfrac{3x}{9-x^2}$

II.15. Zbadać ciągłość funkcji na zbiorze $\mathbb{R}$

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x+2|}{x+2}, & x\neq -2 \\ 1, & x=-2 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x}{x^2-x}, & x\neq 0,1 \\ -1, & x=0 \\ 1, & x=1 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+2x^2+x+2}{x+2}, & x\neq -2 \\ -5, & x=-2 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x(x+\cos x)}{x+\sin x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

II.16. Policzyć z definicji pochodne funkcji

a) $f(x)=2x^3$ w punkcie $x_0=2$,

b) $f(x)=1/\sqrt{x}$ w punkcie $x_0=1$,

c) $f(x)=\sin(2x)$ w punkcie $x_0=\pi/4$,

d) $f(x)=\sinh(x)$ w dowolnym punkcie.

II.17. Obliczyć pochodne funkcji:

a) $f(x)=x+3$

b) $f(x)=x+5$

c) $f(x)=5$

d) $f(x)=e$

e) $f(x)=2x$

f) $f(x)=-5x$

g) $f(x)=\sqrt{2}x$

h) $f(x)=x^2$

i) $f(x)=x^3$

j) $f(x)=\sqrt{x}$

k) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

l) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}}$

m) $f(x)=\sqrt[3]{4x^5}$

n) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{32x^5}}$

o) $f(x)=x^{-2}$

p) $f(x)=x^{-5}$

q) $f(x)=2x^3$

r) $f(x)=3x^2$

s) $f(x)=5x^7$

t) $f(x)=-10x^{-2}$

u) $f(x)=9x^2-12x+4$

v) $f(x)=x^3-9x^2+27x+27$

w) $f(x)=49x^2-70x+25$

x) $f(x)=(5-7x)^2$

y) $f(x)=(x-3)^3$

z) $f(x)=8x^3-8x^2+2x+3$

II.18. Obliczyć pochodne funkcji

a) $f(x)=2\sin x-\cos xx$

b) $f(x)=3\cos x-2\sin x$

c) $f(x)=5\cosh x+4\sinh x$

d) $f(x)=2e^x+4e^{-x}-\sinh x$

e) $f(x)=2\cosh(x)-3e^x+2e^{-x}$

f) $f(x)=e^{ax}-e^{-bx}$

II.19. Obliczyć pochodne funkcji:

a) $f(x) = (x-1)(x^2+x+1)$

b) $f(x) = x(x-2)(x-3)$

c) $f(x) = x\,e^x$

d) $f(x) = x^2\,2^x$

e) $f(x) = x^3\log_3(x) + x^2\log_2(x)$

f) $f(x) = 2^x\log_2 x$

g) $f(x) = 3^x\log_{1/3} x$

h) $f(x) = x\cos x$

i) $f(x) = x^2\sin x + x\,\mathrm{tg}\,x$

j) $f(x) = (3+4x-x^2)(\cos x - 2\sin x)$

k) $f(x) = (x^2-x+1)(\sin x + 3\cos x)$

II.20. Obliczyć pochodne funkcji:

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

e) $f(x) = \dfrac{x^3}{x-2}$

f) $f(x) = \dfrac{x-3}{x-2}$

g) $f(x) = \dfrac{5x-8}{6x+1}$

h) $f(x) = \mathrm{tg}\,x$

i) $f(x) = \mathrm{tgh}(x)$

j) $f(x) = x^2\,\mathrm{tg}\,x$

k) $f(x) = \dfrac{x\log x}{x^2+1}$

l) $f(x) = \dfrac{x^2(\sin x + \cos x)}{x\cos x}$

m) $f(x) = \dfrac{x^n\,e^x}{\ln(x)}$

II.21. Oblicz pochodne funkcji złożonych:

a) $f(x) = (x^2+1)^{10}$

b) $f(x) = (x^2-1)^{5/2}$

c) $f(x) = (x^3+x^2-x-2)^5$

d) $f(x) = \sin(2x)$

e) $f(x) = \cos(3x)$

f) $f(x) = \mathrm{tg}(4x)$

g) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

h) $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$

i) $f(x) = \left(\dfrac{5x-8}{6x+1}\right)^3$

j) $f(x) = \left(\dfrac{16x^2-5x-9}{12x-7}\right)^4$

k) $f(x) = (3x^5-17x+3)^3$

l) $f(x) = (3x^5-17x+3)^{13}$

m) $f(x) = x^4 + \sqrt[4]{4x^3+2x^2-\pi}$

n) $f(x) = \dfrac{x^2\sqrt{x^2-1}}{(x^2+1)^2}$

II.22. Obliczyć pochodne funkcji złożonych

a) $f(x) = \mathrm{tg}\,8x$

b) $f(x) = \mathrm{tgh}\,7x$

c) $f(x) = (\sin x)^2$

d) $f(x) = (\cos x)^3$

e) $f(x) = (\mathrm{tg}\,x)^5$

f) $f(x) = 3(\sin x)^4$

g) $f(x) = \dfrac{1}{7}(\mathrm{tg}\,x)^2$

h) $f(x) = \sin\left(x + \dfrac{3}{8}\pi\right)$

i) $f(x) = \cos(3x - \pi/7)$

II.23. Oblicz pochodne funkcji:

a) $f(x) = [x\cos(x)]^2$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}$

c) $f(x) = \sin x\cos x$

d) $f(x) = (\sin x + \cos x)^2$

e) $f(x) = \sin x \cos(x - \phi)$

f) $f(x) = \sin(x - \phi)\cos(x + \phi)$

g) $f(x) = (\ln x)^2$

h) $f(x) = \log_3 \dfrac{x}{x-1}$

i) $f(x) = \log_5^2 x$

j) $f(x) = \sqrt{\ln(\operatorname{tg}(x/2))}$

II.24. Oblicz pochodne funkcji:

a) $f(x) = 3^{2x}$

b) $f(x) = -5\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3x}$

c) $f(x) = \sqrt{8}a^{\sqrt{8}x}$

d) $f(x) = \sqrt{3a^{3x}}$

e) $f(x) = 3e^{-3x}$

f) $f(x) = 13e^{3x^6}$

II.25. Policzyć i uprościć pochodne funkcji

a) $f(t) = \dfrac{at^2 - 1}{2a^2}\, e^{at^2}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 \ln^2 x - \dfrac{1}{2}\ln x + \dfrac{1}{4}x^2$

c) $f(t) = \ln(\sin x) - x \operatorname{ctg} x$

d) $f(v) = b\ln(a\cos v + b\sin v) + av$

e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{2}\sin x\sqrt{1 - k^2\sin^2 x} + \dfrac{1}{2k}\arcsin(k\sin x)$

g) $f(u) = \sinh u \cosh u - u$

h) $f(w) = (w^2 + 2)\cosh w - 2w\sinh w$

i) $f(x) = -\dfrac{1}{\sinh x} - \operatorname{arctg}(\sinh x)$

j) $f(x) = -\dfrac{1}{2\sinh^2 x} - \ln(\operatorname{tgh} x)$

k) $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

l) $f(t) = \ln(t + \sqrt{1 + t^2})$

m) $f(x) = x\arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$

n) $f(u) = u \operatorname{arctg} u - \frac{1}{2}\ln(1 + u^2)$

o) $f(x) = \dfrac{a}{b^2}\ln\dfrac{ax + b}{x} - \dfrac{1}{bx}$

p) $f(w) = \dfrac{1}{2a^2}\ln\dfrac{w^2}{w^2 + a} + \dfrac{1}{2a(w^2 + a)}$

q) $f(x) = \dfrac{1}{2a^2}\operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{a^2}$

r) $f(x) = x(\arcsin x)^2 - 2x + 2\sqrt{1 - x^2}\arcsin x$

s) $f(x) = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1)$

t) $f(x) = -\dfrac{1}{x}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} - \dfrac{1}{2a}\ln\dfrac{a^2 + x^2}{x^2}$

II.26. Wyrazić pochodną funkcji złożonej $g(t)$ przez $f'(t)$ oraz $f(t)$

a) $g(t) = \sqrt[3]{f(t)}$

b) $g(t) = t^2 f(t)$

c) $g(t) = \sqrt{1 + [f(t)]^2}$

d) $g(t) = \exp[-tf(t)]$

e) $g(t) = \sin[\omega t - f(t)]$

f) $g(t) = \log_2[f(t)]$

g) $g(t) = \ln\dfrac{1 + [f(t)]^2}{1 - [f(t)]^2}$

h) $g(t) = f(t)\exp[-f(t)^2]$

II.27. Obliczyć pochodną rzędu n funkcji

a) $f(x) = e^{-x}$

b) $f(x) = e^{ax}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{b - ax}$

d) $f(x) = \ln(1 + x)$

e) $f(x) = (5 + 2x)^n$

II.28. Wyznaczyć styczną do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$

a) $y = \sqrt{2x}$ dla $x_0 = 2$,

b) $y = \log_{1/2}(16x)$ dla $x_0 = 2$,

c) $y = \sin x$ dla $x_0 = \pi/4$,

d) $y = \cos x$ dla $x_0 = \pi/6$.

II.29. Wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji

a) $W(x) = -x^3 + 12x - 3$

b) $W(x) = 8x^2 - x^4$

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

d) $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

f) $f(x) = \sin x - x$ w przedziale $[0, 2\pi]$

g) $f(x) = x - \cos x$ w przedziale $[0, 2\pi]$

II.30. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji

a) $W(x) = -x^4 + 2x^2$

b) $W(x) = 8x^2 - x^4$

c) $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$

d) $f(x) = -5x^2 + 17x + 1$

e) $f(x) = 3x^4 - 5x - 7$

f) $f(x) = 5x^3 - 12x^2 + 5x + 12$

g) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

h) $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$

i) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-9}$

j) $f(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x^2-x+1}$

k) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

l) $f(x) = x\sqrt{2} - \sin x$

m) $f(x) = \sin 3x - 3\sin x$

n) $f(x) = \sin x \sin(x - 45^\circ)$

o) $f(x) = \dfrac{\cos 2x}{\cos x}$

II.31. Zbadać przebieg zmienności wykresu funkcji

a) $W(x) = 3x - x^3$

b) $w(x) = x(x-1)^2$

c) $f(x) = \dfrac{2x^2}{4-x^2}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

e) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

f) $f(x) = \dfrac{x}{a} + \dfrac{a}{x}$

g) $f(x) = x + e^{-x}$

h) $f(x) = -x\log_2 x$

i) $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x-2}$

II.32. Przybliżyć podaną funkcję wielomianem stopnia n w okolicy x_0.

a) $f(x) = 2^{-x}$, $x_0 = 0$,

b) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$

c) $g(x) = \sinh(x)$, $x_0 = 0$

d) $h(x) = \sin \pi x$, $x_0 = 1$

e) $u(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$, $x_0 = 0$, $n = 3$.

II.33. Oszacować z dokładnością do 10^{-3}

a) $\ln 2$

b) $\operatorname{tgh} \dfrac{1}{2}$

c) $\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$

II.34. Obliczyć granice korzystając z reguły de l'Hospitala

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x+a} - \sqrt{2a}}{\sqrt{x+2a} - \sqrt{3a}}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - x - 1}{x^2}$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^p - 1}{x^q - 1}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x \operatorname{tg} x}\right)$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x\cos x}{\cos x(x - \sin x \cos x)}$

i) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln \sin 2x}{\ln \sin 6x}$