

I. Działania na liczbach. Funkcje elementarne

I.1. Obliczyć

- a) $(5^7 : 5^3) \cdot 5^4$
b) $10^5 \cdot 10^{-2} : 10^{-4}$
c) $\frac{10^3 \cdot (10^2)^{-2}}{10^{-2} + 10 \cdot 10^{-3}}$
d) $\frac{6^4}{3^2}$
e) $[(-8)^6 \cdot (-8)^2] : (-8)^4$
f) $(4^5 : 4^2) : (4^6 : 4^5)$
g) $(3 \cdot 4 \cdot 5)^2$
h) $(25^{0.75} + 625^{0.25})(0.2^{-3/2} - 25^{0.5})$
- i) $(343^{1/3} - 7\sqrt{7}) \left[\left(\frac{1}{7}\right)^{-1} + 7^{1.5} \right]$
j) $\frac{2^2 \cdot 4 \cdot (2^2)^4}{2^5 \cdot 2^2}$
k) $4^{-6} \cdot 4^4 \cdot (2^3 \cdot 2^{-4})^{-1}$
l) $(2^3)^2$
m) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^3\right]^2$
n) $[(0,2)^2]^3$
o) $\frac{((\sqrt{7})^7)^2}{(\sqrt{7})^{11}}$
p) $(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}})^2$
q) $\frac{(\sqrt{24} + \sqrt{36})^2}{16 - 2\sqrt{12}}$
r) $\sqrt{6} + \sqrt{24} - \sqrt{54}$
s) $\frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1} + \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} - 1}$
t) $\sqrt{6 + 4\sqrt{2}}$
u) $\sqrt{19 + 8\sqrt{3}}$

I.2. Rozwiąż równania z niewiadomą x . Pamiętaj o wyznaczeniu dziedziny równania!

- a) $x^2 + 4x = 5$
b) $x^2 - 10x = 24$
c) $\frac{x-3}{3} = \frac{3}{x-3}$
d) $x^4 + 2x^2 = 8$
e) $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$
f) $(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) = 24$
- g) $\frac{x-1}{4} = \frac{2}{x+1}$
h) $\frac{2x+1}{3} = \frac{8}{2x-1}$
i) $\frac{x-3}{3} = \frac{3}{x-3}$
j) $\frac{x}{x+1} = \frac{2x}{x-1}$
- k) $\frac{2x+3}{3x+2} = \frac{6x+6}{5x+4}$
l) $x + \frac{6}{x} = 7$
m) $x - \frac{3}{x} = 2$
n) $\frac{x}{x+3} + \frac{4}{x+1} = 2$

I.3. Wyznaczyć niewiadomą x w zależności od parametrów:

- a) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$
b) $abx^2 - (a+b)x + 1 = 0$
c) $(x+b)(x-b) + ab = ax$
d) $\frac{m-x}{3} = \frac{x-3}{m}$
e) $\frac{x+a}{a} + 5 = \frac{x+5}{5} + a$
f) $\frac{2x+1}{2x-1} = \frac{m-1}{m+1}$
g) $\frac{x+2a}{ax+x} = 2$
- h) $\frac{x^2+1}{a^2x-2a} + \frac{1}{ax-2} = \frac{x}{a}$
i) $\frac{x+a}{a-x} = \frac{ab+1}{ab-1}$
j) $\frac{x+a}{2} - \frac{2}{x+a} = \frac{x-a}{2}$
k) $\frac{x+a}{x-b} + \frac{x+b}{x-a} = 2$
l) $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$
m) $\frac{x}{a} + \frac{a}{x} - \frac{x}{ab^2} = \frac{ab^2}{x}$

I.4. Rozwiązać nierówności:

- a) $x^2 + 2x - 3 \geq 0$ c) $x^2 - 5x - 14 > 0$ e) $84 + 5x - x^2 \geq 0$
 b) $-2x^2 - x + 1 < 0$ d) $5x^2 + 7 > 4x$ f) $(4x - 3)^2 > 9$

I.5. Dla każdej z podanych funkcji określić jej przedziały monotoniczności i stwierdzić, czy jest różnowartościowa na zbiorze D .

- a) $f(x) = 3 - 2x, \quad D = \mathbb{R},$ e) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad D = \mathbb{R} \setminus \{1\},$
 b) $f(x) = \frac{1+x}{2}, \quad D = \mathbb{R},$ f) $f(x) = |x+1| + |2x-1|, \quad D = \mathbb{R},$
 c) $f(x) = 3 - 2x - x^2, \quad D = \mathbb{R},$ g) $f(x) = \sqrt{|x|}, \quad D = \mathbb{R}.$
 d) $f(x) = (x-3)^2, \quad D = \mathbb{R},$

I.6. Zamienić miarę łukową kąta na jego miarę stopniową:

- a) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{7\pi}{6}$ e) $\frac{\pi}{18}$ g) $\frac{7\pi}{20}$
 b) $\frac{\pi}{12}$ d) $\frac{2\pi}{3}$ f) $\frac{4\pi}{9}$ h) $\frac{4\pi}{15}$
 i) 1

I.7. Zapisać miarę kąta w mierze łukowej:

- a) 30° c) 60° e) 135° g) 1°
 b) 45° d) 90° f) 270° h) 57°

I.8. O jaki kąt przemieści się minutowa wskazówka zegara pomiędzy godzinami:

- a) 12:00 a 12:30 b) 10:45 a 11:55 c) 7:00 a 15:00

I.9. Obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych sin, cos, tg następujących kątów:

- a) 120° d) 210° g) 270° j) 330°
 b) -135° e) -225° h) 300° k) 1125°
 c) 150° f) 240° i) -315° l) -660°

I.10. Obliczyć:

- a) $\sin 15^\circ$ d) $\cos 720^\circ$ g) $\operatorname{tg} 330^\circ$ j) $\cos(-1110^\circ)$
 b) $\cos 105^\circ$ e) $\sin 150^\circ$ h) $\cos 240^\circ$
 c) $\operatorname{tg} 105^\circ$ f) $\operatorname{tg} 135^\circ$ i) $\sin(-120^\circ)$

I.11. Korzystając z własności funkcji trygonometrycznych uprościć wyrażenia:

- a) $\sin(4\pi + \alpha)$ d) $\cos(7\pi + \alpha)$ g) $\sin(\alpha - \frac{7\pi}{2})$
 b) $\operatorname{tg}(\alpha - \frac{\pi}{3})$ e) $\operatorname{tg}(3\pi - \alpha)$
 c) $\sin(\pi - \alpha)$ f) $\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha)$

I.12. Sprowadzić podane wyrażenia do najprostszej postaci

a) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha$

c) $\cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha + \sin^3 \alpha$

e) $\frac{1 - 2 \cos^2 \alpha}{2 \sin^2 \alpha - 1}$

b) $(1 + \sin \beta)(1 - \sin \beta)$

d) $\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$

f) $\frac{\sin \alpha - \sin^3 \alpha}{\cos \alpha - \cos^3 \alpha}$

I.13. Wiedząc, że $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}/2$, obliczyć wartości wyrażenia:

$$\frac{3 \sin \alpha - 2 \cos \alpha}{5 \cos \alpha - 7 \sin \alpha}$$

I.14. Wiedząc, że $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2} - 1$, obliczyć wartości wyrażenia:

$$\frac{3 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}$$

I.15. Rozwiązać równania trygonometryczne:

a) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$

f) $3 + 4 \cos(0.5x) = -1$

b) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

g) $\cos \frac{\pi}{3} \cos x - \sin \frac{\pi}{3} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

h) $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 1$

d) $2 \cos \alpha = -\sqrt{3}$

i) $\sin 2x = \sin x$

e) $\operatorname{tg} \alpha = 1$

j) $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg} 3x$

I.16. Rozwiązać nierówności wykorzystując wykresy funkcji trygonometrycznych

a) $\sin 2x > \frac{1}{2}$ w przedziale $[0, \pi]$

c) $\sin x > -\frac{1}{2}$ w przedziale $[-\pi, \pi]$

d) $-\sqrt{3} \leq \operatorname{tg} x < \sqrt{3}$ w przedziale $[-\pi/2, \pi/2]$

b) $\cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ w przedziale $[0, 2\pi]$

e) $\cos\left(\frac{1}{2}x\right) > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ w przedziale $[-2\pi, 2\pi]$

I.17. Wyznaczyć wartość k , jeśli

a) $0,12 \cdot 10^k = 12000$

c) $12,31 \cdot 10^k = 12310000$

b) $2,567 \cdot 10^k = 0,0002567$

d) $1,01 \cdot 10^k = 0,00000101$

I.18. Naszkicować we wspólnym układzie XY wykresy funkcji:

a) $y = 3^x$ oraz $y = 3^{-x}$

c) $y = 2^{x-1}$ oraz $y = 2^x - 1$

b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ oraz $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$

d) $y = -4^{x-2}$ oraz $y = -4^x + 2$

I.19. Rozwiązać równania:

a) $2^{5x-8} = 4^{x-3}$

c) $\left(\frac{4}{5}\right)^{4x-5} = \left(\frac{5}{4}\right)^{5x-4}$

e) $5^{x-5} \cdot 25^{x+3} = 25$

b) $4^x = 8^{2x-1}$

d) $\sqrt{3^x} = \frac{1}{\sqrt{27}}$

f) $3^{x-4} \cdot 27^{3-2x} = 9^{3x-3}$

I.20. Rozwiązać nierówności:

a) $5^{x-6} < 5^{6x-1}$

f) $3^{2x-3} < 27^{x+8}$

b) $(0, 1)^{8x-3} > (0, 1)^{2x-2}$

g) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x+1} > \left(\frac{27}{8}\right)^{x-3}$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2x+5} < 32$

h) $0,5^{2x^2-x} \geq 1$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{4-2x} > 81$

i) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x+2}} \leq \frac{4}{9}$

e) $4^{|x|} < 8$

j) $16^x + 3 \cdot 2^{2x+1} + 8 < 0$

I.21. Obliczyć wartości liczbowe wyrażeń

a) $\log_5 625$

d) $10^{2+\log 3}$

g) $\log_2(4\sqrt{8\sqrt{16\sqrt{32}}})$

b) $\log_{\frac{1}{5}} 1$

e) $\log_3(9\sqrt{3})$

h) $16^{\log_2 \sqrt[4]{2} + \log_4 3}$

c) $\log_{\sqrt{5}} 5^3 \sqrt{5}$

f) $\log(10 \cdot 10^{1/2} \cdot 10^{1/3} \cdot 10^{1/4})$

I.22. Określić dziedzinę funkcji:

a) $f(x) = \log_2(9 - x^2)$

c) $f(x) = \log_x(2^x - 16\sqrt{2})$

d) $f(x) = \log_{x+3} \frac{x}{x+1}$

b) $f(x) = \log_{\sqrt{2}} |x - 1|$

I.23. Naszkicować we wspólnym układzie XY wykresy funkcji:

a) $y = \log_2 x$ oraz $y = \log_{1/2} x$

f) $y = \log_3(-x)$ oraz $y = \log_3 x$

b) $y = -\log_3 x$ oraz $y = -\log_{1/3} x$

g) $y = 2 \log_{1/2} x$ oraz $y = \log_{1/2} x^2$

c) $y = \log_2(x + 1)$ oraz $y = \log_2 x + 1$

h) $y = \frac{1}{2} \log_4 x$ oraz $y = \log_4 \sqrt{x}$

d) $y = \log_{1/2}(x - 2)$ oraz $y = \log_{1/2} x - 2$

i) $y = \log x$ oraz $y = \log |x|$

e) $y = \log x$ oraz $y = |\log x|$

I.24. Rozwiązać równania. Pamiętać o wyznaczeniu dziedziny równania!

a) $\log_{27} x = \frac{4}{3}$

f) $3 - \log x = \log 16$

b) $\log_3 \sqrt[3]{3} x = -\frac{3}{2}$

g) $\log(x + 2) - \log 5 = \log(x - 6)$

c) $\log_3(12 - x) = 2$

h) $\log_3 9 - 3 = \log_3(x - 1) - \log_3(x + 5)$

d) $\log_4(4 - 2x) = 3$

i) $\log_5 3 + \log_{25} x = \log_{\frac{1}{5}} \sqrt{2}$

e) $\log x = 2 - \log 5$

j) $\log_2 x + \log_3 x = \frac{\log 6}{\log 2}$

I.25. Funkcje hiperboliczne zdefiniowane są jako

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

a) Obliczyć $\cosh^2 x - \sinh^2 x$

b) Pokazać, że $\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh(2x)$

c) Pokazać, że $2 \sinh x \cosh x = \sinh(2x)$

- d) Pokazać, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ $\cosh x \geq 1$
- e) Znaleźć postać funkcji odwrotnej do $f(x) = \sinh x$
- f) Znaleźć postać funkcji odwrotnej do $f(x) = \cosh x$ na przedziale $[0, +\infty)$
- g) Znaleźć postać funkcji odwrotnej do $f(x) = \operatorname{tgh} x$