IV. Całki funkcji wielu zmiennych

IV.1. Obliczyć pochodne cząstkowe po wszystkich zmiennych

a) $W(x,y) = x^2 + xy + y^2$

b) $W(x,y) = x^4 - 4x^2y^2 + 2y^4$

c) $W(x,y,z) = 2x^3y + 3x^2y^2 - xy^3$

d) $W(x,y,z) = x^4 + 3x^3y - 2x^2y + 4xy^3 - y^5$

e) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + xy + y^2}$

f) $f(x,y,z) = \dfrac{2x^2 - 3xy + y^2}{x^2 - xy}$

g) $f(x,y,z) = (xy + z)\ln(x^2 + y^2 + z^2)$

h) $f(x,y,z) = \sin(xy)\cos(xz)\sin(zy)$

i) $f(x,y,z) = \operatorname{tg}(xy)\operatorname{ctg}(yz)$

IV.2. Wyznaczyć pochodną kierunkową $\operatorname{grad} f(A) \cdot \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ funkcji f w punkcie A w kierunku wektora $\vec{a}$.

a) $f(x,y) = 2x^2 - 5xy + 3y^2$ w punkcie $A = (1,1)$ w kierunku $\vec{a} = [-1,1]$

b) $f(x,y,z) = x^2y + 3xy - 2xy^2$ w punkcie $A = (1,1,-1)$ w kierunku $\vec{a} = [-1,1,0]$

c) $f(x,y) = \dfrac{x + y + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ w punkcie $A = (-1,2)$ w kierunku $\vec{a} = [1,-1]$

d) $f(x,y,z) = xyz\, e^{-x^2-y^2-z^2}$ w punkcie $A = (1,2,-1)$ w kierunku $\vec{a} = [-1,1,-1]$

IV.3. Obliczyć dywergencję i rotację pól wektorowych

a) $\vec{F}(x,y) = [x^2 + y^2, 2xy]$

b) $\vec{G}(x,y,z) = [xy, yz, zx]$

c) $\vec{H}(x,y,z) = [\sin(yz), \cos(xz), \sin(xy)]$

d) $\vec{F}(x,y) = [2\sin(3x + 2y), 3\cos(2x - 3y)]$.

IV.4. Niech $\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ oznacza wektor położenia w przestrzeni oraz $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ będzie stałym wektorem w przestrzeni (jego współrzędne nie zależą od zmiennych przestrzennych). Obliczyć

a) $\operatorname{div}\vec{r}$

b) $\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{r})$

c) $\operatorname{rot}\vec{r}$

d) $\operatorname{rot}(\vec{a} \times \vec{r})$

e) $\operatorname{grad}|\vec{r}|^2$

f) $\operatorname{grad}(\vec{a} \cdot \vec{r})$

g) $\operatorname{grad}\dfrac{1}{|\vec{r}|}$

h) $\operatorname{grad}\dfrac{1}{|\vec{r}|^2}$

i) $\operatorname{grad}\dfrac{e^{-\alpha|\vec{r}|}}{|\vec{r}|}$

j) $\operatorname{grad}(|\vec{r}|^2 \ln|\vec{r}|)$

IV.5. Podać parametryzację podanego obszaru 2D w zmiennych biegunowych

a) pierścienia $\{(x,y) : r^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$,

b) wycinka koła $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 4,\ \frac{x}{\sqrt{3}} \leqslant y \leqslant \sqrt{3}x,\ x \geqslant 0\}$,

c) wycinka koła $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 9,\ -y \leqslant x \leqslant y\}$,

d) koła $\{(x,y) : (x-1)^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

IV.6. Podać parametryzację podanego obszaru 3D w nowych zmiennych

a) wydrążonej centralnie kuli $\{(x,y,z) : R_1^2 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R_2^2\}$ w zmiennych kulistych,

b) wydrążonego centralnie walca $\{(x,y,z) : R_1^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant R_2^2,\ 0 \leqslant z \leqslant H\}$ w zmiennych walcowych,

c) półkuli $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4,\ x \geqslant 0\}$ w zmiennych kulistych,

d) stożka $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leqslant (z-3)^2,\ 0 \leqslant z \leqslant 3\}$ w zmiennych walcowych,

e) stożka parabolicznego $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z \leqslant 4,\ 0 \leqslant z \leqslant 4\}$ w zmiennych walcowych,

f) wydrążonego walca ściętego o wysokości H

$$\left\{(x, y, x) : R_1^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant R_2^2,\ \frac{y}{R_2} + \frac{2z}{H} \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant H\right\}$$

IV.7. Zmienić porządek całkowania w całkach iterowanych. Naszkicować obszar całkowania

a) $\displaystyle\int_1^2 \Big[\int_x^{2x} f(x, y)dy\Big]dx,$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \Big[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)dy\Big]dx,$

b) $\displaystyle\int_0^1 \Big[\int_y^{\sqrt{y}} f(x, y)dx\Big]dy,$

d) $\displaystyle\int_{-1}^0 \Big[\int_{-y}^{y^2} f(x, y)dx\Big]dy.$

IV.8. Zmieniając porządek całkowania w całkach iterowanych zapisać je w postaci jednej całki podwójnej

a) $\displaystyle\int_0^1 \Big[\int_0^x f(x, y)dy\Big]dx + \int_1^2 \Big[\int_0^{2-x} f(x, y)dy\Big]dx,$

b) $\displaystyle\int_0^1 \Big[\int_0^{x^2} f(x, y)dy\Big]dx + \int_1^3 \Big[\int_0^{(3-x)/2} f(x, y)dy\Big]dx.$

IV.9. Obliczyć całki iterowane

a) $\displaystyle\int_0^a \Big[\int_0^{\sqrt{x}} dy\Big]dx,$

b) $\displaystyle\int_2^4 \Big[\int_x^{2x} \frac{y}{x}dy\Big]dx,$

c) $\displaystyle\int_1^2 \Big[\int_0^{\ln y} e^x dx\Big]dy.$

IV.10. Obliczyć całki podwójne po podanych prostokątach

a) $\displaystyle\iint_P xydxdy, \quad P = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 2\},$

b) $\displaystyle\iint_P \sqrt{xy}dxdy, \quad P = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b\},$

c) $\displaystyle\iint_P x \sin y dxdy, \quad P = \{(x, y) : 1 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi/2\},$

d) $\displaystyle\iint_P e^{x+y}dxdy, \quad P = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\},$

e) $\displaystyle\iint_P \frac{dxdy}{(x + y)^2}, \quad P = \{(x, y) : 3 \leqslant x \leqslant 4,\ 1 \leqslant y \leqslant 2\},$

f) $\displaystyle\iint_P \frac{x^2}{1 + y^2}dxdy, \quad P = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}.$

IV.11. Obliczyć całkę $\displaystyle\iint_S (x + 2y)dxdy$, gdzie

a) S jest prostokątem $P = \{(x, y) : 0 < x < 1,\ 0 < y < 2\}$,

b) S jest prostokątem $P = \{(x, y) : -1 < x < 1,\ 1 < y < 2\}$,

c) S jest trójkątem $\triangle = \{(x, y) : 0 < x < 2,\ 0 < y < 2 - x\}$,

d) S jest obszarem $S = \{(x,y) : -4 < x < 4,\ 0 < y < 2 - \frac{1}{8}x^2\}$,

e) S jest wycinkiem koła $O = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1,\ x < y < \sqrt{3}x\}$.

IV.12. Obliczyć całkę $\displaystyle\iint_S x^2 y dxdy$, gdzie

a) S jest prostokątem $P = \{(x,y) : 0 < x < 1,\ 0 < y < 2\}$,

b) S jest prostokątem $P = \{(x,y) : -1 < x < 1,\ 1 < y < 2\}$,

c) S jest trójkątem $\triangle = \{(x,y) : 0 < x < 2,\ 0 < y < 2 - x\}$,

d) S jest obszarem $S = \{(x,y) : -4 < x < 4,\ 0 < y < 2 - \frac{1}{8}x^2\}$,

e) S jest wycinkiem koła $O = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1,\ x < y < \sqrt{3}x\}$.

IV.13. Całki podwójne przekształcić na całki w zmiennych biegunowych

a) $\displaystyle\int_0^1 \Big[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy\Big]dx$,

b) $\displaystyle\int_0^R \Big[\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x^2+y^2)dy\Big]dx$,

c) $\displaystyle\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dS, \quad D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant Rx\}$.

IV.14. Obliczyć całkę $\displaystyle\iint_S \ln(x^2+y^2)dxdy$, gdzie S jest pierścieniem $O = \{(x,y) : R_1^2 < x^2 + y^2 < R_2^2\}$.

IV.15. Obliczyć całkę $\displaystyle\iint_S e^{-x^2-y^2}dxdy$, gdzie S jest kołem $K = \{(x,y) : x^2 + y^2 < R^2\}$. Jaki będzie wynik, przy $R \to \infty$?

IV.16. Obliczyć całki podwójne po podanym obszarze

a) $\displaystyle\iint_D x^3y^2dxdy, \quad D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$,

b) $\displaystyle\iint_D (x^2 + y)dxdy, \quad D = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ \sqrt{x} \leqslant y \leqslant x^2\}$,

c) $\displaystyle\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}dxdy, \quad D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$,

d) $\displaystyle\iint_D \cos(x+y)dxdy, \quad D = \{(x,y) : 0 \leqslant y \leqslant \pi,\ y \leqslant x\}$.

IV.17. Obliczyć potrójne całki iterowane

a) $\displaystyle\int_0^1 \Big[\int_0^2 \Big[\int_0^3 xy^2z^3dz\Big]dy\Big]dx$,

b) $\displaystyle\int_0^a \Big[\int_0^b \Big[\int_0^c (x+y+z)dz\Big]dy\Big]dx$,

c) $\displaystyle\int_0^a \Big[\int_0^x \Big[\int_0^y xyz\, dz\Big]dy\Big]dx$,

d) $\displaystyle\int_0^1 \Big[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \Big[\int_0^a dz\Big]dy\Big]dx$ używając zmiennych walcowych,

e) $\int\limits_{-R}^{R}\Big[\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\Big[\int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}(x^2+y^2)dz\Big]dy\Big]dx$ używając zmiennych kulistych.

IV.18. Obliczyć całkę
$$\iiint_\Omega \frac{dxdydz}{(x+1)(y+1)(z+1)},$$
gdzie Ω jest prostopadłościanem $P = \{(x,y,z)\,:\,0<x<1,\,0<y<2\,,0<z<3\}$.

IV.19. Obliczyć całkę
$$\iiint_\Omega (x+y)z\,dxdydz\,,$$
gdzie Ω jest fragmentem kuli $K = \{(x,y,z)\,:\,x^2+y^2+z^2<1\,,x>0,\,y>0\,,z>0\}$.

IV.20. Obliczyć całkę krzywoliniową $\displaystyle\int_\gamma \frac{dl}{x-y}$, gdzie γ jest odcinkiem prostej $y=\frac{1}{2}x-2$ zawartym pomiędzy punktami $A=(0,-2)$ i $B=(4,0)$.

IV.21. Obliczyć całkę krzywoliniową $\displaystyle\int_\gamma xy\,dl$, gdzie γ jest

a) obwodem prostokąta utworzonego przez proste $x=0$, $y=0$, $x=4$, $y=4$,

b) łukiem elipsy $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ leżącym w I ćwiartce,

c) obwodem prostokąta $P=\{(x,y)\,:\,|x|+|y|=a,\,a>0\}$.

IV.22. Obliczyć całkę krzywoliniową $\displaystyle\int_\gamma (x^2+y^2)\,dl$, gdzie γ jest odcinkiem łączącym punkty $A=(a,a)$ oraz $B=(b,b)$.

IV.23. Obliczyć całkę krzywoliniową $\displaystyle\int_\gamma y\,dl$, gdzie γ jest łukiem paraboli $y^2=2px$ rozpoczynającym się w jej wierzchołku $W=(0,0)$ i kończącym w dowolnym punkcie na paraboli $K=(x_0,y_0)$.

IV.24. Obliczyć całkę krzywoliniową $\displaystyle\int_\gamma (x^2+y^2)^n\,dl$, gdzie γ jest okręgiem $\gamma(t)=[R\cos t, R\sin t]$, $t\in[0,2\pi]$.

IV.25. Obliczyć długość linii łańcuchowej $y=a\cosh\left(\dfrac{x}{a}\right)$ pomiędzy $x=0$ oraz $x=a$.

IV.26. Obliczyć długość łuku paraboli $y^2=2px$ rozpoczynającym się w jej wierzchołku $W=(0,0)$ i kończącym w dowolnym punkcie na paraboli $K=(x_0,y_0)$.
Wskazówka: Całkując po y wykorzystać wzór
$$\int \sqrt{y^2+p^2}dy = \frac{1}{2}\Big(y\sqrt{y^2+p^2}+p^2\ln(y+\sqrt{y^2+p^2})\Big)\,.$$

IV.27. Obliczyć całkę $\displaystyle\iint_S (z+2x+4y/3)dS$, gdzie S jest częścią płaszczyzny $x/2+y/3+z/4=1$ znajdującą się w I oktancie układu współrzędnych ($x>0$, $y>0$, $z>0$). Naszkicować obszar całkowania!

IV.28. Obliczyć całkę $\displaystyle\iint_S xyz\,dS$, gdzie S jest częścią płaszczyzny $x+y+z=1$ znajdującą się w I oktancie układu współrzędnych ($x>0$, $y>0$, $z>0$). Naszkicować obszar całkowania!

IV.29. Używając zmiennych sferycznych obliczyć całkę $\displaystyle\iint_K x\,dS$, gdzie K jest częścią powierzchni kuli $x^2+y^2+z^2=R^2$ znajdującą się w I oktancie układu współrzędnych.

IV.30. Używając zmiennych sferycznych obliczyć całkę $\displaystyle\iint_K y\,dS$, gdzie K jest górną półsferą $x^2+y^2+z^2=R^2$.

IV.31. Używając zmiennych cylindrycznych obliczyć całkę $\iint_C \frac{dS}{r^2}$, gdzie C jest powierzchnią boczną walca $x^2 + y^2 = R^2$ ograniczoną płaszczyznami $z = 0$ oraz $z = H$, a r jest odległością punktu powierzchni walca od początku układu współrzędnych.

IV.32. Używając zmiennych sferycznych obliczyć całkę $\iint_S \frac{dS}{r^n}$, gdzie S jest sferą $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, a r jest odległością punktu sfery od ustalonego punktu na zewnątrz niej i odległego od jej środka o $a > R$.

IV.33. Krążeniem pola wektorowego $\vec{F}(x, y)$ wzdłuż płaskiej krzywej γ (leżącej w płaszczyźnie XY) zorientowanej jednostkowym wektorem stycznym $\vec{t}(x, y)$ nazywamy całkę

$$\int_\gamma \vec{F}(x,y) \cdot \vec{t}(x,y)\, dl = \int_\gamma F_x(x,y)dx + F_y(x,y)dy\,.$$

a) Obliczyć krążenie pola $\vec{F} = [y, -x]$ wzdłuż dodatniego kierunku elipsy $\gamma(t) = [a\cos t, b\sin t]$, $t \in [0, 2\pi]$.

b) Do obliczenia krążenia wykorzystać Tw. Greena.

IV.34. Stosując wzór Greena przekształcić całkę krzywoliniową na całkę powierzchniową po obszarze ograniczonym przez L.

a) $\oint_L (1 - x^2)ydx + x(1 + y^2)dy$

b) $\oint_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$

IV.35. Obliczyć całkę krzywoliniową $\int_\gamma 2xydx + x^2dy$, gdzie γ jest

a) odcinkiem łączącym punkty $A = (0, 0)$ oraz $B(1, 1)$,

b) łukiem paraboli $y = x^2$ rozpoczynającym się w jej wierzchołku $W = (0, 0)$ i kończącym w $B = (1, 1)$,

c) łukiem dowolnej krzywej potęgowej $y = x^\alpha$, $\alpha > 0$, rozpoczynającym się w $A = (0, 0)$ i kończącym w $B = (1, 1)$. Czy wynik zależy od parametru α?

IV.36. Obliczyć całkę krzywoliniową $\int_\gamma (x - y^2)dx + 2xydy$, gdzie γ jest

a) odcinkiem łączącym punkty $A = (0, 0)$ oraz $B(1, 1)$,

b) łukiem paraboli $y = x^2$ rozpoczynającym się w jej wierzchołku $W = (0, 0)$ i kończącym w $B = (1, 1)$,

c) łukiem dowolnej krzywej potęgowej $y = x^\alpha$, $\alpha > 0$, rozpoczynającym się w $A = (0, 0)$ i kończącym w $B = (1, 1)$. Czy wynik zależy od parametru α?

IV.37. Obliczyć całkę krzywoliniową $\int_\gamma (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy$, gdzie γ jest parabolą $\gamma(t) = [t, \sqrt{t}]$, $t \in [1, 4]$.

IV.38. Obliczyć całkę krzywoliniową $\int_\gamma y^2dx + x^2dy$, gdzie γ jest półokręgiem $\gamma(t) = [R\cos t, R\sin t]$, $t \in [0, \pi]$.

IV.39. Obliczyć całkę krzywoliniową $\int_\gamma (x - y)dx + (x + y)dy$, gdzie γ jest połową elipsy $\gamma(t) = [a\cos t, b\sin t]$, $t \in [0, \pi]$.

IV.40. Obliczyć krążenie $\int_\gamma \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$ po okręgu o promieniu R i środku w początku układu.

IV.41. Obliczyć całkę $\int_\gamma -x\cos ydx + y\sin xdy$ po odcinku łączącym punkty $(0, 0)$ oraz $(\pi, 2\pi)$.

IV.42. Strumieniem pola wektorowego $\vec{F}(x,y,z)$ przez powierzchnię S zorientowaną wektorami normalnymi $\vec{n}(x,y,z)$ nazywamy całkę

$$\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{n}(x,y,z)dS = \iint_S F_x(x,y,z)dydz + F_y(x,y,z)dxdz + F_z(x,y,z)dxdy$$

a) Obliczyć strumień pola $\vec{r} = [x,y,z]$ przez dodatnio zorientowaną powierzchnię sześcianu ograniczonego płaszczyznami $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=2$, $y=2$, $z=2$.

b) Obliczyć ten strumień z wykorzystaniem tw. Gaussa–Ostrogradskiego.

IV.43.

a) Obliczyć strumień $\iint_S x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$ przez dodatnio zorientowaną powierzchnię sześcianu ograniczonego płaszczyznami $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=1$, $y=1$, $z=1$.

b) Obliczyć tę całkę z wykorzystaniem tw. Gaussa–Ostrogradskiego.

IV.44. Obliczyć całkę powierzchniową $\iint_S x^2y^2z\,dxdy$ po dodatniej stronie górnej półsfery $x^2+y^2+z^2=R^2$.