III. Całkowanie funkcji jednej zmiennej i równania różniczkowe

III.1. Obliczyć:

a) $\int 5dx$

b) $\int xdx$

c) $\int (x+1)dx$

d) $\int (x^2-3x+5)dx$

e) $\int (2x^3-5x^2+4x-1)dx$

f) $\int (x^4-x^3+\frac{1}{2}x^2-5x-5)dx$

g) $\int (\sin x+2\cos x)dx$

h) $\int (\cos x-3\sin x)dx$

i) $\int (2\cosh x+5\sinh x)dx$

j) $\int \left(\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}\right)dx$

k) $\int \frac{4}{x^2}dx$

l) $\int \frac{-3}{x^3}dx$

m) $\int (e^x+2e^{-x})dx$

n) $\int (5^{2x}-25^{2x})dx$

o) $\int x\sqrt{x}dx$

p) $\int \frac{x\sqrt{x}+2}{\sqrt[3]{x}}$

q) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx$

III.2. Obliczyć stosując metodę całkowania przez części:

a) $\int x\sin xdx$

b) $\int x^2\sin xdx$

c) $\int x\cos xdx$

d) $\int x^3\cos xdx$

e) $\int xe^{2x}dx$

f) $\int x^2e^{-x}dx$

g) $\int x\ln xdx$

h) $\int x^5\log_2 xdx$

i) $\int e^x\sin xdx$

j) $\int e^{-x}\cos xdx$

III.3. Obliczyć stosując metodę całkowania przez podstawienie:

a) $\int (3x-2)^7dx$

b) $\int \frac{dx}{7x+4}$

c) $\int \frac{1}{x-1}dx$

d) $\int \frac{dx}{(2x-5)^5}$

e) $\int x(2x^2-7)^7dx$

f) $\int e^{4x}dx$

g) $\int x\,e^{-x^2}dx$

h) $\int \sin 2xdx$

i) $\int \cos 5xdx$

j) $\int \sin(3x+\pi/5)dx$

k) $\int \sin\left(\frac{1}{2}x\right)dx$

l) $\int \operatorname{tg} xdx$

m) $\int x\sqrt{x^2+a^2}dx$

n) $\int \frac{x^2}{\sqrt{5x^3+3}}dx$

III.4. Obliczyć wykorzystując podane podstawienie:

a) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}, \quad t^2=x+1,$

b) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}, \quad x=u^6,$

c) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx, \quad t=\sqrt{x},$

d) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad x=\frac{1}{z},$

e) $\int \sqrt{a^2-x^2}dx, \quad x=a\sin t,$

f) $\int \sqrt{x^2-a^2}dx, \quad x=a\cosh t,$

g) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx, \quad t=x+\sqrt{x^2+a^2},$

h) $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx, \quad x=a\cosh t.$

III.5. Pokazać, że dla $n, m = 0, 1, 2, \dots$ Obliczyć otrzymane całki z wielomianów w zmiennej t dla $n, m = 0, 1, 2$.

a) $\displaystyle\int (\cos x)^{2n+1} dx = \int (1-t^2)^n dt,$ gdzie $t = \sin x$,

b) $\displaystyle\int (\sin x)^{2n+1} dx = -\int (1-t^2)^n dt,$ gdzie $t = \cos x$,

c) $\displaystyle\int (\sin x)^{2n+1} (\cos x)^m dx = -\int (1-t^2)^n t^m dt,$ gdzie $t = \cos x$.

d) $\displaystyle\int (\cos x)^{2n+1} (\sin x)^m dx = \int (1-t^2)^n t^m dt,$ gdzie $t = \sin x$.

III.6. Obliczyć całki z ilorazów wielomianów

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+9} dx$

b) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1} dx$

c) $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2-3} dx$

d) $\displaystyle\int \frac{7}{8x-12} dx$

e) $\displaystyle\int \frac{3x-1}{x^2-x+1} dx$

f) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4} dx$

g) $\displaystyle\int \frac{x^2+4}{x^2-4} dx$

h) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+16} dx$

i) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2} dx$

j) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-a^2} dx$

k) $\displaystyle\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6} dx$

l) $\displaystyle\int \frac{dx}{5-12x-9x^2}$

m) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2-5x+7}$

n) $\displaystyle\int \frac{13dx}{3x^2-15x-42}$

o) $\displaystyle\int \frac{(3x+\frac{21}{4})}{2x^2+7x+1} dx$

p) $\displaystyle\int \frac{12x^3-5}{3x^4-5x-7} dx$

III.7. Obliczyć

a) $\displaystyle\int \sin^2 x dx$

b) $\displaystyle\int \cos^2 x dx$

c) $\displaystyle\int (\sin x)^3 dx$

d) $\displaystyle\int (\cos 2x)^3 dx$

e) $\displaystyle\int \sin 2x \cos 4x dx$

f) $\displaystyle\int \sin(\omega t)\sin(\omega t+\varphi) dx$

III.8. Obliczyć całki oznaczone:

a) $\displaystyle\int_1^3 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2}\right) dx$

b) $\displaystyle\int_2^8 \frac{dx}{x}$

c) $\displaystyle\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt{2x}}$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi/6} (\cos 2x - \sin 3x) dx$

e) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx$

f) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3 x dx$

g) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2+x+1} dx$

h) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} dx$

i) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$

III.9. Obliczyć pole figury ograniczonej łukiem krzywej

a) $y = -x^2 + 16$ oraz prostą OX, $x = 0$ i $x = 4$,

b) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$, prostą $x - 2y - 2 = 0$ oraz prostymi

c) $y = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} - 2$ oraz osią OX,

d) $y=(x+2)^3$ oraz osią OX i OY,

e) $y=x^2$ oraz $x=y^2$,

f) $y^2=8x$ oraz prostą $x=2$,

g) $y=-x\log x$ oraz osią OX,

h) $y=(1+4x^2)^{-1}$ oraz osią OX.

III.10. Obliczyć pole

a) obszaru zawarte pomiędzy krzywymi $y=\ln x$, $y=x-1$ oraz $y=1$,

b) obszaru ograniczonego liniami $y=\sin x$ oraz $y=\cos x$ dla $x\in[0,\pi/2]$,

c) obszaru zawartego pomiędzy parabolami $3x^2=25y$ oraz $5y^2=9x$,

d) obszaru ograniczonego liniami $y=2^x$, $y=4^x$, $x=1$.

e) obszaru ograniczonego liniami $y=e^x$, $y=e^{2x}$, $x=2$.

III.11. Obliczyć całki niewłaściwe

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$

b) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}dx$

c) $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-x/2}dx$

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2}$

e) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+x}$

f) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin(nx)dx$

g) $\displaystyle\int_0^\infty x^ne^{-x}dx$

h) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1-\cos x}$

i) $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a-x}}$

j) $\displaystyle\int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

k) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^2-1}$

l) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+4x+9}$

m) $\displaystyle\int_0^1 \log_a x dx$

III.12. Rozwiązać równania różniczkowe o rozdzielających się zmiennych

a) $y^2+x^2\dfrac{dy}{dx}=0$

b) $(x+1)\dfrac{dy}{dx}=x^3-1$

c) $\sin x\sin y\dfrac{dy}{dx}=\cos x\cos y$

d) $e^y(1+x^2)\dfrac{dy}{dx}=2x(1+e^y)$

e) $xy=(x+a)(y+b)y'$

f) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+y^2}{1+x^2}$

g) $t^2\dfrac{dx}{dt}+x-a=0$

h) $2x^2\dfrac{dy}{dx}=y$

i) $\dfrac{dy}{dx}=xy+ax+by+ab$

j) $\dfrac{dy}{dx}\sin x=y\ln y$

k) $t\dfrac{dx}{dt}=\operatorname{tg}x$

III.13. Rozwiązać równania jednorodne

a) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}$

b) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$

c) $(2x^2+xy)y'=xy+y^2$

d) $x^2\dfrac{dy}{dx}+2x\sqrt{xy}=y$

e) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}\Big(1+\ln\dfrac{y}{x}\Big)$

III.14. Rozwiązać równania różniczkowe liniowe

a) $y' + 4y = 5\sin 3x$

b) $xy' - 3y = x^2$

c) $(2x+1)y' + y = x$

d) $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = xe^{-x^2}$

e) $\dfrac{dy}{dx} + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin(2x)$

f) $(1+x^2)\dfrac{dy}{dx} + y = \operatorname{arctg} x$

g) $(x+1)\dfrac{dy}{dx} - 2y = (x+1)^4$

h) $\cos xy' - y\sin x = \sin 2x$

i) $xy' + y = \ln x + 1$

III.15. Rozwiązać równania różniczkowe liniowe 2-rzędu o stałych współczynnikach

a) $y'' - 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = 10,$

b) $y'' + 6y' + 13y = 0,$

c) $y'' + 2y' + 5y = -\dfrac{17}{2}\cos 2x,$

d) $y'' + 4y' - 5y = 1,$

e) $y'' - 2y' + 2y = 2x,$

III.16. Rozwiązać równanie różniczkowe $y'' - 3y' + 2y = f(x)$, jeżeli

a) $f(x) = 10e^{-x},$

b) $f(x) = 3e^{2x},$

c) $f(x) = 2\sin x,$

d) $f(x) = 2e^{x} - e^{-2x},$

e) $f(x) = 2x^3 - 30,$

f) $f(x) = \sinh x.$