Transformaty sygnałów dyskretnych

Jacek Jurkowski

Instytut Fizyki

2017

- Def. Sygnałem dyskretnym nazywamy dowolną funkcję $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.

- Def. Sygnałem dyskretnym nazywamy dowolną funkcję $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.
- Def. Sygnał dyskretny f nazywamy *bezwzględnie sumowalnym*, jeśli

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f[k]| < \infty\,.$$

Zbiór sygnałów bezwzględnie sumowalnych oznaczać będziemy $\ell^1(\mathbb{Z})$.

Sygnały dyskretne

- Def. Sygnałem dyskretnym nazywamy dowolną funkcję $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.
- Def. Sygnał dyskretny f nazywamy *bezwzględnie sumowalnym*, jeśli

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f[k]| < \infty \, .$$

  Zbiór sygnałów bezwzględnie sumowalnych oznaczać będziemy $\ell^1(\mathbb{Z})$.
- Def. Sygnał dyskretny f nazywamy *sumowalnym z kwadratem*, jeśli

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f[k]|^2 < \infty \, .$$

  Zbiór sygnałów sumowalnych z kwadratem oznaczać będziemy $\ell^2(\mathbb{Z})$.

- Def. Sygnałem dyskretnym nazywamy dowolną funkcję $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.
- Def. Sygnał dyskretny f nazywamy *bezwzględnie sumowalnym*, jeśli

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f[k]| < \infty \,.$$

  Zbiór sygnałów bezwzględnie sumowalnych oznaczać będziemy $\ell^1(\mathbb{Z})$.
- Def. Sygnał dyskretny f nazywamy *sumowalnym z kwadratem*, jeśli

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f[k]|^2 < \infty \,.$$

  Zbiór sygnałów sumowalnych z kwadratem oznaczać będziemy $\ell^2(\mathbb{Z})$.
- Jeśli $f, g \in \ell^2(\mathbb{Z})$, to wielkość

$$\langle f|g\rangle := \sum_{k=-\infty}^{\infty} f^*[k]g[k]$$

  jest skończona i określa *iloczyn skalarny* sygnałów dyskretnych.

- Jeśli sygnał $f \in \ell^1(\mathbb{Z})$ i g jest ograniczony, to wielkość

$$(f * g)[n] := \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k]$$

jest skończona i określa *splot* sygnałów dyskretnych.

- Jeśli sygnał $f \in \ell^1(\mathbb{Z})$ i g jest ograniczony, to wielkość
$$(f * g)[n] := \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k]$$
jest skończona i określa *splot* sygnałów dyskretnych.
- Def. Sygnał $f[n]$ nazywamy *przyczynowym*, jeśli $f[n] = 0$ dla $n < 0$. (ogólniej: jeśli istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$, takie że $f[n] = 0$, dla $n \leqslant -n_0$)

- Jeśli sygnał $f \in \ell^1(\mathbb{Z})$ i g jest ograniczony, to wielkość

$$(f * g)[n] := \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k]$$

jest skończona i określa *splot* sygnałów dyskretnych.

- Def. Sygnał $f[n]$ nazywamy *przyczynowym*, jeśli $f[n] = 0$ dla $n < 0$. (ogólniej: jeśli istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$, takie że $f[n] = 0$, dla $n \leqslant -n_0$)
- Def. Sygnał $f[n]$ nazywamy *stabilnym*, jeśli jest *bezwzględnie sumowalny*, tzn.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f[k]| < \infty$$

- Jeśli sygnał $f \in \ell^1(\mathbb{Z})$ i g jest ograniczony, to wielkość
$$(f * g)[n] := \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k]$$
jest skończona i określa *splot* sygnałów dyskretnych.
- Def. Sygnał $f[n]$ nazywamy *przyczynowym*, jeśli $f[n] = 0$ dla $n < 0$. (ogólniej: jeśli istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$, takie że $f[n] = 0$, dla $n \leqslant -n_0$)
- Def. Sygnał $f[n]$ nazywamy *stabilnym*, jeśli jest *bezwzględnie sumowalny*, tzn.
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f[k]| < \infty$$
- Sygnał $\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$ nazywamy *impulsem.*
- Sygnał $H[n] = \begin{cases} 1 & n \geqslant 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$ nazywamy sygnałem schodkowym (unit-step).

- Def. Sygnał dyskretny f nazywamy N okresowym, jeśli

$$f[n+N] = f[n]$$

- Def. Sygnał dyskretny f nazywamy N okresowym, jeśli

$$f[n+N] = f[n]$$

- Def. N okresowym impulsem nazywamy sygnał

$$\delta_N[n] = \begin{cases} 1 & \text{dla } n \text{ będącego wielokrotnością } N \\ 0 & \text{dla } n \text{ nie będącego wielokrotnością } N \end{cases}$$

- Def. Sygnał dyskretny f nazywamy N okresowym, jeśli

$$f[n+N] = f[n]$$

- Def. N okresowym impulsem nazywamy sygnał

$$\delta_N[n] = \begin{cases} 1 & \text{dla } n \text{ będącego wielokrotnością } N \\ 0 & \text{dla } n \text{ nie będącego wielokrotnością } N \end{cases}$$

- Def. Niech f będzie sygnałem dyskretnym o okresie N. Dyskretną transformatą Fouriera (DFT) nazywamy sygnał

$$\hat{f}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \exp\left[-2\pi i n \frac{k}{N}\right]$$

- Wynik sumowania nie zależy od jego granic, a tylko od ilości składników!

Przykład: Znaleźć DFT dla sygnału f o okresie $N = 5$ danego jako $f[-2] = -1$, $f[-1] = -2$, $f[0] = 0$, $f[1] = 2$, $f[2] = 1$ lub inaczej

$$f[n] = -\delta_5[n+2] - 2\delta_5[n+1] + 2\delta_5[n-1] + \delta_5[n-2]$$

Przykłady DFT

Przykład: Znaleźć DFT dla sygnału f o okresie $N = 5$ danego jako $f[-2] = -1$, $f[-1] = -2$, $f[0] = 0$, $f[1] = 2$, $f[2] = 1$ lub inaczej

$$f[n] = -\delta_5[n+2] - 2\delta_5[n+1] + 2\delta_5[n-1] + \delta_5[n-2]$$

Przykład: Pokazać, że

$$\delta_N[n] \xrightarrow{DFT} 1$$

Przykłady DFT

Przykład: Znaleźć DFT dla sygnału f o okresie $N = 5$ danego jako $f[-2] = -1$, $f[-1] = -2$, $f[0] = 0$, $f[1] = 2$, $f[2] = 1$ lub inaczej

$$f[n] = -\delta_5[n+2] - 2\delta_5[n+1] + 2\delta_5[n-1] + \delta_5[n-2]$$

Przykład: Pokazać, że

$$\delta_N[n] \xrightarrow{DFT} 1$$

Przykład: Znaleźć DFT dla dowolnego sygnału o okresie $N = 2$ zadanego przez wartości $f[0]$ i $f[1]$.

Własności DFT

$$\boxed{f[n] \xrightarrow{DFT} \hat{f}[k]}$$

Własności DFT

$$\boxed{f[n] \xrightarrow{DFT} \hat{f}[k]}$$

1. DFT jest liniowa,

Własności DFT

$$\boxed{f[n] \xrightarrow{DFT} \hat{f}[k]}$$

1. DFT jest liniowa,
2. odwócenie w czasie: $f[-n] \xrightarrow{DFT} \hat{f}[-k]$,

Własności DFT

$$\boxed{f[n] \xrightarrow{DFT} \hat{f}[k]}$$

1. DFT jest liniowa,
2. odwócenie w czasie: $f[-n] \xrightarrow{DFT} \hat{f}[-k]$,
3. sprzężenie: $f^*[n] \xrightarrow{DFT} \hat{f}^*[-k]$,

Własności DFT

$$\boxed{f[n] \xrightarrow{DFT} \hat{f}[k]}$$

1. DFT jest liniowa,
2. odwócenie w czasie: $f[-n] \xrightarrow{DFT} \hat{f}[-k]$,
3. sprzężenie: $f^*[n] \xrightarrow{DFT} \hat{f}^*[-k]$,
4. przesunięcie sygnału: $f[n-\ell] \xrightarrow{DFT} \exp[-2\pi i \frac{k\ell}{N}]\hat{f}[k]$,

Własności DFT

$$\boxed{f[n] \xrightarrow{DFT} \hat{f}[k]}$$

1. DFT jest liniowa,
2. odwócenie w czasie: $f[-n] \xrightarrow{DFT} \hat{f}[-k]$,
3. sprzężenie: $f^*[n] \xrightarrow{DFT} \hat{f}^*[-k]$,
4. przesunięcie sygnału: $f[n-\ell] \xrightarrow{DFT} \exp[-2\pi i \frac{k\ell}{N}]\hat{f}[k]$,
5. przesunięcie transformaty: $\exp[2\pi i \frac{n\ell}{N}]f[n] \xrightarrow{DFT} \hat{f}[k-\ell]$,

Własności DFT

$$\boxed{f[n] \xrightarrow{DFT} \hat{f}[k]}$$

1. DFT jest liniowa,
2. odwócenie w czasie: $f[-n] \xrightarrow{DFT} \hat{f}[-k]$,
3. sprzężenie: $f^*[n] \xrightarrow{DFT} \hat{f}^*[-k]$,
4. przesunięcie sygnału: $f[n-\ell] \xrightarrow{DFT} \exp[-2\pi i \frac{k\ell}{N}]\hat{f}[k]$,
5. przesunięcie transformaty: $\exp[2\pi i \frac{n\ell}{N}]f[n] \xrightarrow{DFT} \hat{f}[k-\ell]$,
6. transformata dyskretnego splotu: $(f * g)[n] \xrightarrow{DFT} \hat{f}[k]\hat{g}[k]$,

Własności DFT

$$\boxed{f[n] \xrightarrow{DFT} \hat{f}[k]}$$

1. DFT jest liniowa,
2. odwócenie w czasie: $f[-n] \xrightarrow{DFT} \hat{f}[-k]$,
3. sprzężenie: $f^*[n] \xrightarrow{DFT} \hat{f}^*[-k]$,
4. przesunięcie sygnału: $f[n-\ell] \xrightarrow{DFT} \exp[-2\pi i \frac{k\ell}{N}]\hat{f}[k]$,
5. przesunięcie transformaty: $\exp[2\pi i \frac{n\ell}{N}]f[n] \xrightarrow{DFT} \hat{f}[k-\ell]$,
6. transformata dyskretnego splotu: $(f * g)[n] \xrightarrow{DFT} \hat{f}[k]\hat{g}[k]$,
7. transformata iloczynu: $f[n]g[n] \xrightarrow{DFT} \frac{1}{N}(\hat{f} * \hat{g})[k]$.

$$\boxed{f[n] \xrightarrow{DFT} \hat{f}[k]}$$

1. DFT jest liniowa,
2. odwócenie w czasie: $f[-n] \xrightarrow{DFT} \hat{f}[-k]$,
3. sprzężenie: $f^*[n] \xrightarrow{DFT} \hat{f}^*[-k]$,
4. przesunięcie sygnału: $f[n-\ell] \xrightarrow{DFT} \exp[-2\pi i \frac{k\ell}{N}]\hat{f}[k]$,
5. przesunięcie transformaty: $\exp[2\pi i \frac{n\ell}{N}]f[n] \xrightarrow{DFT} \hat{f}[k-\ell]$,
6. transformata dyskretnego splotu: $(f * g)[n] \xrightarrow{DFT} \hat{f}[k]\hat{g}[k]$,
7. transformata iloczynu: $f[n]g[n] \xrightarrow{DFT} \frac{1}{N}(\hat{f} * \hat{g})[k]$.

Twierdzenie o odwrotnej tranformacie DFT

$$f[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\hat{f}[k]\exp\left[2\pi i n\frac{k}{N}\right]$$

Twierdzenie Parsevala

$$\sum_{n=0}^{N-1} f[n]g^*[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}[k]\hat{g}^*[k]$$

Twierdzenie Parsevala

$$\sum_{n=0}^{N-1} f[n]g^*[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}[k]\hat{g}^*[k]$$

Def. Mocą sygnału periodycznego o okresie N nazywamy

$$P = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |f[n]|^2$$

Własności DFT

Twierdzenie Parsevala

$$\sum_{n=0}^{N-1} f[n]g^*[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}[k]\hat{g}^*[k]$$

Def. Mocą sygnału periodycznego o okresie N nazywamy

$$P = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |f[n]|^2$$

Twierdzenie o mocy

$$P = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |f[n]|^2 = \frac{1}{N^2}\sum_{k=0}^{N-1} |\hat{f}[k]|^2$$

Przykłady

Przykład: Znaleźć DFT dla przesuniętego imulsu $\delta_N[n-\ell]$.

Przykład: Znaleźć DFT dla przesuniętego imulsu $\delta_N[n-\ell]$.

Przykład: Obliczyć transformatę dla dyskretnego periodycznego sygnału prostokątnego

$$f[n] = \sum_{\ell=-m}^{m} \delta_N[n-\ell]\,, \qquad 2m < N$$

Przykład: Znaleźć DFT dla przesuniętego imulsu $\delta_N[n-\ell]$.

Przykład: Obliczyć transformatę dla dyskretnego periodycznego sygnału prostokątnego

$$f[n] = \sum_{\ell=-m}^{m} \delta_N[n-\ell]\,, \qquad 2m < N$$

Przykład: Korzystając z własności DFT znaleźć transformatę sygnału

$$f[n] = \sin\left(2\pi \frac{n}{N}\right)$$

Dalsze własności DFT. Postać macierzowa

- Niech $w = e^{-2\pi i/N}$, wtedy $w^N = 1$, $w^{kn} = w^{kn \pmod N}$

Dalsze własności DFT. Postać macierzowa

- Niech $w = e^{-2\pi i/N}$, wtedy $w^N = 1$, $w^{kn} = w^{kn \pmod N}$
- Sygnał $\boldsymbol{f} = (f[0], f[1], \ldots, f[N-1])^T$

Dalsze własności DFT. Postać macierzowa

- Niech $w = e^{-2\pi i/N}$, wtedy $w^N = 1$, $w^{kn} = w^{kn \,(\mathrm{mod}\, N)}$
- Sygnał $\boldsymbol{f} = (f[0], f[1], \ldots, f[N-1])^T$
- Transformata DFT sygnału $\hat{\boldsymbol{f}} = (\hat{f}[0], \hat{f}[1], \ldots, \hat{f}[N-1])^T$

Dalsze własności DFT. Postać macierzowa

- Niech $w = e^{-2\pi i/N}$, wtedy $w^N = 1$, $w^{kn} = w^{kn \pmod N}$
- Sygnał $\boldsymbol{f} = (f[0], f[1], \ldots, f[N-1])^T$
- Transformata DFT sygnału $\hat{\boldsymbol{f}} = (\hat{f}[0], \hat{f}[1], \ldots, \hat{f}[N-1])^T$
- Wprowadźmy symetryczną macierz

$$(\boldsymbol{W})_{kn} = w^{kn}$$

wtedy DFT można zapisać jako mnożenie macierzy

$$\hat{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{f}$$

Dalsze własności DFT. Postać macierzowa

- Niech $w = e^{-2\pi i/N}$, wtedy $w^N = 1$, $w^{kn} = w^{kn \, (\mathrm{mod}\, N)}$
- Sygnał $\boldsymbol{f} = (f[0], f[1], \ldots, f[N-1])^T$
- Transformata DFT sygnału $\hat{\boldsymbol{f}} = (\hat{f}[0], \hat{f}[1], \ldots, \hat{f}[N-1])^T$
- Wprowadźmy symetryczną macierz

$$(\boldsymbol{W})_{kn} = w^{kn}$$

wtedy DFT można zapisać jako mnożenie macierzy

$$\hat{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{f}$$

- Postać $\boldsymbol{W}$

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \cdots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \cdots & w^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & \cdots & w^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

Przykład: Zapisać i uprościć macierz $\boldsymbol{W}$ dla $N = 4$.
Mamy $w^0 = w^4 = 1$, $w^6 = w^2$, $w^9 = w$. Zatem

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 & w^3 \\ 1 & w^2 & 1 & w^2 \\ 1 & w^3 & w^2 & w \end{bmatrix}$$

Przykład: Zapisać i uprościć macierz $\boldsymbol{W}$ dla $N = 4$.
Mamy $w^0 = w^4 = 1$, $w^6 = w^2$, $w^9 = w$. Zatem

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 & w^3 \\ 1 & w^2 & 1 & w^2 \\ 1 & w^3 & w^2 & w \end{bmatrix}$$

- Możliwa jest faktoryzacja macierzy $\boldsymbol{W}$ zmniejszająca liczbę wykonywanych operacji podczas obliczeń (Cooley-Tukey FFT algorithm)

Przykład: Zapisać i uprościć macierz $\boldsymbol{W}$ dla $N = 4$.
Mamy $w^0 = w^4 = 1$, $w^6 = w^2$, $w^9 = w$. Zatem

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 & w^3 \\ 1 & w^2 & 1 & w^2 \\ 1 & w^3 & w^2 & w \end{bmatrix}$$

- Możliwa jest faktoryzacja macierzy $\boldsymbol{W}$ zmniejszająca liczbę wykonywanych operacji podczas obliczeń (Cooley-Tukey FFT algorithm)
- DFT z definicji wymaga $N(2N-1) \sim N^2$ operacji
- FFT wymaga $N \log_2 N$ operacji

Dalsze własności DFT

Dalsze własności DFT

Twierdzenie

Niech $p \in \mathbb{N}$ oraz $N = 2^p$. Wprowadźmy dwa indeksy $k_1 = 0, 1$ oraz $k_0 = 0, 1, \ldots, N/2 - 1$ i niech indeks transformaty k

$$k = \frac{N}{2} k_1 + k_0 \,.$$

Wówczas DFT sygnału $\boldsymbol{f} = (f[0], f[1], \ldots, f[N])^T$ wyraża się przez transformaty DFT części parzystej i nieparzystej tego sygnału, tzn.

$$\hat{f}[k_0] = \hat{f}_1[k_0] + \omega^{k_0} \hat{f}_2[k_0] \,, \quad \hat{f}[N/2 + k_0] = \hat{f}_1[k_0] - \omega^{k_0} \hat{f}_2[k_0] \,,$$

gdzie $\hat{f}_1$ jest transformatą części parzystej sygnału $(f[0], f[2], \ldots, f[N-2])$ oraz $\hat{f}_2$ jest transformatą części nieparzystej sygnału $(f[1], f[3], \ldots, f[N-1])$.

Twierdzenie

Niech $p \in \mathbb{N}$ oraz $N = 2^p$. Wprowadźmy dwa indeksy $k_1 = 0, 1$ oraz $k_0 = 0, 1, \ldots, N/2 - 1$ i niech indeks transformaty k

$$k = \frac{N}{2} k_1 + k_0 \,.$$

Wówczas DFT sygnału $\boldsymbol{f} = (f[0], f[1], \ldots, f[N])^T$ wyraża się przez transformaty DFT części parzystej i nieparzystej tego sygnału, tzn.

$$\hat{f}[k_0] = \hat{f}_1[k_0] + \omega^{k_0} \hat{f}_2[k_0] \,, \quad \hat{f}[N/2 + k_0] = \hat{f}_1[k_0] - \omega^{k_0} \hat{f}_2[k_0] \,,$$

gdzie $\hat{f}_1$ jest transformatą części parzystej sygnału $(f[0], f[2], \ldots, f[N-2])$ oraz $\hat{f}_2$ jest transformatą części nieparzystej sygnału $(f[1], f[3], \ldots, f[N-1])$.

- Twierdzenie to pozwala redukować liczbę obliczeń potrzebną do wyznaczenia DFT.

Twierdzenie

Niech $p \in \mathbb{N}$ oraz $N = 2^p$. Wprowadźmy dwa indeksy $k_1 = 0, 1$ oraz $k_0 = 0, 1, \ldots, N/2 - 1$ i niech indeks transformaty k

$$k = \frac{N}{2} k_1 + k_0 \,.$$

Wówczas DFT sygnału $\boldsymbol{f} = (f[0], f[1], \ldots, f[N])^T$ wyraża się przez transformaty DFT części parzystej i nieparzystej tego sygnału, tzn.

$$\hat{f}[k_0] = \hat{f}_1[k_0] + \omega^{k_0} \hat{f}_2[k_0] \,, \quad \hat{f}[N/2 + k_0] = \hat{f}_1[k_0] - \omega^{k_0} \hat{f}_2[k_0] \,,$$

gdzie $\hat{f}_1$ jest transformatą części parzystej sygnału $(f[0], f[2], \ldots, f[N-2])$ oraz $\hat{f}_2$ jest transformatą części nieparzystej sygnału $(f[1], f[3], \ldots, f[N-1])$.

- Twierdzenie to pozwala redukować liczbę obliczeń potrzebną do wyznaczenia DFT.
- Procedurę redukcji można stosować ponownie do skróconych sygnałów (odmiana FFT)

- Def. Transformatą Z dyskretnego sygnału $f[n]$ nazywamy funkcję

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] z^{-n}, \qquad z \in \mathbb{C}$$

określoną w obszarze absolutnej zbieżności powyższego szeregu Laurenta.

- Def. Transformatą Z dyskretnego sygnału $f[n]$ nazywamy funkcję

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] z^{-n}, \qquad z \in \mathbb{C}$$

określoną w obszarze absolutnej zbieżności powyższego szeregu Laurenta.

- Mamy

$$F(z) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} f[-n] z^{n}}_{(1)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} f[n] z^{-n}}_{(2)}$$

- Def. Transformatą Z dyskretnego sygnału $f[n]$ nazywamy funkcję

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] z^{-n}, \qquad z \in \mathbb{C}$$

określoną w obszarze absolutnej zbieżności powyższego szeregu Laurenta.

- Mamy

$$F(z) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} f[-n] z^{n}}_{(1)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} f[n] z^{-n}}_{(2)}$$

(1) jest zbieżny w kole $|z| < R_1$

(2) jest zbieżny na zewnątrz koła $|z| > R_2$.

- Jeśli $R_2 < R_1$, to transformata Z jest zbieżna na pierścieniu $R_2 < |z| < R_1$. R_1 oraz R_2 są wyznaczone przez własności sygnału $f[n]$.

Przykład: Pokazać, że transformata Z sygnału

$$f[n] = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \geqslant 0 \\ 2^n & n < 0 \end{cases}$$

jest zbieżna na pierścieniu $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

Przykład: Pokazać, że transformata Z sygnału

$$f[n] = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \geqslant 0 \\ 2^n & n < 0 \end{cases}$$

jest zbieżna na pierścieniu $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

Przykład: Pokazać, że $\delta[n] \xrightarrow{Z} 1$.

Przykład: Pokazać, że transformata Z sygnału

$$f[n] = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \geqslant 0 \\ 2^n & n < 0 \end{cases}$$

jest zbieżna na pierścieniu $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

Przykład: Pokazać, że $\delta[n] \xrightarrow{Z} 1$.

Przykład: Pokazać, że dla $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$

$$a^n H[n] \xrightarrow{Z} \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a|$$

Przykład: Pokazać, że transformata Z sygnału

$$f[n] = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \geqslant 0 \\ 2^n & n < 0 \end{cases}$$

jest zbieżna na pierścieniu $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

Przykład: Pokazać, że $\delta[n] \xrightarrow{Z} 1$.

Przykład: Pokazać, że dla $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$

$$a^n H[n] \xrightarrow{Z} \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a|$$

Przykład: Pokazać, że dla $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$

$$a^n H[-n-1] \xrightarrow{Z} -\frac{z}{z-a}, \quad |z| < |a|$$

Przykład: Pokazać, że transformata Z sygnału

$$f[n] = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \geqslant 0 \\ 2^n & n < 0 \end{cases}$$

jest zbieżna na pierścieniu $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

Przykład: Pokazać, że $\delta[n] \xrightarrow{Z} 1$.

Przykład: Pokazać, że dla $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$

$$a^n H[n] \xrightarrow{Z} \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a|$$

Przykład: Pokazać, że dla $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$

$$a^n H[-n-1] \xrightarrow{Z} -\frac{z}{z-a}, \quad |z| < |a|$$

Jakie stąd wnioski?

Właściwości transformaty Z

Właściwości transformaty Z

$$\boxed{f[n] \xrightarrow{Z} F(z)}$$

Właściwości transformaty Z

$$\boxed{f[n] \xrightarrow{Z} F(z)}$$

1. liniowość: $\alpha f[n] + \beta g[n] \xrightarrow{Z} \alpha F(z) + \beta G(z)$

Właściwości transformaty Z

$$\boxed{f[n] \xrightarrow{Z} F(z)}$$

1. liniowość: $\alpha f[n] + \beta g[n] \xrightarrow{Z} \alpha F(z) + \beta G(z)$
2. $f[-n] \xrightarrow{Z} F(1/z)$

$$\boxed{f[n] \xrightarrow{Z} F(z)}$$

1. liniowość: $\alpha f[n] + \beta g[n] \xrightarrow{Z} \alpha F(z) + \beta G(z)$
2. $f[-n] \xrightarrow{Z} F(1/z)$
3. $f^*[n] \xrightarrow{Z} F^*(z^*)$

Właściwości transformaty Z

$$\boxed{f[n] \xrightarrow{Z} F(z)}$$

1. liniowość: $\alpha f[n] + \beta g[n] \xrightarrow{Z} \alpha F(z) + \beta G(z)$
2. $f[-n] \xrightarrow{Z} F(1/z)$
3. $f^*[n] \xrightarrow{Z} F^*(z^*)$
4. przesunięcie: $f[n-\ell] \xrightarrow{Z} z^{-\ell} F(z)$

Właściwości transformaty Z

$$\boxed{f[n] \xrightarrow{Z} F(z)}$$

1. liniowość: $\alpha f[n] + \beta g[n] \xrightarrow{Z} \alpha F(z) + \beta G(z)$
2. $f[-n] \xrightarrow{Z} F(1/z)$
3. $f^*[n] \xrightarrow{Z} F^*(z^*)$
4. przesunięcie: $f[n-\ell] \xrightarrow{Z} z^{-\ell} F(z)$
5. przeskalowanie transformaty: $a^n f[n] \xrightarrow{Z} F(z/a)$

Właściwości transformaty Z

$$\boxed{f[n] \xrightarrow{Z} F(z)}$$

1. liniowość: $\alpha f[n] + \beta g[n] \xrightarrow{Z} \alpha F(z) + \beta G(z)$
2. $f[-n] \xrightarrow{Z} F(1/z)$
3. $f^*[n] \xrightarrow{Z} F^*(z^*)$
4. przesunięcie: $f[n-\ell] \xrightarrow{Z} z^{-\ell} F(z)$
5. przeskalowanie transformaty: $a^n f[n] \xrightarrow{Z} F(z/a)$
6. różniczkowanie transformaty: $n f[n] \xrightarrow{Z} -zF'(z)$

Przykład: Pokazać, że

$$\delta[n-\ell] \xrightarrow{Z} z^{-\ell}, \qquad z \neq 0$$

$$nH[n-2] \xrightarrow{Z} \frac{2z-1}{z(z-1)^2}, \qquad |z| > 1$$

$$na^n H[n] \xrightarrow{Z} \frac{az}{(z-a)^2}, \qquad |z| > |a|$$

$$na^n H[-n-1] \xrightarrow{Z} -\frac{az}{(z-a)^2}, \qquad |z| < |a|$$

Przykład: Pokazać, że

$$\delta[n-\ell] \xrightarrow{Z} z^{-\ell}, \qquad z \neq 0$$

$$nH[n-2] \xrightarrow{Z} \frac{2z-1}{z(z-1)^2}, \qquad |z| > 1$$

$$na^n H[n] \xrightarrow{Z} \frac{az}{(z-a)^2}, \qquad |z| > |a|$$

$$na^n H[-n-1] \xrightarrow{Z} -\frac{az}{(z-a)^2}, \qquad |z| < |a|$$

Ostatnie dwa przykłady można uogólnić

$$\binom{n}{k} a^{n-k} H[n] \xrightarrow{Z} \frac{z}{(z-a)^{k+1}}, \qquad |z| > |a|$$

$$\binom{n}{k} a^{n-k} H[-n-1] \xrightarrow{Z} -\frac{z}{(z-a)^{k+1}}, \qquad |z| < |a|$$

Wyznaczanie sygnałów na podstawie transformaty Z

- Ograniczymy się do wymiernej transformaty Z

$$F(z) = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_0} = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

Wyznaczanie sygnałów na podstawie transformaty Z

- Ograniczymy się do wymiernej transformaty Z

$$F(z) = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_0} = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

- Jeśli $n > m$, to dzielimy wielomiany i pamiętamy że

$$z^k \xrightarrow{Z^{-1}} \delta[n+k]$$

Wyznaczanie sygnałów na podstawie transformaty Z

- Ograniczymy się do wymiernej transformaty Z

$$F(z) = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_0} = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

- Jeśli $n > m$, to dzielimy wielomiany i pamiętamy że

$$z^k \xrightarrow{Z^{-1}} \delta[n+k]$$

- Niech $m \geqslant n$. Sygnał nie jest wyznaczony jednoznacznie przez funkcyjną postać transformaty. Wiemy, że

$$F(z) = \frac{z}{z-1} \xrightarrow{Z^{-1}} \begin{cases} H[n] & |z| > 1 \\ -H[-n-1] & |z| < 1 \end{cases}$$

  O wyborze sygnału decydują dodatkowe jego własności (np. przyczynowość, stabilność).

Wyznaczanie sygnałów na podstawie transformaty Z

- Ograniczymy się do wymiernej transformaty Z

$$F(z) = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_0} = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

- Jeśli $n > m$, to dzielimy wielomiany i pamiętamy że

$$z^k \xrightarrow{Z^{-1}} \delta[n+k]$$

- Niech $m \geqslant n$. Sygnał nie jest wyznaczony jednoznacznie przez funkcyjną postać transformaty. Wiemy, że

$$F(z) = \frac{z}{z-1} \xrightarrow{Z^{-1}} \begin{cases} H[n] & |z| > 1 \\ -H[-n-1] & |z| < 1 \end{cases}$$

O wyborze sygnału decydują dodatkowe jego własności (np. przyczynowość, stabilność).

Przykład: Pokazać, że

$$\frac{1}{z-a} \xrightarrow{Z^{-1}} \begin{cases} \frac{1}{a}(a^n H[n] - \delta[n]) & |z| > |a| \\ -\frac{1}{a}(a^n H[-n-1] + \delta[n]) & |z| < |a| \end{cases}$$

Twierdzenie 1

1. Sygnał $f[n]$ jest stabilny wtedy i tylko wtedy gdy obszar zbieżności jego transformaty Z $F(z)$ zawiera jednostkowy okrąg $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

2. Transformata Z sygnału przyczynowego $f[n]$ jest określona na zewnątrz koła $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$, gdzie promień $R = \max\{|w| : w \text{ jest biegunem } F(z)\}$ oraz granica $\lim\limits_{|z| \to \infty} F(z)$ jest skończona.

Twierdzenie 1

1. Sygnał $f[n]$ jest stabilny wtedy i tylko wtedy gdy obszar zbieżności jego transformaty Z $F(z)$ zawiera jednostkowy okrąg $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

2. Transformata Z sygnału przyczynowego $f[n]$ jest określona na zewnątrz koła $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$, gdzie promień $R = \max\{|w| : w \text{ jest biegunem } F(z)\}$ oraz granica $\lim_{|z|\to\infty} F(z)$ jest skończona.

Przykład: Znaleźć sygnały odpowiadające transformacie Z

$$F(z) = \frac{2z}{(2z-1)(z-2)}$$

w różnych obszarach jej zbieżności. Wskazać wśród nich sygnał przyczynowy i stabilny!

- Def. Splotem sygnałów $f[n]$ i $g[n]$ nazywamy sygnał

$$(f * g)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k]$$

o ile powyższy szereg jest zbieżny.

Splot sygnałów dyskretnych

- Def. Splotem sygnałów $f[n]$ i $g[n]$ nazywamy sygnał

$$(f * g)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k]$$

  o ile powyższy szereg jest zbieżny.
- Splot jest symetryczny $f * g = g * f$.

Splot sygnałów dyskretnych

- Def. Splotem sygnałów $f[n]$ i $g[n]$ nazywamy sygnał
$$(f * g)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k]$$
o ile powyższy szereg jest zbieżny.
- Splot jest symetryczny $f * g = g * f$.
- Jeśli $f[n]$ i $g[n]$ są sygnałami przyczynowymi, to $f * g$ też jest przyczynowy oraz
$$(f * g)[n] = \left(\sum_{k=0}^{n} f[k]g[n-k] \right) H[n]$$

- Def. Splotem sygnałów $f[n]$ i $g[n]$ nazywamy sygnał

$$(f*g)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k]$$

  o ile powyższy szereg jest zbieżny.
- Splot jest symetryczny $f*g = g*f$.
- Jeśli $f[n]$ i $g[n]$ są sygnałami przyczynowymi, to $f*g$ też jest przyczynowy oraz

$$(f*g)[n] = \left(\sum_{k=0}^{n} f[k]g[n-k]\right) H[n]$$

Przykład: Obliczyć splot sygnałów $f[n] = 2^{-n}H[n]$ oraz $g[n] = H[-n]$.

Splot sygnałów dyskretnych

- Def. Splotem sygnałów $f[n]$ i $g[n]$ nazywamy sygnał

$$(f * g)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k]$$

  o ile powyższy szereg jest zbieżny.
- Splot jest symetryczny $f * g = g * f$.
- Jeśli $f[n]$ i $g[n]$ są sygnałami przyczynowymi, to $f * g$ też jest przyczynowy oraz

$$(f * g)[n] = \left(\sum_{k=0}^{n} f[k]g[n-k] \right) H[n]$$

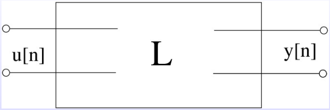
Przykład: Obliczyć splot sygnałów $f[n] = 2^{-n} H[n]$ oraz $g[n] = H[-n]$.

Twierdzenie o transformacie splotu

Niech $f[n]$ i $g[n]$ będą sygnałami dyskretnymi mającymi transformaty Z $F(z)$ i $G(z)$. Wówczas na wspólnym obszarze zbieżności transformat

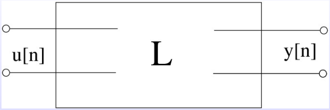
$$(f * g)[n] \xrightarrow{Z} F(z)G(z)$$

Układy liniowe



- $u[n]$ — sygnał wejściowy, $y[n]$ — sygnał wyjściowy
- Układ liniowy realizowany jest przez transformację liniową

$$y[n] = Lu[n]$$



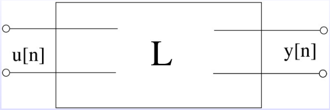
- $u[n]$ — sygnał wejściowy, $y[n]$ — sygnał wyjściowy
- Układ liniowy realizowany jest przez transformację liniową

$$y[n] = Lu[n]$$

- Układ jest czasowo-niezmienniczy, jeśli

$$y[n] = Lu[n] \implies y[n-\ell] = Lu[n-\ell]$$

Układy liniowe



- $u[n]$ — sygnał wejściowy, $y[n]$ — sygnał wyjściowy
- Układ liniowy realizowany jest przez transformację liniową

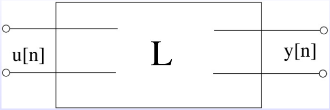
$$y[n] = Lu[n]$$

- Układ jest czasowo-niezmienniczy, jeśli

$$y[n] = Lu[n] \implies y[n-\ell] = Lu[n-\ell]$$

- Odpowiedzią impulsową układu nazywamy odpowiedź $h[n]$ na sygnał impulsowy $\delta[n]$.

Układy liniowe



- $u[n]$ — sygnał wejściowy, $y[n]$ — sygnał wyjściowy
- Układ liniowy realizowany jest przez transformację liniową

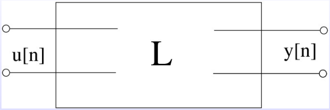
$$y[n] = Lu[n]$$

- Układ jest czasowo-niezmienniczy, jeśli

$$y[n] = Lu[n] \implies y[n-\ell] = Lu[n-\ell]$$

- Odpowiedzią impulsową układu nazywamy odpowiedź $h[n]$ na sygnał impulsowy $\delta[n]$.
- Układ liniowy jest przyczynowy (stabilny) jeśli odpowiedź impulsowa $h[n]$ jest przyczynowa (stabilna).

Układy liniowe



- $u[n]$ — sygnał wejściowy, $y[n]$ — sygnał wyjściowy
- Układ liniowy realizowany jest przez transformację liniową

$$y[n] = Lu[n]$$

- Układ jest czasowo-niezmienniczy, jeśli

$$y[n] = Lu[n] \implies y[n-\ell] = Lu[n-\ell]$$

- Odpowiedzią impulsową układu nazywamy odpowiedź $h[n]$ na sygnał impulsowy $\delta[n]$.
- Układ liniowy jest przyczynowy (stabilny) jeśli odpowiedź impulsowa $h[n]$ jest przyczynowa (stabilna).
- Tw. Dowolny sygnał dyskretny można zapisać jako superpozycję impulsów

$$f[n] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} f[\ell]\delta[n-\ell]$$

Układy liniowe

Przykład: Zapisać sygnał schodkowy $H[-n-1]$ jako superpozycję impulsów

Przykład: Zapisać sygnał schodkowy $H[-n-1]$ jako superpozycję impulsów

Twierdzenie o odpowiedzi na sygnał

Jeśli $u[n]$ jest dowolnym sygnałem dyskretnym, to odpowiedź układu liniowego i czasowo-niezmienniczego na sygnał $u[n]$ jest postaci

$$y[n] = (h * u)[n]\,,$$

gdzie $h[n]$ jest odpowiedzią impulsową układu.

Przykład: Zapisać sygnał schodkowy $H[-n-1]$ jako superpozycję impulsów

Twierdzenie o odpowiedzi na sygnał

Jeśli $u[n]$ jest dowolnym sygnałem dyskretnym, to odpowiedź układu liniowego i czasowo-niezmienniczego na sygnał $u[n]$ jest postaci

$$y[n] = (h * u)[n]\,,$$

gdzie $h[n]$ jest odpowiedzią impulsową układu.

Przykład: Dany jest układ liniowy

$$y[n] = \frac{1}{3}u[n] + \frac{2}{3}u[n-1] + \frac{1}{3}u[n-3]\,.$$

Znaleźć odpowiedź na sygnał schodkowy $u[n] = H[n-2]$.

Przykład: Uzasadnić, że układ określony przez następującą odpowiedź na dowolny sygnał $u[n]$:

$$u[n] \xrightarrow{L} y[n] = \sum_{k=0}^{N} a_k u[n-k]$$

jest przyczynowym i stabilnym układem LTD.

Przykład: Uzasadnić, że układ określony przez następującą odpowiedź na dowolny sygnał $u[n]$:

$$u[n] \xrightarrow{L} y[n] = \sum_{k=0}^{N} a_k u[n-k]$$

jest przyczynowym i stabilnym układem LTD.

Przykład: Wyznaczyć odpowiedź na dowolny sygnał, jeśli odpowiedź impulsowa ma postać $h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-2]$.

Funkcja przejścia

Funkcja przejścia

- Ponieważ $y = h * u$, to $Y(z) = H(z)U(z)$. Transformatę Z odpowiedzi impulsowej nazywamy *funkcją przejścia* lub *transmitancją* układu.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

- Ponieważ $y = h * u$, to $Y(z) = H(z)U(z)$. Transformatę Z odpowiedzi impulsowej nazywamy *funkcją przejścia* lub *transmitancją* układu.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

- Jeśli transmitancja ma postać ilorazu wielomianów, to w odpowiednim obszarze jej określoności (patrz Tw. 1) potrafimy znaleźć przyczynową odpowiedź impulsową $h[n]$ (układ liniowy jest przyczynowy)
- Rozkładamy na ułamki proste

$$\begin{aligned} \frac{H(z)}{z} &= \frac{A}{(z-w_1)^{k_1}} + \dots \\ H(z) &= A\frac{z}{(z-w_1)^{k_1}} + \dots \end{aligned}$$

$$\frac{z}{(z-w_1)^{k_1}} \xrightarrow{Z^{-1}} \binom{n}{k_1 - 1} w_1^{n-k-1} H[n], \qquad |z| > |w_1|$$

- Układy liniowe można opisywać na poziomie sygnałów lub na poziomie transformat

$$
\begin{tikzcd}
U(z) \arrow[r, "L", "\cdot H"'] & Y(z) \arrow[d, "Z^{-1}"'] & \text{(poziom transformaty)} \\
u[n] \arrow[u, "Z"'] \arrow[r, "L", "*h"'] & y[n] & \text{(poziom sygnałów)}
\end{tikzcd}
$$

Badanie układów liniowych

- Układy liniowe można opisywać na poziomie sygnałów lub na poziomie transformat

$$\begin{tikzcd}
U(z) \arrow[r, "L", "\cdot H"'] & Y(z) \arrow[d, "Z^{-1}"'] & \text{(poziom transformaty)} \\
u[n] \arrow[u, "Z"'] \arrow[r, "L", "*h"'] & y[n] & \text{(poziom sygnałów)}
\end{tikzcd}$$

Przykład: Wyznaczyć przyczynową odpowiedź impulsową $h[n]$ dla funkcji przejścia $H(z) = \dfrac{iz}{4z^2+9}$. Czy otrzymany sygnał jest stabilny? Wyznaczyć odpowiedź na sygnał $u[n] = 2\delta[n] + 4\delta[n-1]$ dwoma metodami: na poziomie sygnałów oraz na poziomie transformat.

- Def. Dyskretnym sygnałem harmonicznym nazywamy sygnał postaci

$$u[n] = u[0]e^{i\omega n} \,,$$

gdzie $u[0] \in \mathbb{C}$, a $\omega \in \mathbb{R}$ jest częstością sygnału. Wielkość $|u[0]|$ nazywamy amplitudą sygnału, a $\varphi_0 = \operatorname{Arg} u[0]$ — fazą początkową.

- Def. Dyskretnym sygnałem harmonicznym nazywamy sygnał postaci

$$u[n] = u[0]e^{i\omega n},$$

gdzie $u[0] \in \mathbb{C}$, a $\omega \in \mathbb{R}$ jest częstością sygnału. Wielkość $|u[0]|$ nazywamy amplitudą sygnału, a $\varphi_0 = \operatorname{Arg} u[0]$ — fazą początkową.

Twierdzenie o odpowiedzi na sygnał harmoniczny

Odpowiedzią układu LTD na sygnał harmoniczny jest modulowany sygnał harmoniczny postaci

$$u[0]e^{i\omega n} \xrightarrow{L} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]u[0]e^{i\omega(n-k)} = u[0]\Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-i\omega k}\Big]e^{i\omega n}$$

gdzie wielkość

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-i\omega k} = \widehat{H}(e^{i\omega})$$

jest transformatą Z odpowiedzi impulsowej obliczanej na jednostkowym okręgu $z = e^{i\omega}$ i nosi nazwę *charakterystyki częstości.*

- Charakterystyka częstości wyznacza odpowiedź impulsową, bowiem

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{H}(e^{i\omega}) e^{i\omega n} d\omega \, .$$

- Charakterystyka częstości wyznacza odpowiedź impulsową, bowiem

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{H}(e^{i\omega}) e^{i\omega n} d\omega \, .$$

- Dyskretny układ LTD jest jednoznacznie wyznaczony przez jedną z poniższych funkcji:
  1. odpowiedź impulsową

- Charakterystyka częstości wyznacza odpowiedź impulsową, bowiem

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{H}(e^{i\omega}) e^{i\omega n} d\omega \,.$$

- Dyskretny układ LTD jest jednoznacznie wyznaczony przez jedną z poniższych funkcji:
  1. odpowiedź impulsową
  2. transmitancję (transformatę Z odpowiedzi impulsowej)

Charakterystka częstości

- Charakterystyka częstości wyznacza odpowiedź impulsową, bowiem

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{H}(e^{i\omega}) e^{i\omega n} d\omega \, .$$

- Dyskretny układ LTD jest jednoznacznie wyznaczony przez jedną z poniższych funkcji:
  1. odpowiedź impulsową
  2. transmitancję (transformatę Z odpowiedzi impulsowej)
  3. charakterystykę częstości (transformatą Z odpowiedzi impulsowej obliczanej na jednostkowym okręgu)

Układy różnicowe

Układy różnicowe

- Układ liniowy określony relacją

$$
\begin{aligned}
b_0 y[n] + b_1 y[n-1] + \ldots + b_m y[n-m] \; &= \\
&= \; a_0 u[n] + a_1 u[n-1] + \ldots + a_k u[n-k]
\end{aligned}
$$

- Układ liniowy określony relacją

$$\begin{aligned} b_0 y[n] + b_1 y[n-1] + \ldots + b_m y[n-m] &= \\ &= a_0 u[n] + a_1 u[n-1] + \ldots + a_k u[n-k] \end{aligned}$$

- Obliczamy transformatę Z obu stron

$$\begin{aligned} (b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-m}) Y(z) &= \\ &= (a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_k z^{-k}) U(z) \end{aligned}$$

Układy różnicowe

- Układ liniowy określony relacją

$$b_0 y[n] + b_1 y[n-1] + \ldots + b_m y[n-m] = \\ = a_0 u[n] + a_1 u[n-1] + \ldots + a_k u[n-k]$$

- Obliczamy transformatę Z obu stron

$$(b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-m}) Y(z) = \\ = (a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_k z^{-k}) U(z)$$

- Funkcja przejścia ma postać

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_k z^{-k}}{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-m}}$$

Układy różnicowe

- Układ liniowy określony relacją

$$b_0 y[n] + b_1 y[n-1] + \ldots + b_m y[n-m] \; = \; = \; a_0 u[n] + a_1 u[n-1] + \ldots + a_k u[n-k]$$

- Obliczamy transformatę Z obu stron

$$(b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-m}) Y(z) \; = \; = \; (a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_k z^{-k}) U(z)$$

- Funkcja przejścia ma postać

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_k z^{-k}}{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-m}}$$

- Jeśli $b_0 \neq 0$, $m, k \geqslant 0$, to istnieje jednoznaczny sygnał przyczynowy $y[n] = (h * u)[n]$, gdzie

$$H(z) \xrightarrow{Z^{-1}} h[n] \text{ na obszarze } |z| > R = \max\{|w| : w \text{ jest biegunem } H(z)\}$$

Przykład: Dany jest układ liniowy opisany równaniem różnicowym

$$y[n] - y[n-2] = u[n-1]\,.$$

1) Znaleźć przyczynową odpowiedź impulsową dla tego układu. 2) Znaleźć dwoma metodami (splot i odwrócenie transformaty Z) odpowiedź układu na sygnał

$$u[n] = 2^{-n} H[n]\,.$$