

# Transformaty sygnałów ciągłych

Jacek Jurkowski

Instytut Fizyki

2017



- Def. Funkcję  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  nazywamy kawałkami ciągłą, jeśli jest ona ciągła wszędzie za wyjątkiem być może skończonej liczby punktów  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Jednak w każdym z punktów  $t_i$  istnieją granice jednostronne  $f(t_i+)$ ,  $f(t_i-)$ , zatem skok funkcji

$$f(t_i+) - f(t_i-)$$

w tych punktach jest skończony.

- Def. Funkcję  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  nazywamy kawałkami ciągłą, jeśli jest ona ciągła wszędzie za wyjątkiem być może skończonej liczby punktów  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Jednak w każdym z punktów  $t_i$  istnieją granice jednostronne  $f(t_i+)$ ,  $f(t_i-)$ , zatem skok funkcji

$$f(t_i+) - f(t_i-)$$

w tych punktach jest skończony.

- Def. Funkcję  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  nazywamy kawałkami gładką, jeśli jej pochodna  $f'$  jest kawałkami ciągłą.

- Def. Funkcję  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  nazywamy kawałkami ciągłą, jeśli jest ona ciągła wszędzie za wyjątkiem być może skończonej liczby punktów  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Jednak w każdym z punktów  $t_i$  istnieją granice jednostronne  $f(t_i+)$ ,  $f(t_i-)$ , zatem skok funkcji

$$f(t_i+) - f(t_i-)$$

w tych punktach jest skończony.

- Def. Funkcję  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  nazywamy kawałkami gładką, jeśli jej pochodna  $f'$  jest kawałkami ciągłą.
- Def. Sygnałem nazywamy dowolną funkcję kawałkami gładką.

- Def. Funkcję  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  nazywamy kawałkami ciągłą, jeśli jest ona ciągła wszędzie za wyjątkiem być może skończonej liczby punktów  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Jednak w każdym z punktów  $t_i$  istnieją granice jednostronne  $f(t_i+)$ ,  $f(t_i-)$ , zatem skok funkcji

$$f(t_i+) - f(t_i-)$$

w tych punktach jest skończony.

- Def. Funkcję  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  nazywamy kawałkami gładką, jeśli jej pochodna  $f'$  jest kawałkami ciągłą.
- Def. Sygnałem nazywamy dowolną funkcję kawałkami gładką.



- Def. Dla funkcji  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definiujemy jej transformatę Fouriera jako

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\omega) \equiv \mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt$$

o ile całka niewłaściwa jest skończona.



- Def. Dla funkcji  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definiujemy jej transformatę Fouriera jako

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\omega) \equiv \mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt$$

o ile całka niewłaściwa jest skończona.

- Jeśli  $f$  traktujemy jako sygnał, to moduł jego transformaty Fouriera nazywamy *widmem sygnału*.

- Def. Dla funkcji  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definiujemy jej transformatę Fouriera jako

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\omega) \equiv \mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt$$

o ile całka niewłaściwa jest skończona.

- Jeśli  $f$  traktujemy jako sygnał, to moduł jego transformaty Fouriera nazywamy *widmem sygnału*.
- Rodzą się pytania:
  - 1 Jakie warunki musi spełniać sygnał  $f$ , aby jego transformata istniała (całka niewłaściwa była zbieżna)?

- Def. Dla funkcji  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definiujemy jej transformatę Fouriera jako

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\omega) \equiv \mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt$$

o ile całka niewłaściwa jest skończona.

- Jeśli  $f$  traktujemy jako sygnał, to moduł jego transformaty Fouriera nazywamy *widmem sygnału*.
- Rodzą się pytania:
  - Jakie warunki musi spełniać sygnał  $f$ , aby jego transformata istniała (całka niewłaściwa była zbieżna)?
  - Czy istnieje transformata odwrotna, tzn. czy ze znajomości  $\hat{f}(\omega)$  można odtworzyć sygnał  $f(t)$ ?



- Sygnał prostokątny,  $a > 0$

$$\Pi_a(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{a}{2} \\ 0 & |t| > \frac{a}{2} \end{cases}$$

- Sygnał prostokątny,  $a > 0$

$$\Pi_a(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{a}{2} \\ 0 & |t| > \frac{a}{2} \end{cases}$$

- Sygnał trójkątny

$$\Lambda_a(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a} & |t| < a \\ 0 & |t| > a \end{cases}$$

- Sygnał prostokątny,  $a > 0$

$$\Pi_a(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{a}{2} \\ 0 & |t| > \frac{a}{2} \end{cases}$$

- Sygnał trójkątny

$$\Lambda_a(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a} & |t| < a \\ 0 & |t| > a \end{cases}$$

- Funkcja sinkus, funkcja schodkowa

$$\operatorname{sinc} x := \frac{\sin(x)}{x}, \quad H(x) := \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases},$$

- Sygnał prostokątny,  $a > 0$

$$\Pi_a(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{a}{2} \\ 0 & |t| > \frac{a}{2} \end{cases}$$

- Sygnał trójkątny

$$\Lambda_a(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a} & |t| < a \\ 0 & |t| > a \end{cases}$$

- Funkcja sinkus, funkcja schodkowa

$$\operatorname{sinc} x := \frac{\sin(x)}{x}, \quad H(x) := \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases},$$

**Przykład:** Pokazać, że

$$\Pi_a(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{\Pi}(\omega) = \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{1}{2}\omega a\right) = a \operatorname{sinc}\left(\frac{1}{2}\omega a\right).$$



- Sygnał o kształcie trapezu,  $a, \varepsilon > 0$

$$T_{a,\varepsilon}(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{a}{2} - \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{a}{2} - |t| \right) & \frac{a}{2} - \varepsilon < |t| < \frac{a}{2} \\ 0 & |t| > \frac{a}{2} \end{cases}$$

- Sygnał o kształcie trapezu,  $a, \varepsilon > 0$

$$T_{a,\varepsilon}(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{a}{2} - \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{a}{2} - |t| \right) & \frac{a}{2} - \varepsilon < |t| < \frac{a}{2} \\ 0 & |t| > \frac{a}{2} \end{cases}$$

**Przykład:** Transformata Fouriera dla sygnału o kształcie trapezu jest postaci

$$T_{a,\varepsilon}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{T}_{a,\varepsilon}(\omega) = \frac{4 \sin\left(\frac{a-\varepsilon}{2}\omega\right) \sin\frac{\varepsilon\omega}{2}}{\varepsilon\omega^2}$$

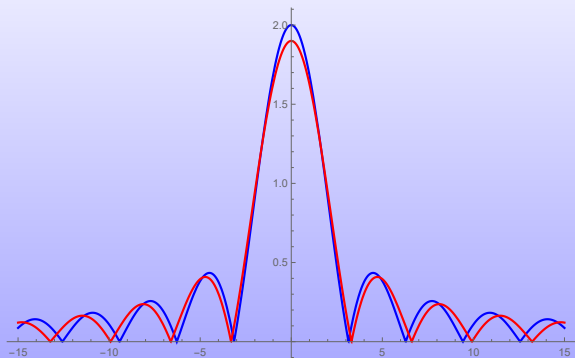
- Sygnał o kształcie trapezu,  $a, \varepsilon > 0$

$$T_{a,\varepsilon}(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{a}{2} - \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{a}{2} - |t| \right) & \frac{a}{2} - \varepsilon < |t| < \frac{a}{2} \\ 0 & |t| > \frac{a}{2} \end{cases}$$

**Przykład:** Transformata Fouriera dla sygnału o kształcie trapezu jest postaci

$$T_{a,\varepsilon}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{T}_{a,\varepsilon}(\omega) = \frac{4 \sin\left(\frac{a-\varepsilon}{2}\omega\right) \sin\frac{\varepsilon\omega}{2}}{\varepsilon\omega^2}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_{a,\varepsilon} = \Pi_a$$



- Widmo sygnału prostokątnego  $a = 2$  (niebieski)
- Widmo sygnału o kształcie trapezu  $a = 2$ ,  $\varepsilon = 0.1$  (czerwony)



$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\omega)$$

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(\omega)$$

- liniowość:  $\alpha f + \beta g \xrightarrow{\mathcal{F}} \alpha \widehat{f} + \beta \widehat{g}$
- sprzężenie zespolone:  $f^*(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}^*(-\omega)$
- przesunięcie w czasie:  $f(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-i\omega t_0} \widehat{f}(\omega)$
- przesunięcie w częstotliwości:  $e^{i\Omega t} f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(\omega - \Omega)$
- skalowanie:  $f(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} |a|^{-1} \widehat{f}(\omega/a)$

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(\omega)$$

- liniowość:  $\alpha f + \beta g \xrightarrow{\mathcal{F}} \alpha \widehat{f} + \beta \widehat{g}$
- sprzężenie zespolone:  $f^*(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}^*(-\omega)$
- przesunięcie w czasie:  $f(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-i\omega t_0} \widehat{f}(\omega)$
- przesunięcie w częstotliwości:  $e^{i\Omega t} f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(\omega - \Omega)$
- skalowanie:  $f(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} |a|^{-1} \widehat{f}(\omega/a)$
- Rozłóżmy sygnał na część parzystą i nieparzystą:  $f = f_+ + f_-$ .  
Wówczas

$$\widehat{f}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f_+(t) \cos \omega t dt - 2i \int_0^{\infty} f_-(t) \sin \omega t dt = 2\mathcal{F}_c(\omega) - 2i\mathcal{F}_s(\omega)$$

$\mathcal{F}_c$  — transformata kosinusowa,     $\mathcal{F}_s$  — transformata sinusowa



$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(\omega)$$

- liniowość:  $\alpha f + \beta g \xrightarrow{\mathcal{F}} \alpha \widehat{f} + \beta \widehat{g}$
- sprzężenie zespolone:  $f^*(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}^*(-\omega)$
- przesunięcie w czasie:  $f(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-i\omega t_0} \widehat{f}(\omega)$
- przesunięcie w częstotliwości:  $e^{i\Omega t} f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(\omega - \Omega)$
- skalowanie:  $f(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} |a|^{-1} \widehat{f}(\omega/a)$
- Rozłóżmy sygnał na część parzystą i nieparzystą:  $f = f_+ + f_-$ .  
Wówczas

$$\widehat{f}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f_+(t) \cos \omega t dt - 2i \int_0^{\infty} f_-(t) \sin \omega t dt = 2\mathcal{F}_c(\omega) - 2i\mathcal{F}_s(\omega)$$

$\mathcal{F}_c$  — transformata kosinusowa,  $\mathcal{F}_s$  — transformata sinusowa

- Jeśli sygnał jest parzysty, to  $\widehat{f} = 2\mathcal{F}_c$  (transformata rzeczywista)
- Jeśli sygnał jest nieparzysty, to  $\widehat{f} = -2i\mathcal{F}_s$  (transformata urojona)



Przykład: Pokazać, że

$$\Lambda_a(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{\Lambda}(\omega) = \frac{4}{a\omega^2} \sin^2\left(\frac{1}{2}\omega a\right) = a \operatorname{sinc}^2\left(\frac{1}{2}\omega a\right).$$

Przykład: Pokazać, że

$$\Lambda_a(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{\Lambda}(\omega) = \frac{4}{a\omega^2} \sin^2\left(\frac{1}{2}\omega a\right) = a \operatorname{sinc}^2\left(\frac{1}{2}\omega a\right).$$

- Na obu przykładach widać, że transformata  $\widehat{f}$  jest ciągła oraz

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \widehat{f}(\omega) = 0$$

**Przykład:** Pokazać, że

$$\Lambda_a(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{\Lambda}(\omega) = \frac{4}{a\omega^2} \sin^2\left(\frac{1}{2}\omega a\right) = a \operatorname{sinc}^2\left(\frac{1}{2}\omega a\right).$$

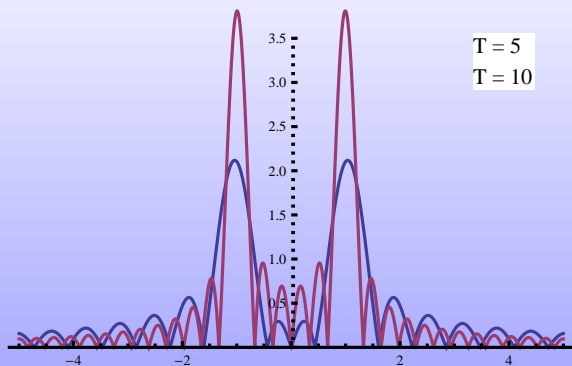
- Na obu przykładach widać, że transformata  $\widehat{f}$  jest ciągła oraz

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \widehat{f}(\omega) = 0$$

**Przykład:** Sygnały: schodkowy  $H(t)$  i harmoniczny  $f(t) = \sin \omega_0 t$ ,  $t \in \mathbb{R}$  nie mają transformaty Fouriera! Ale sygnał harmoniczny obcięty do przedziału  $[-T, T]$  ma transformatę!



# Widmo obciętego sygnału harmonicznego



- $T = 5$  (niebieski)
- $T = 10$  (czerwony)





Def. Zbiór funkcji absolutnie całkowalnych

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \right\}$$

Def. Zbiór funkcji absolutnie całkowalnych

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \right\}$$

### Twierdzenie Riemanna-Lebsegue

Jeśli  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , to  $\hat{f}$  istnieje, jest ciągła oraz  $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0$ .

Def. Zbiór funkcji absolutnie całkowalnych

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \right\}$$

### Twierdzenie Riemanna-Lebsegue

Jeśli  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , to  $\hat{f}$  istnieje, jest ciągła oraz  $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0$ .

Def. Wartość główna całki niewłaściwej w nieskończoności

$$P \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A f(t) dt$$

## Dalsze własności transformaty Fouriera

Def. Zbiór funkcji absolutnie całkowalnych

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \right\}$$

### Twierdzenie Riemanna-Lebsegue

Jeśli  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , to  $\hat{f}$  istnieje, jest ciągła oraz  $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0$ .

Def. Wartość główna całki niewłaściwej w nieskończoności

$$P \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A f(t) dt$$

### Twierdzenie

Jeśli  $f \in L^1(\mathbb{R})$  jest kawałkami gładka, to

$$\frac{1}{2\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2} (f(t+) + f(t-))$$



### Twierdzenie o odwrotnej transformacie Fouriera

Jeśli  $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$  i  $f$  jest kawałkami gładka, to istnieje transformata odwrotna

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F} f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

oraz  $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F} f) = f$  we wszystkich punktach, w których  $f$  jest ciągła.

## Twierdzenie o odwrotnej transformacie Fouriera

Jeśli  $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$  i  $f$  jest kawałkami gładka, to istnieje transformata odwrotna

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F} f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

oraz  $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F} f) = f$  we wszystkich punktach, w których  $f$  jest ciągła.

- transformata pochodnej:  $f'(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} i\omega \widehat{f}$ , jeśli  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$

## Twierdzenie o odwrotnej transformacie Fouriera

Jeśli  $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$  i  $f$  jest kawałkami gładka, to istnieje transformata odwrotna

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F} f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

oraz  $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F} f) = f$  we wszystkich punktach, w których  $f$  jest ciągła.

- transformata pochodnej:  $f'(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} i\omega \hat{f}$ , jeśli  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$
- pochodna transformaty:  $-itf(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}'(\omega)$



## Twierdzenie o odwrotnej transformacie Fouriera

Jeśli  $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$  i  $f$  jest kawałkami gładka, to istnieje transformata odwrotna

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F} f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

oraz  $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F} f) = f$  we wszystkich punktach, w których  $f$  jest ciągła.

- transformata pochodnej:  $f'(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} i\omega \hat{f}$ , jeśli  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$
- pochodna transformaty:  $-itf(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}'(\omega)$

**Przykład:** [Transformata Fouriera rozkładu Gaussa] Pokazać, że dla  $\sigma > 0$

$$G_\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-t^2/2\sigma^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{G}(\omega) = e^{-\sigma^2\omega^2/2}.$$



Def. Splotem sygnałów  $f$  i  $g$  nazywamy całkę niewłaściwą

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

o ile jest ona skończona.

Def. Splotem sygnałów  $f$  i  $g$  nazywamy całkę niewłaściwą

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

o ile jest ona skończona.

## Twierdzenie o zbieżności splotu

Jeśli  $f \in L^1(\mathbb{R})$  i  $g$  jest ograniczona, to splot jest zbieżny.

Def. Splotem sygnałów  $f$  i  $g$  nazywamy całkę niewłaściwą

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

o ile jest ona skończona.

#### Twierdzenie o zbieżności splotu

Jeśli  $f \in L^1(\mathbb{R})$  i  $g$  jest ograniczona, to splot jest zbieżny.

**Przykład:** Jeśli sygnały  $f$  i  $g$  są przyczynowe, to ich splot wyraża się jako

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau$$



## Twierdzenie o transformacie splotu

Jeżeli sygnały  $f$  i  $g$  są kawałkami ciągle oraz  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ , to

$$f * g \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f} \widehat{g}$$

## Twierdzenie o transformacie splotu

Jeżeli sygnały  $f$  i  $g$  są kawałkami ciągłe oraz  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ , to

$$f * g \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f\hat{g}}$$

Przykład: Rzeczywiście

$$\begin{aligned}\Pi_a(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} a \operatorname{sinc}\left(\frac{1}{2}\omega a\right) \\ \Lambda_a(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} a \operatorname{sinc}^2\left(\frac{1}{2}\omega a\right) \\ \Pi_a * \Pi_a &= a\Lambda_a\end{aligned}$$

i wówczas

$$\Pi_a * \Pi_a = a\Lambda_a \xrightarrow{\mathcal{F}} a^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{1}{2}\omega a\right) = \widehat{\Pi_a}\widehat{\Pi_a}$$





Def. Funkcję  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  nazywamy całkowaną z kwadratem, jeśli

$$\|f\|_2^2 \equiv \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt < \infty$$

Zbiór tych funkcji oznaczamy przez  $L^2(\mathbb{R})$ .

Własności zbioru  $L^2(\mathbb{R})$

Def. Funkcję  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  nazywamy całkowaną z kwadratem, jeśli

$$\|f\|_2^2 \equiv \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt < \infty$$

Zbiór tych funkcji oznaczamy przez  $L^2(\mathbb{R})$ .

Własności zbioru  $L^2(\mathbb{R})$

- 1  $f \in L^1(\mathbb{R})$  i  $f$  jest ograniczona  $\Rightarrow f \in L^2(\mathbb{R})$

Def. Funkcję  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  nazywamy całkowną z kwadratem, jeśli

$$\|f\|_2^2 \equiv \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt < \infty$$

Zbiór tych funkcji oznaczamy przez  $L^2(\mathbb{R})$ .

Własności zbioru  $L^2(\mathbb{R})$

- ❶  $f \in L^1(\mathbb{R})$  i  $f$  jest ograniczona  $\Rightarrow f \in L^2(\mathbb{R})$
- ❷  $f, g \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow$  istnieje iloczyn skalarny

$$\langle f|g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f^*(t)g(t)dt$$

Def. Funkcję  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  nazywamy całkowlaną z kwadratem, jeśli

$$\|f\|_2^2 \equiv \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt < \infty$$

Zbiór tych funkcji oznaczamy przez  $L^2(\mathbb{R})$ .

Własności zbioru  $L^2(\mathbb{R})$

- ❶  $f \in L^1(\mathbb{R})$  i  $f$  jest ograniczona  $\Rightarrow f \in L^2(\mathbb{R})$
- ❷  $f, g \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow$  istnieje iloczyn skalarny

$$\langle f|g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f^*(t)g(t)dt$$

- ❸ Jeśli  $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  oraz  $\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$ , to

$$\langle f|g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}|\hat{g} \rangle$$

Def. Funkcję  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  nazywamy całkowlaną z kwadratem, jeśli

$$\|f\|_2^2 \equiv \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt < \infty$$

Zbiór tych funkcji oznaczamy przez  $L^2(\mathbb{R})$ .

## Własności zbioru $L^2(\mathbb{R})$

- ❶  $f \in L^1(\mathbb{R})$  i  $f$  jest ograniczona  $\Rightarrow f \in L^2(\mathbb{R})$
- ❷  $f, g \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow$  istnieje iloczyn skalarny

$$\langle f|g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f^*(t)g(t)dt$$

- ❸ Jeśli  $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  oraz  $\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$ , to

$$\langle f|g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}|\hat{g} \rangle$$

- ❹ równość Plancherela:  $\|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\hat{f}\|_2$

Def. Funkcję  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  nazywamy całkowaną z kwadratem, jeśli

$$\|f\|_2^2 \equiv \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt < \infty$$

Zbiór tych funkcji oznaczamy przez  $L^2(\mathbb{R})$ .

## Własności zbioru $L^2(\mathbb{R})$

- ❶  $f \in L^1(\mathbb{R})$  i  $f$  jest ograniczona  $\Rightarrow f \in L^2(\mathbb{R})$
- ❷  $f, g \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow$  istnieje iloczyn skalarny

$$\langle f|g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f^*(t)g(t)dt$$

- ❸ Jeśli  $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  oraz  $\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$ , to

$$\langle f|g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}|\hat{g} \rangle$$

- ❹ równość Plancherela:  $\|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\hat{f}\|_2$
- ❺ transformata iloczynu: jeśli  $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  są kawałkami gładkie, to

$$f g \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} \hat{f} * \hat{g}$$





- Def. Próbkowaniem sygnału ciągłego  $f(t)$  z częstością  $\omega = 2\pi/T$  nazywamy dyskretny sygnał

$$f[n] = f(nT) = f\left(\frac{2\pi n}{\omega}\right)$$

- Def. Próbkowaniem sygnału ciągłego  $f(t)$  z częstością  $\omega = 2\pi/T$  nazywamy dyskretny sygnał

$$f[n] = f(nT) = f\left(\frac{2\pi n}{\omega}\right)$$

- Czy można odtworzyć ciągły sygnał na podstawie jego próbkowania?



- Dane jest próbkowanie  $f[n]$ .

- Dane jest próbkowanie  $f[n]$ .
- Konstruujemy interpolację liniową  $f_r(t)$  tak aby
  - 1  $f_r(nT) = f(nT) = f[n]$
  - 2 Pomiędzy chwilami  $nT$  oraz  $(n + 1)T$  przybliżamy  $f(t)$  linią prostą

- Dane jest próbkowanie  $f[n]$ .
- Konstruujemy interpolację liniową  $f_r(t)$  tak aby
  - 1  $f_r(nT) = f(nT) = f[n]$
  - 2 Pomiędzy chwilami  $nT$  oraz  $(n+1)T$  przybliżamy  $f(t)$  linią prostą
- Wprowadzamy ciągły sygnał

$$\Lambda_T(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & \text{dla } |t| \leq T \\ 0 & \text{dla } |t| > T \end{cases}$$

- Dane jest próbkowanie  $f[n]$ .
- Konstruujemy interpolację liniową  $f_r(t)$  tak aby
  - 1  $f_r(nT) = f(nT) = f[n]$
  - 2 Pomiędzy chwilami  $nT$  oraz  $(n+1)T$  przybliżamy  $f(t)$  linią prostą
- Wprowadzamy ciągły sygnał

$$\Lambda_T(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & \text{dla } |t| \leq T \\ 0 & \text{dla } |t| > T \end{cases}$$

- Wówczas aproksymacja liniowa ma postać

$$f_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] \Lambda_T(t - kT)$$

- Dane jest próbkowanie  $f[n]$ .
- Konstruujemy interpolację liniową  $f_r(t)$  tak aby
  - 1  $f_r(nT) = f(nT) = f[n]$
  - 2 Pomiędzy chwilami  $nT$  oraz  $(n+1)T$  przybliżamy  $f(t)$  linią prostą
- Wprowadzamy ciągły sygnał

$$\Lambda_T(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & \text{dla } |t| \leq T \\ 0 & \text{dla } |t| > T \end{cases}$$

- Wówczas aproksymacja liniowa ma postać

$$f_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] \Lambda_T(t - kT)$$

**Przykład:** Pokazać, że dla sygnału  $f(t) = \frac{\sin(\omega_0 t)}{t}$  i jego próbkowania z częstotliwością  $\omega = 2\omega_0$ , aproksymacja liniowa ma postać

$$f_r(t) = \omega_0 \Lambda_T(t)$$

i słabo przybliża wyjściowy sygnał!



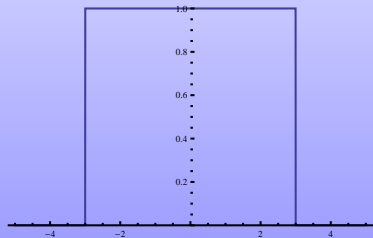


**Przykład:** Znaleźć sygnał, którego gęstość spektralna ma postać

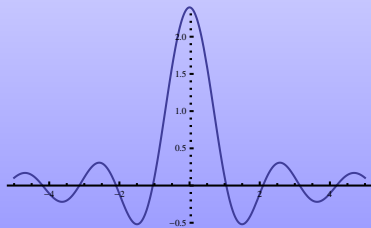
$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_{gr} \\ 0 & |\omega| > \omega_{gr} \end{cases}$$

**Przykład:** Znaleźć sygnał, którego gęstość spektralna ma postać

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_{gr} \\ 0 & |\omega| > \omega_{gr} \end{cases}$$



$\mathcal{F}^{-1}$   
→





- Def. Sygnał  $f(t)$  ma ograniczony zakres widma, jeśli jego widmo znika powyżej pewnej granicznej częstości  $\omega_{gr}$ . Częstość  $2\omega_{gr}$  nazywamy częstością Nyquista.

- Def. Sygnał  $f(t)$  ma ograniczony zakres widma, jeśli jego widmo znika powyżej pewnej granicznej częstości  $\omega_{gr}$ . Częstość  $2\omega_{gr}$  nazywamy częstością Nyquista.
- Def. Sygnał  $f(t)$  ma skończony czas trwania, jeśli  $f(t) = 0$  dla  $|t| > T$ .

- Def. Sygnał  $f(t)$  ma ograniczony zakres widma, jeśli jego widmo zanika powyżej pewnej granicznej częstotliwości  $\omega_{gr}$ . Częstotliwość  $2\omega_{gr}$  nazywamy częstotliwością Nyquista.
- Def. Sygnał  $f(t)$  ma skończony czas trwania, jeśli  $f(t) = 0$  dla  $|t| > T$ .

## Twierdzenie o próbkowaniu

Niech  $f \in L^2(\mathbb{R})$  będzie sygnałem (Kawałkami gładkim) o ograniczonym zakresie widma o częstotliwości Nyquista  $2\omega_{gr}$ . Niech  $f[n]$  będzie jego próbkowaniem z częstotliwością  $\omega > 2\omega_{gr}$ , wówczas

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] \frac{2 \sin(\omega(t - kT)/2)}{\omega(t - kT)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] \operatorname{sinc}(\omega(t - kT)/2),$$

dla prawie wszystkich  $t \in \mathbb{R}$ , tj. za wyjątkiem być może punktów nieciągłości  $f$ .

- Def. Sygnał  $f(t)$  ma ograniczony zakres widma, jeśli jego widmo znika powyżej pewnej granicznej częstotliwości  $\omega_{\text{gr}}$ . Częstotność  $2\omega_{\text{gr}}$  nazywamy częstotnością Nyquista.
- Def. Sygnał  $f(t)$  ma skończony czas trwania, jeśli  $f(t) = 0$  dla  $|t| > T$ .

## Twierdzenie o próbkowaniu

Niech  $f \in L^2(\mathbb{R})$  będzie sygnałem (Kawałkami gładkim) o ograniczonym zakresie widma o częstotności Nyquista  $2\omega_{\text{gr}}$ . Niech  $f[n]$  będzie jego próbkowaniem z częstotnością  $\omega > 2\omega_{\text{gr}}$ , wówczas

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] \frac{2 \sin(\omega(t - kT)/2)}{\omega(t - kT)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] \text{sinc}(\omega(t - kT)/2),$$

dla prawie wszystkich  $t \in \mathbb{R}$ , tj. za wyjątkiem być może punktów nieciągłości  $f$ .

**Przykład:** Pokazać, że próbkowanie sygnału harmonicznego  $f(t) = \sin(\omega_0 t)$  z częstotnością  $\omega = 2\omega_{\text{gr}}$  nie wystarcza do jego rekonstrukcji!





A co z transformata  $f(t) = \sin \omega_0 t$ ?

A co z transformatą  $f(t) = \sin \omega_0 t$ ?

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt - \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega + \omega_0)t} dt$$

ale całka  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha t} dt$  jest rozbieżna, nawet w sensie wartości głównej

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A e^{-i\alpha t} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{2 \sin(\alpha A)}{\alpha} = \text{nie istnieje}$$



Def. Funkcją uogólnioną delta Diraca nazywamy obiekt (dystrybucję) spełniający warunki dla  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ,

$$\textcircled{1} \int_a^b \delta(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 < a < b \text{ lub } a < b < 0 \\ 1 & \text{dla } a < 0 < b \end{cases}$$

w szczególności  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$

Def. Funkcją uogólnioną delta Diraca nazywamy obiekt (dystrybucję) spełniający warunki dla  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ,

$$\textcircled{1} \int_a^b \delta(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 < a < b \text{ lub } a < b < 0 \\ 1 & \text{dla } a < 0 < b \end{cases}$$

w szczególności  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$

$$\textcircled{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0) \text{ dla dowolnej gładkiej funkcji szybko znikającej w nieskończoności.}$$



- Delta Diraca nie jest funkcją, ale może być przybliżana przez rodziny funkcji!



- Delta Diraca nie jest funkcją, ale może być przybliżana przez rodziny funkcji!

$$\delta(t) \equiv \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \Pi_a(t)$$

- Delta Diraca nie jest funkcją, ale może być przybliżana przez rodziny funkcji!

$$\delta(t) \equiv \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \Pi_a(t)$$

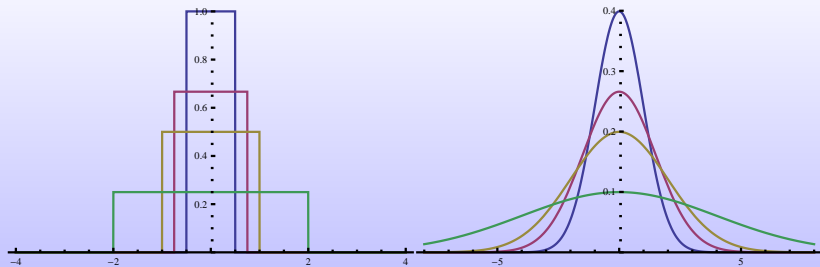
$$\delta(t) \equiv \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-t^2/(2\sigma^2)} \right]$$

- Delta Diraca nie jest funkcją, ale może być przybliżana przez rodziny funkcji!

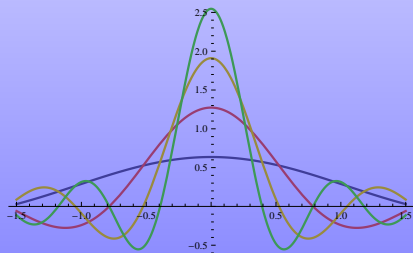
$$\delta(t) \equiv \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \Pi_a(t)$$

$$\delta(t) \equiv \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-t^2/(2\sigma^2)} \right]$$

$$\delta(t) \equiv \lim_{a \rightarrow \infty} \left[ \frac{a}{\pi} \text{sinc}(at) \right]$$



Ciągi prostokątów i funkcji Gaussa



Ciąg funkcji sinkus



## Twierdzenie o odwrotnej transformacie Fouriera

Jeśli  $f$  jest całkowna i ciągła w punkcie  $t$ , to

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

gdzie P oznacza wartość główną całki niewłaściwej, tzn.

$$\text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$



- Mamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \Pi_a(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \operatorname{sinc}(\omega a/2) \\ \delta(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \Pi_a(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \lim_{a \rightarrow 0} \operatorname{sinc}(\omega a/2) = 1 \end{aligned}$$



- Mamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \Pi_a(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \operatorname{sinc}(\omega a/2) \\ \delta(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \Pi_a(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \lim_{a \rightarrow 0} \operatorname{sinc}(\omega a/2) = 1 \end{aligned}$$

- Z transformaty odwrotnej

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\omega t} d\omega$$



- Transformata  $f(t) = \sin \omega_0 t$

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-\omega_0)t} dt - \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega+\omega_0)t} dt$$

- Transformata  $f(t) = \sin \omega_0 t$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-\omega_0)t} dt - \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega+\omega_0)t} dt$$

ale całka  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha t} dt$  jest rozbieżna.

- Transformata  $f(t) = \sin \omega_0 t$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt - \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega + \omega_0)t} dt$$

ale całka  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha t} dt$  jest rozbieżna.

- Jednak wykorzystując reprezentację całkową  $\delta$ -Diraca transformata sygnału harmonicznego przyjmie postać:

$$\sin \omega_0 t \xrightarrow{\mathcal{F}} i\pi(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0))$$



- Sygnał nie może mieć jednocześnie skończonego czasu trwania i skończonego zakresu widma!

- Sygnał nie może mieć jednocześnie skończonego czasu trwania i skończonego zakresu widma!
- Oznaczmy przez  $\Delta_a f$  dyspersję dowolnej, unormowanej funkcji  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , (tzn.  $\|f\|_2 = 1$ ) wokół stałej  $a$

$$(\Delta_a f)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 |f(x)|^2 dx$$



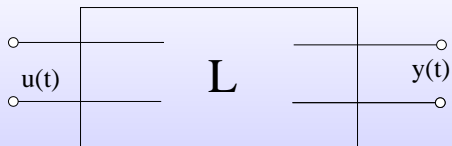
- Sygnał nie może mieć jednocześnie skończonego czasu trwania i skończonego zakresu widma!
- Oznaczmy przez  $\Delta_a f$  dyspersję dowolnej, unormowanej funkcji  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , (tzn.  $\|f\|_2 = 1$ ) wokół stałej  $a$

$$(\Delta_a f)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 |f(x)|^2 dx$$

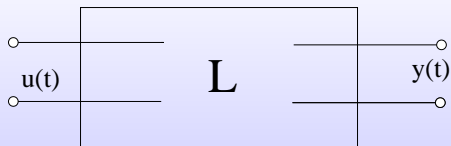
## Twierdzenie o nieoznaczoności

$$\Delta_a f \cdot \Delta_\alpha \hat{f} \geq \frac{1}{4}$$



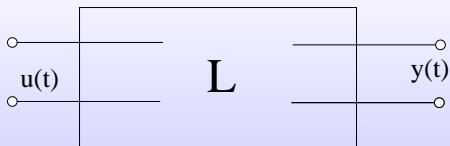


- $u(t)$  — ciągły sygnał wejściowy,  $y(t)$  — ciągły sygnał wyjściowy



- $u(t)$  — ciągły sygnał wejściowy,  $y(t)$  — ciągły sygnał wyjściowy
- Układ liniowy realizowany jest przez transformację liniową

$$y(t) = Lu(t)$$

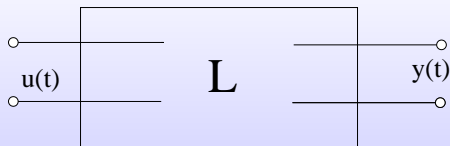


- $u(t)$  — ciągły sygnał wejściowy,  $y(t)$  — ciągły sygnał wyjściowy
- Układ liniowy realizowany jest przez transformację liniową

$$y(t) = Lu(t)$$

- Układ jest czasowo-niezmienniczy, jeśli

$$y(t) = Lu(t) \implies y(t - \tau) = Lu(t - \tau)$$



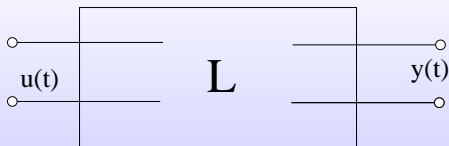
- $u(t)$  — ciągły sygnał wejściowy,  $y(t)$  — ciągły sygnał wyjściowy
- Układ liniowy realizowany jest przez transformację liniową

$$y(t) = Lu(t)$$

- Układ jest czasowo-niezmienniczy, jeśli

$$y(t) = Lu(t) \implies y(t - \tau) = Lu(t - \tau)$$

- Odpowiedzią impulsową układu nazywamy odpowiedź  $h(t)$  na sygnał impulsowy  $\delta(t)$ , tzn.  $h(t) = L\delta(t)$ .



- $u(t)$  — ciągły sygnał wejściowy,  $y(t)$  — ciągły sygnał wyjściowy
- Układ liniowy realizowany jest przez transformację liniową

$$y(t) = Lu(t)$$

- Układ jest czasowo-niezmienniczy, jeśli

$$y(t) = Lu(t) \implies y(t - \tau) = Lu(t - \tau)$$

- Odpowiedzią impulsową układu nazywamy odpowiedź  $h(t)$  na sygnał impulsowy  $\delta(t)$ , tzn.  $h(t) = L\delta(t)$ .
- Układ liniowy jest przyczynowy (stabilny) jeśli odpowiedź impulsowa  $h(t)$  jest przyczynowa (stabilna).





- Tw. Dowolny sygnał ciągły można zapisać jako superpozycję impulsów

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$$

- Tw. Dowolny sygnał ciągły można zapisać jako superpozycję impulsów

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$$

- Wówczas

$$\begin{aligned} y(t) &= Lu(t) = L \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)L\delta(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t - \tau)d\tau = (u * h)(t) \end{aligned}$$

- Tw. Dowolny sygnał ciągły można zapisać jako superpozycję impulsów

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$$

- Wówczas

$$\begin{aligned}y(t) &= Lu(t) = L \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)L\delta(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t - \tau)d\tau = (u * h)(t)\end{aligned}$$

- Znając odpowiedź impulsową układu można znaleźć odpowiedź na dowolny inny sygnał  $u(t)$ !

**Przykład:** Pokazać, że jeśli  $u(t) = e^{i\omega t}$ , to  $y(t) = \hat{h}(\omega)e^{i\omega t}$ , tzn. odpowiedź na sygnał harmoniczny jest sygnałem harmonicznym o modulowanej amplitudzie.  $\hat{h}(\omega)$  jest gęstością spektralną (transformatą Fouriera) odpowiedzi impulsowej.

**Przykład:** Pokazać, że jeśli  $u(t) = e^{i\omega t}$ , to  $y(t) = \hat{h}(\omega)e^{i\omega t}$ , tzn. odpowiedź na sygnał harmoniczny jest sygnałem harmonicznym o modulowanej amplitudzie.  $\hat{h}(\omega)$  jest gęstością spektralną (transformatą Fouriera) odpowiedzi impulsowej.

**Twierdzenie o gęstości spektralnej sygnału wyjściowego**

Jeśli  $u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{u}(\omega)$ ,  $y(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{y}(\omega)$  oraz  $h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{h}(\omega)$ , to

$$\hat{y}(\omega) = \hat{h}(\omega)\hat{u}(\omega)$$

$\hat{h}(\omega)$  nazywa się *gęstością spektralną (widmem) odpowiedzi impulsowej*

# Jak określić działanie układu liniowego?

# Jak określić działanie układu liniowego?

Sposoby zadania układu liniowego czasowo-niezmienniczego:

- 1 jawny przepis na odpowiedź  $y(t)$ , np.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

$h(t)$  jest wówczas odpowiedzią impulsową.

Sposoby zadania układu liniowego czasowo-niezmienniczego:

- 1 jawny przepis na odpowiedź  $y(t)$ , np.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

$h(t)$  jest wówczas odpowiedzią impulsową.

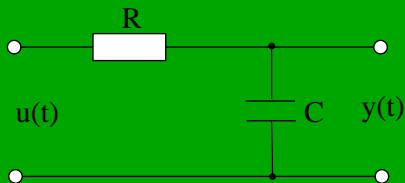
- 2 jawna postać gęstości spektralnej odpowiedzi impulsowej  $\hat{h}(\omega)$ , wówczas

$$\hat{y}(\omega) = \hat{h}(\omega)\hat{u}(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} y(t)$$

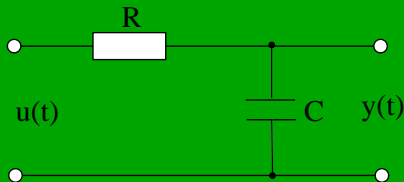
- 3 w sposób niejawny używając równania różniczkowego wiążącego sygnały wejściowy i wyjściowy.



Przykład: Mamy układ RC z następującymi odprowadzeniami



Przykład: Mamy układ RC z następującymi odprowadzeniami



- 1 Pokazać, że sygnał wyjściowy (napięcie na kondensatorze) łączy z napięciem wejściowym równanie różniczkowe

$$\dot{y} + \frac{1}{RC}y = \frac{1}{RC}u$$

- 2 Znaleźć gęstość spektralną odpowiedzi impulsowej  $\hat{h}(\omega)$
- 3 Znaleźć odpowiedź impulsową wykorzystując wzór

$$e^{-at}H(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{a + i\omega}$$

## Przykład:

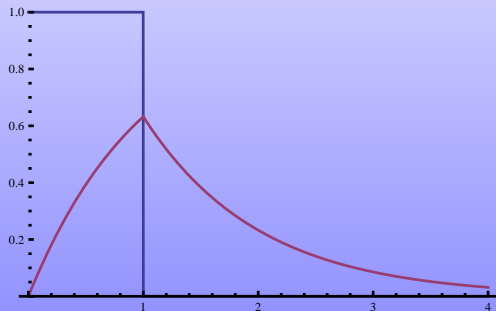
- 1 Znaleźć odpowiedź układu na prostokątny sygnał

$$u(t) = \begin{cases} u_0 & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t > T \text{ lub } t < 0 \end{cases}$$

## Przykład:

- 4 Znaleźć odpowiedź układu na prostokątny sygnał

$$u(t) = \begin{cases} u_0 & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t > T \text{ lub } t < 0 \end{cases}$$



**Przykład:** Pewien układ liniowy RC dany jest równaniem różniczkowym

$$RC\dot{y} + y = -RC\dot{u} + u$$

- 1 Znaleźć gęstość spektralną odpowiedzi impulsowej

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1 - i\omega RC}{1 + i\omega RC}$$

- 2 Znaleźć odpowiedź impulsową

$$h(t) = \frac{2}{RC} e^{-t/RC} H(t) - \delta(t)$$



- Def. Dla funkcji (sygnału)  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$  definiujemy jej transformatę Laplace'a jako

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) \equiv \mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

określoną na obszarze bezwzględnej zbieżności całki.

- Def. Dla funkcji (sygnału)  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$  definiujemy jej transformatę Laplace'a jako

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) \equiv \mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

określoną na obszarze bezwzględnej zbieżności całki.

- Rodzaj się pytania:
  - Jakie warunki musi spełniać funkcja  $f$ , aby jej transformata istniała (całka niewłaściwa była zbieżna)?
  - Czy istnieje transformata odwrotna, tzn. czy ze znajomości  $F(s)$  można odtworzyć funkcję  $f(t)$  na  $[0, +\infty]$ ?



- Def. Dla funkcji (sygnału)  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$  definiujemy jej transformatę Laplace'a jako

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) \equiv \mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

określoną na obszarze bezwzględnej zbieżności całki.

- Rodzą się pytania:
  - 1 Jakie warunki musi spełniać funkcja  $f$ , aby jej transformata istniała (całka niewłaściwa była zbieżna)?
  - 2 Czy istnieje transformata odwrotna, tzn. czy ze znajomości  $F(s)$  można odtworzyć funkcję  $f(t)$  na  $[0, +\infty)$ ?

**Przykład:** Transformata Laplace'a nie musi być zbieżna na całej płaszczyźnie zespolonej!

$$H(t) \equiv 1 \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} \quad \text{o ile} \quad \operatorname{Re} s > 0$$



- Def. Oryginałem nazywamy funkcję  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$  kawałkami ciągłą spełniającą warunek

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \exists M > 0 \quad |f(t)| \leq M e^{\alpha t}$$

np. dla  $f(t) = 1$ ,  $M = 1$ ,  $\alpha \geq 0$ .

- Def. Oryginałem nazywamy funkcję  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$  kawałkami ciągłą spełniającą warunek

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \exists M > 0 \quad |f(t)| \leq M e^{\alpha t}$$

np. dla  $f(t) = 1$ ,  $M = 1$ ,  $\alpha \geq 0$ .

- Def. Oryginałem nazywamy funkcję  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$  kawałkami ciągłą spełniającą warunek

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \exists M > 0 \quad |f(t)| \leq M e^{\alpha t}$$

np. dla  $f(t) = 1$ ,  $M = 1$ ,  $\alpha \geq 0$ .

## Twierdzenie o zbieżności transformaty Laplace'a

Niech  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$  będzie oryginałem z  $\alpha < \infty$ . Wówczas transformata Laplace'a jest zbieżna na obszarze  $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \alpha\}$ .

- Def. Oryginałem nazywamy funkcję  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$  kawałkami ciągłą spełniającą warunek

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \exists M > 0 \quad |f(t)| \leq M e^{\alpha t}$$

np. dla  $f(t) = 1$ ,  $M = 1$ ,  $\alpha \geq 0$ .

## Twierdzenie o zbieżności transformaty Laplace'a

Niech  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$  będzie oryginałem z  $\alpha < \infty$ . Wówczas transformata Laplace'a jest zbieżna na obszarze  $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \alpha\}$ .

Przykład:

$$f(t) = 1 \quad M = 1 \text{ oraz } \alpha = 0$$

$$f(t) = e^t \quad M = 1 \text{ oraz } \alpha = 1$$

$$f(t) = e^{at} \quad M = 1 \text{ oraz } \alpha = a$$

$$f(t) = A \sin \omega_0 t \quad M = A \text{ oraz } \alpha = 0$$

$$f(t) = e^{-t^2} \quad M = 1 \text{ oraz } \alpha = 0$$

$$f(t) = e^{t^2} \quad \text{nie jest oryginałem}$$



## Własności transformaty Laplace'a

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) \text{ na obszarze } \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \rho\}$$



## Własności transformaty Laplace'a

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) \text{ na obszarze } \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \rho\}$$

- liniowość:  $\alpha f(t) + \beta g(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \alpha F(s) + \beta G(s)$

## Własności transformaty Laplace'a

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) \text{ na obszarze } \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \rho\}$$

- liniowość:  $\alpha f(t) + \beta g(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \alpha F(s) + \beta G(s)$
- przesunięcie w czasie:  $f(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-st_0} F(s)$  na obszarze  $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \rho\}$

# Własności transformaty Laplace'a

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) \text{ na obszarze } \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \rho\}$$

- liniowość:  $\alpha f(t) + \beta g(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \alpha F(s) + \beta G(s)$
- przesunięcie w czasie:  $f(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-st_0} F(s)$  na obszarze  $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \rho\}$
- przesunięcie w zmiennej transformaty o  $a \in \mathbb{C}$ :  $e^{at} f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s - a)$  na obszarze  $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \rho + \operatorname{Re} a\}$

# Własności transformaty Laplace'a

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) \text{ na obszarze } \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \rho\}$$

- liniowość:  $\alpha f(t) + \beta g(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \alpha F(s) + \beta G(s)$
- przesunięcie w czasie:  $f(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-st_0} F(s)$  na obszarze  $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \rho\}$
- przesunięcie w zmiennej transformaty o  $a \in \mathbb{C}$ :  $e^{at} f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s - a)$  na obszarze  $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \rho + \operatorname{Re} a\}$
- skalowanie o  $a > 0$ :  $f(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} a^{-1} F(s/a)$  na obszarze  $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > a\rho\}$

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) \text{ na obszarze } \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \rho\}$$

- liniowość:  $\alpha f(t) + \beta g(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \alpha F(s) + \beta G(s)$
- przesunięcie w czasie:  $f(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-st_0} F(s)$  na obszarze  $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \rho\}$
- przesunięcie w zmiennej transformaty o  $a \in \mathbb{C}$ :  $e^{at} f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s - a)$  na obszarze  $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \rho + \operatorname{Re} a\}$
- skalowanie o  $a > 0$ :  $f(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} a^{-1} F(s/a)$  na obszarze  $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > a\rho\}$
- transformata pochodnej:  $f'(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} sF(s) - f(0+)$  na obszarze  $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \rho\}$

# Własności transformaty Laplace'a

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) \text{ na obszarze } \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \rho\}$$

- liniowość:  $\alpha f(t) + \beta g(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \alpha F(s) + \beta G(s)$
- przesunięcie w czasie:  $f(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-st_0} F(s)$  na obszarze  $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \rho\}$
- przesunięcie w zmiennej transformaty o  $a \in \mathbb{C}$ :  $e^{at} f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s - a)$  na obszarze  $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \rho + \operatorname{Re} a\}$
- skalowanie o  $a > 0$ :  $f(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} a^{-1} F(s/a)$  na obszarze  $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > a\rho\}$
- transformata pochodnej:  $f'(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} sF(s) - f(0+)$  na obszarze  $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \rho\}$
- poprzednią własność można kontynuować:

$$f''(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^2 F(s) - sf(0+) - f'(0+)$$

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) \text{ na obszarze } \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \rho\}$$

- liniowość:  $\alpha f(t) + \beta g(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \alpha F(s) + \beta G(s)$
- przesunięcie w czasie:  $f(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-st_0} F(s)$  na obszarze  $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \rho\}$
- przesunięcie w zmiennej transformaty o  $a \in \mathbb{C}$ :  $e^{at} f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s - a)$  na obszarze  $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \rho + \operatorname{Re} a\}$
- skalowanie o  $a > 0$ :  $f(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} a^{-1} F(s/a)$  na obszarze  $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > a\rho\}$
- transformata pochodnej:  $f'(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} sF(s) - f(0+)$  na obszarze  $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \rho\}$
- poprzednią własność można kontynuować:

$$f''(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^2 F(s) - sf(0+) - f'(0+)$$

- pochodna transformaty:  $-tf(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F'(s)$  na obszarze  $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \rho\}$

# Własności transformaty Laplace'a

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) \text{ na obszarze } \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \rho\}$$

- liniowość:  $\alpha f(t) + \beta g(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \alpha F(s) + \beta G(s)$
- przesunięcie w czasie:  $f(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-st_0} F(s)$  na obszarze  $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \rho\}$
- przesunięcie w zmiennej transformaty o  $a \in \mathbb{C}$ :  $e^{at} f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s - a)$  na obszarze  $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \rho + \operatorname{Re} a\}$
- skalowanie o  $a > 0$ :  $f(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} a^{-1} F(s/a)$  na obszarze  $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > a\rho\}$
- transformata pochodnej:  $f'(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} sF(s) - f(0+)$  na obszarze  $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \rho\}$
- poprzednią własność można kontynuować:

$$f''(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^2 F(s) - sf(0+) - f'(0+)$$

- pochodna transformaty:  $-tf(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F'(s)$  na obszarze  $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \rho\}$
- transformata splotu:  $(f * g)(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)G(s)$



# Tabela transformat Laplace'a

# Tabela transformat Laplace'a

sygnał	transformata	warunki
1	$\frac{1}{s}$	$\operatorname{Re} s > 0$
$e^{at}$	$\frac{1}{s - a}$	$\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\operatorname{Re} s > 0$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\operatorname{Re} s > 0$
$\sinh(bt)$	$\frac{b}{s^2 - b^2}$	$\operatorname{Re} s > b > 0$
$\cosh(bt)$	$\frac{s}{s^2 - b^2}$	$\operatorname{Re} s > b > 0$
$e^{at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s - a)^2 + \omega^2}$	$\operatorname{Re} s > a$
$e^{at} \cos(\omega t)$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 + \omega^2}$	$\operatorname{Re} s > a$

# Tabela transformat Laplace'a

# Tabela transformat Laplace'a

sygnał	transformata	warunki
$te^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^2}$	$\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\operatorname{Re} s > 0$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$
$t \sin(\omega t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\operatorname{Re} s > 0$
$t \cos(\omega t)$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\operatorname{Re} s > 0$

# Wyznaczanie transformaty odwrotnej dla ilorazu wielomianów

- Niech

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}, \quad \text{st } P < \text{st } Q$$

oraz  $Q(s) = a(s - a_1)^{k_1}(s - a_2)^{k_2} \cdots (s - a_n)^{k_n}$ , gdzie  $a_i \in \mathbb{C}$

- Niech

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}, \quad \text{st } P < \text{st } Q$$

oraz  $Q(s) = a(s - a_1)^{k_1}(s - a_2)^{k_2} \dots (s - a_n)^{k_n}$ , gdzie  $a_i \in \mathbb{C}$

- rozkład na ułamki proste: Każdemu czynnikowi  $(s - a_i)^{k_i}$  odpowiada suma ułamków prostych

$$\frac{A_1}{s - a_i} + \frac{A_2}{(s - a_i)^2} + \dots + \frac{A_{k_i}}{(s - a_i)^{k_i}}$$

- Niech

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}, \quad \text{st } P < \text{st } Q$$

oraz  $Q(s) = a(s - a_1)^{k_1}(s - a_2)^{k_2} \dots (s - a_n)^{k_n}$ , gdzie  $a_i \in \mathbb{C}$

- rozkład na ułamki proste: Każdemu czynnikowi  $(s - a_i)^{k_i}$  odpowiada suma ułamków prostych

$$\frac{A_1}{s - a_i} + \frac{A_2}{(s - a_i)^2} + \dots + \frac{A_{k_i}}{(s - a_i)^{k_i}}$$

- transformata odwrotna ułamka prostego

$$\frac{A}{(s - a)^k} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{A}{(k - 1)!} t^{k-1} e^{at}$$



- Niech

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}, \quad \text{st } P < \text{st } Q$$

oraz  $Q(s) = a(s - a_1)^{k_1}(s - a_2)^{k_2} \dots (s - a_n)^{k_n}$ , gdzie  $a_i \in \mathbb{C}$

- rozkład na ułamki proste: Każdemu czynnikowi  $(s - a_i)^{k_i}$  odpowiada suma ułamków prostych

$$\frac{A_1}{s - a_i} + \frac{A_2}{(s - a_i)^2} + \dots + \frac{A_{k_i}}{(s - a_i)^{k_i}}$$

- transformata odwrotna ułamka prostego

$$\frac{A}{(s - a)^k} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{A}{(k - 1)!} t^{k-1} e^{at}$$

- Niekiedy wygodniej jest zastosować *inny* rozkład ilorazu wielomianów niż ten na ułamki proste! Wykorzystanie wzorów z tabeli!



## Twierdzenie: Rozwinięcie Heaviside'a

Niech

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}, \quad \text{st } P < \text{st } Q$$

oraz  $Q(s)$  ma tylko pierwiastki *proste* (jednokrotne)  $a_1, \dots, a_n$ , tzn.  $Q(s) = a(s - a_1)(s - a_2) \cdots (s - a_n)$ , gdzie  $a_i \in \mathbb{C}$ ,

## Twierdzenie: Rozwinięcie Heaviside'a

Niech

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}, \quad \text{st } P < \text{st } Q$$

oraz  $Q(s)$  ma tylko pierwiastki *proste* (jednokrotne)  $a_1, \dots, a_n$ , tzn.  $Q(s) = a(s - a_1)(s - a_2) \cdots (s - a_n)$ , gdzie  $a_i \in \mathbb{C}$ , wówczas

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)} e^{a_k t}$$

Przykład:

$$\widehat{F}(s) = \frac{6s}{(s^2 - 1)(s^2 - 4)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-2t} - e^{-t} - e^t + e^{2t}$$



Przykład:

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{s + 1} - \frac{1}{s + 2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-t} - e^{-2t}$$

$$F(s) = \frac{1}{s^3 + 4s^2 + 3s} = \frac{1}{3s} + \frac{1}{6(s + 3)} - \frac{1}{2(s + 1)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{3} + \frac{1}{6}e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-t}$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 17} = \frac{1}{4} \frac{4}{(s - 1)^2 + 4^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{4}e^t \sin(4t)$$

$$F(s) = \frac{2s + 5}{s^2 + 9} = 2 \frac{s}{s^2 + 9} + \frac{5}{3} \frac{3}{s^2 + 9} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} 2 \cos 3t + \frac{5}{3} \sin 3t$$

$$F(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 2} = \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 1} + \frac{1}{(s + 1)^2 + 1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-t}(\cos t + \sin t)$$



- Liniowe równanie różniczkowe rzędu  $n$  o stałych współczynnikach

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(t), \quad a_i \in \mathbb{C}$$

z warunkami początkowymi  $y^{(k)}(0) = y_{0k}, k = 0, \dots, n - 1$ .



- Liniowe równanie różniczkowe rzędu  $n$  o stałych współczynnikach

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(t), \quad a_i \in \mathbb{C}$$

z warunkami początkowymi  $y^{(k)}(0) = y_{0k}, k = 0, \dots, n - 1$ .

Przykład:

$$y' + 9y = 2 \sin 3x, \quad y(0) = y_0 \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} sY(s) - y_0 + 9Y(s) = 2 \frac{3}{s^2 + 9}$$

$$Y(s) = \frac{y_0}{s^2 + 9} + \frac{6}{(s + 9)(s^2 + 9)} = \frac{y_0}{s + 9} + \frac{-\frac{1}{15}s + \frac{3}{5}}{s^2 + 9} + \frac{\frac{1}{15}}{s + 9}$$

$$y(t) = \left(y_0 + \frac{1}{15}\right) e^{-9t} - \frac{1}{15} \cos 3t + \frac{1}{5} \sin 3t$$

- Liniowe równanie różniczkowe rzędu  $n$  o stałych współczynnikach

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(t), \quad a_i \in \mathbb{C}$$

z warunkami początkowymi  $y^{(k)}(0) = y_{0k}, k = 0, \dots, n - 1$ .

**Przykład:**

$$y' + 9y = 2 \sin 3x, \quad y(0) = y_0 \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} sY(s) - y_0 + 9Y(s) = 2 \frac{3}{s^2 + 9}$$

$$Y(s) = \frac{y_0}{s^2 + 9} + \frac{6}{(s + 9)(s^2 + 9)} = \frac{y_0}{s + 9} + \frac{-\frac{1}{15}s + \frac{3}{5}}{s^2 + 9} + \frac{\frac{1}{15}}{s + 9}$$

$$y(t) = \left(y_0 + \frac{1}{15}\right) e^{-9t} - \frac{1}{15} \cos 3t + \frac{1}{5} \sin 3t$$

**Przykład:** Równanie różniczkowe 1-rzędu

$$y' + ay = f(t), \quad y(0) = y_0$$

ma rozwiązanie  $y(t) = y_0 e^{-at} + e^{-at} \int_0^t f(x) e^{ax} dx$



Przykład: Równanie II rzędu

$$y'' - a^2 y = e^{bt}, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

Przykład: Równanie II rzędu

$$y'' - a^2 y = e^{bt}, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

Przykład: Układy równań różniczkowych

$$1) \quad \begin{cases} x' - y' = x + y + t \\ x' + y' = x - y + e^t \end{cases}, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0$$

Przykład: Równanie II rzędu

$$y'' - a^2 y = e^{bt}, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

Przykład: Układy równań różniczkowych

$$1) \quad \begin{cases} x' - y' = x + y + t \\ x' + y' = x - y + e^t, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0$$

$$x(t) = \frac{1}{2}(t+1)(e^t - 1), \quad y(t) = \frac{1}{4}(e^t - 3e^{-t} - 2t + 2)$$

**Przykład:** Równanie II rzędu

$$y'' - a^2 y = e^{bt}, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

**Przykład:** Układy równań różniczkowych

$$1) \quad \begin{cases} x' - y' = x + y + t \\ x' + y' = x - y + e^t \end{cases}, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0$$

$$x(t) = \frac{1}{2}(t+1)(e^t - 1), \quad y(t) = \frac{1}{4}(e^t - 3e^{-t} - 2t + 2)$$

$$2) \quad \begin{cases} x' = y \\ y' = z \\ z' = x \end{cases}, \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0$$





## Twierdzenie o transformacie Laplace'a sygnału wyjściowego

Jeśli  $u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s)$ ,  $y(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y(s)$  oraz  $h(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} H(s)$ , to

$$Y(s) = H(s) \cdot U(s)$$

$H(s)$  nazywa się *funkcją przejścia* (transmitancją)

## Twierdzenie o transformacie Laplace'a sygnału wyjściowego

Jeśli  $u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s)$ ,  $y(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y(s)$  oraz  $h(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} H(s)$ , to

$$Y(s) = H(s) \cdot U(s)$$

$H(s)$  nazywa się *funkcją przejścia* (transmitancją)

- Jeśli znana jest funkcja przejścia  $H(s)$ , wówczas

$$Y(s) = H(s)U(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t)$$

# Układ opisany równaniem różniczkowym

- Def. Układ jest zadany przez równanie różniczkowe, jeśli

$$R_n y(t) = R_m u(t)$$

gdzie  $R_n$  jest operatorem różniczkowym rzędu  $n$  postaci

$$R_n = a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0$$

- Def. Układ jest zadany przez równanie różniczkowe, jeśli

$$R_n y(t) = R_m u(t)$$

gdzie  $R_n$  jest operatorem różniczkowym rzędu  $n$  postaci

$$R_n = a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0$$

- Układ jest liniowy, jeśli warunki początkowe na sygnał  $y(t)$  są postaci

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0$$

- Def. Układ jest zadany przez równanie różniczkowe, jeśli

$$R_n y(t) = R_m u(t)$$

gdzie  $R_n$  jest operatorem różniczkowym rzędu  $n$  postaci

$$R_n = a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0$$

- Układ jest liniowy, jeśli warunki początkowe na sygnał  $y(t)$  są postaci

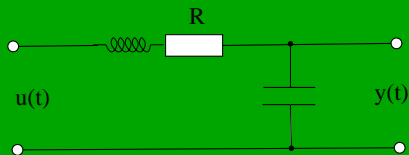
$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0$$

- Jeśli układ liniowy opisany jest równaniem różniczkowym  $R_n y(t) = R_m u(t)$ , to funkcja przejścia

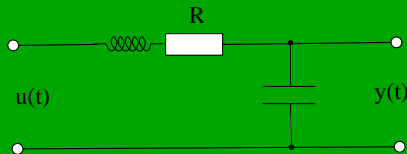
$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

gdzie  $A$  i  $B$  są wielomianami zmiennej zespolonej.

Przykład: Mamy układ RLC z następującymi odprowadzeniami



**Przykład:** Mamy układ RLC z następującymi odprowadzeniami



- 1 Pokazać, że sygnał wyjściowy (napięcie na kondensatorze) łączy z napięciem wejściowym równanie różniczkowe

$$\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 u$$

gdzie

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad 2\gamma = \frac{R}{L}$$

- 2 Pokazać, że funkcja przejścia ma postać

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\gamma s + \omega_0^2} = \frac{\omega_0^2}{(s + \gamma)^2 + \omega_0^2 - \gamma^2}$$



## Przykład:

3 Znaleźć odpowiedź impulsową układu w trzech przypadkach

- słabego tłumienia  $\Omega^2 \equiv \omega_0^2 - \gamma^2 > 0$

$$h(t) = \frac{\omega_0^2}{\Omega} e^{-\gamma t} \sin(\Omega t)$$

- dużego tłumienia  $b^2 = \gamma^2 - \omega_0^2 > 0$

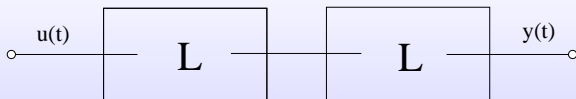
$$h(t) = \frac{\omega_0^2}{b} e^{-\gamma t} \sinh(bt) = \frac{\omega_0^2}{2b} \left( e^{-(\gamma-b)t} - e^{-(\gamma+b)t} \right)$$

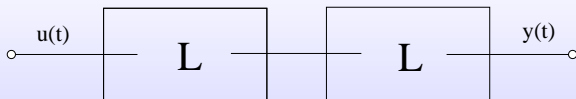
- $\omega_0^2 = \gamma^2$

$$h(t) = \gamma^2 t e^{-\gamma t}$$

4 Znaleźć odpowiedź układu na schodkowy sygnał  $u(t) = H(t - t_0)$

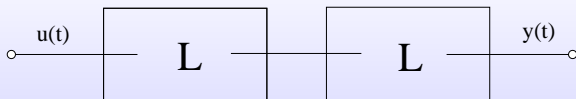
$$y(t) = \int_0^t u(\tau) h(t - \tau) d\tau$$





- Mamy  $y_1 = L_1 u = h_1 * u$ , zatem

$$y_n = L_n L_{n-1} \cdots L_1 u = h_n * h_{n-1} * \cdots * h_1 * u$$

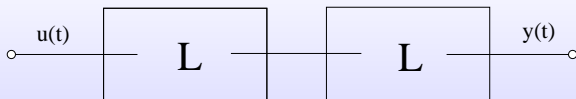


- Mamy  $y_1 = L_1 u = h_1 * u$ , zatem

$$y_n = L_n L_{n-1} \cdots L_1 u = h_n * h_{n-1} * \cdots * h_1 * u$$

- Na poziomie transformaty Laplace'a

$$Y_n(s) = H_1(s)H_2(s) \dots H_n(s)U(s)$$



- Mamy  $y_1 = L_1 u = h_1 * u$ , zatem

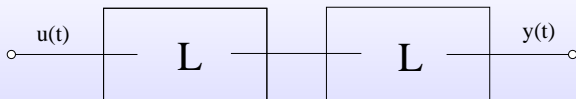
$$y_n = L_n L_{n-1} \cdots L_1 u = h_n * h_{n-1} * \cdots * h_1 * u$$

- Na poziomie transformaty Laplace'a

$$Y_n(s) = H_1(s)H_2(s) \dots H_n(s)U(s)$$

- Stąd funkcja przejścia przez łańcuch układów liniowych

$$H(s) = \frac{Y_n(s)}{U(s)} = H_1(s)H_2(s) \dots H_n(s)$$



- Mamy  $y_1 = L_1 u = h_1 * u$ , zatem

$$y_n = L_n L_{n-1} \cdots L_1 u = h_n * h_{n-1} * \cdots * h_1 * u$$

- Na poziomie transformaty Laplace'a

$$Y_n(s) = H_1(s)H_2(s) \dots H_n(s)U(s)$$

- Stąd funkcja przejścia przez łańcuch układów liniowych

$$H(s) = \frac{Y_n(s)}{U(s)} = H_1(s)H_2(s) \dots H_n(s)$$

- Odpowiedź impulsowa jest zatem jak zwykle

$$H(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h(t) = (h_1 * h_2 * \cdots * h_n)(t)$$



**Przykład:** Dwa połączone układy RC o różnych odpowiedziach impulsowych ( $R_1C_1 \neq R_2C_2$ )

$$h_k(t) = \frac{1}{R_k C_k} e^{-t/R_k C_k} H(t), \quad k = 1, 2$$

mają odpowiedź impulsową

$$h = (h_1 * h_2) = \frac{1}{(R_2 C_2)^{-1} - (R_1 C_1)^{-1}} ((R_2 C_2)^{-1} h_1 - (R_1 C_1)^{-1} h_2)$$



**Przykład:** Dwa połączone układy RC o różnych odpowiedziach impulsowych ( $R_1C_1 \neq R_2C_2$ )

$$h_k(t) = \frac{1}{R_k C_k} e^{-t/R_k C_k} H(t), \quad k = 1, 2$$

mają odpowiedź impulsową

$$h = (h_1 * h_2) = \frac{1}{(R_2 C_2)^{-1} - (R_1 C_1)^{-1}} ((R_2 C_2)^{-1} h_1 - (R_1 C_1)^{-1} h_2)$$

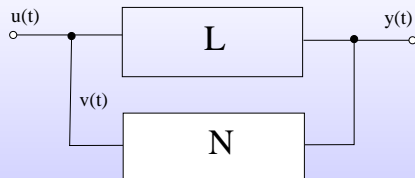
**Przykład:**  $N$  połączonych układów RC o takich samych odpowiedziach impulsowych

$$h_0(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} H(t)$$

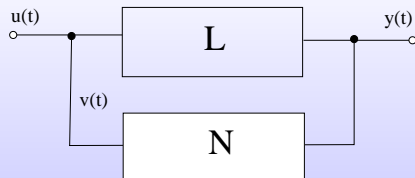
ma odpowiedź impulsową

$$h^{*N}(t) = (h_0 * h_0 * \dots * h_0)(t) = \frac{1}{(N-1)!} \frac{1}{(RC)^N} t^{N-1} e^{-t/RC} H(t)$$

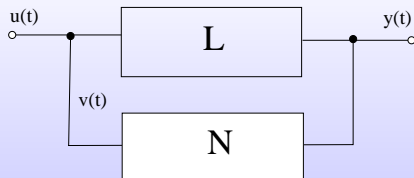
# Układ liniowy ze sprzężeniem zwrotnym



## Układ liniowy ze sprzężeniem zwrotnym



- Jeśli  $v = u + Ny = u + y * h_N$  oraz  $y = Lv = v * h_L$ , to  
$$y = L(u + Ny) = u * h_L + y * h_N * h_L$$



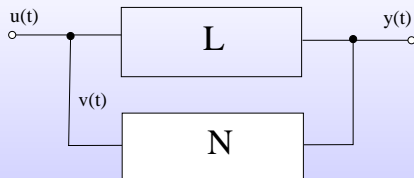
- Jeśli  $v = u + Ny = u + y * h_N$  oraz  $y = Lv = v * h_L$ , to

$$y = L(u + Ny) = u * h_L + y * h_N * h_L$$

- Na poziomie transformaty Laplace'a

$$Y(s) = U(s)H_L(s) + Y(s)H_N(s)H_L(s)$$

## Układ liniowy ze sprzężeniem zwrotnym



- Jeśli  $v = u + Ny = u + y * h_N$  oraz  $y = Lv = v * h_L$ , to

$$y = L(u + Ny) = u * h_L + y * h_N * h_L$$

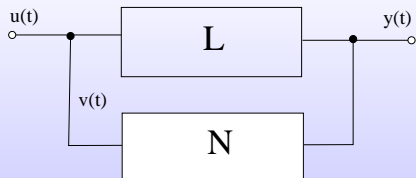
- Na poziomie transformaty Laplace'a

$$Y(s) = U(s)H_L(s) + Y(s)H_N(s)H_L(s)$$

- Stąd funkcja przejścia przez układ liniowy ze sprzężeniem zwrotnym

$$H_{LN}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{H_L(s)}{1 - H_N(s)H_L(s)}$$

## Układ liniowy ze sprzężeniem zwrotnym



- Jeśli  $v = u + Ny = u + y * h_N$  oraz  $y = Lv = v * h_L$ , to

$$y = L(u + Ny) = u * h_L + y * h_N * h_L$$

- Na poziomie transformaty Laplace'a

$$Y(s) = U(s)H_L(s) + Y(s)H_N(s)H_L(s)$$

- Stąd funkcja przejścia przez układ liniowy ze sprzężeniem zwrotnym

$$H_{LN}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{H_L(s)}{1 - H_N(s)H_L(s)}$$

- Odpowiedź impulsowa jest zatem jak zwykle  $H_{LN}(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h_{LN}(t)$



**Przykład:** Sprzężenie zwrotne (ujemne) układu RC ze wzmacniaczem o wzmocnieniu  $k < -1$

$$h_L(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} H(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} H_L(s) = \frac{1}{RCs + 1}$$

$$h_N(t) = k\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} H_N(s) = k$$

Wówczas

$$H_{LN}(s) = \frac{H_L(s)}{1 - H_N(s)H_L(s)} = \frac{1}{RC} \frac{1}{s + \frac{1-k}{RC}}$$

oraz

$$h_{LN}(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/\tau} H(t), \quad \tau = \frac{RC}{1-k}$$





- Transformata Fouriera umożliwia analizę widma sygnału (częstości wchodzących w jego skład)

- Transformata Fouriera umożliwia analizę widma sygnału (częstości wchodzących w jego skład)
- Sygnały periodyczne mają widmo dyskretne (wyrażone przez kombinację dystrybucji  $\delta$ -Diraca)

- Transformata Fouriera umożliwia analizę widma sygnału (częstości wchodzących w jego skład)
- Sygnały periodyczne mają widmo dyskretne (wyrażone przez kombinację dystrybucji  $\delta$ -Diraca)
- Sygnały ciągłe mają widmo (wysokie częstości wchodzą z coraz mniejszym wkładem)

- Transformata Fouriera umożliwia analizę widma sygnału (częstości wchodzących w jego skład)
- Sygnały periodyczne mają widmo dyskretne (wyrażone przez kombinację dystrybucji  $\delta$ -Diraca)
- Sygnały ciągłe mają widmo (wysokie częstości wchodzą z coraz mniejszym wkładem)
- Transformata Laplace'a umożliwia analizę większego zbioru sygnałów, ale nie prowadzi bezpośrednio do widma tego sygnału

- Transformata Fouriera umożliwia analizę widma sygnału (częstości wchodzących w jego skład)
- Sygnały periodyczne mają widmo dyskretne (wyrażone przez kombinację dystrybucji  $\delta$ -Diraca)
- Sygnały ciągłe mają widmo (wysokie częstości wchodzą z coraz mniejszym wkładem)
- Transformata Laplace'a umożliwia analizę większego zbioru sygnałów, ale nie prowadzi bezpośrednio do widma tego sygnału
- Transformata Laplace'a umożliwia rozwiązywanie równań różniczkowych z uwzględnieniem warunków początkowych

- Transformata Fouriera umożliwia analizę widma sygnału (częstości wchodzących w jego skład)
- Sygnały periodyczne mają widmo dyskretne (wyrażone przez kombinację dystrybucji  $\delta$ -Diraca)
- Sygnały ciągłe mają widmo (wysokie częstości wchodzą z coraz mniejszym wkładem)
- Transformata Laplace'a umożliwia analizę większego zbioru sygnałów, ale nie prowadzi bezpośrednio do widma tego sygnału
- Transformata Laplace'a umożliwia rozwiązywanie równań różniczkowych z uwzględnieniem warunków początkowych
- Obie transformaty umożliwiają badanie układów liniowych i wyznaczanie odpowiedzi układu na sygnał ciągły