Projekt: Równanie Malthusa

Zaimplementowany przeze mnie model Malthusa jest najprostszym przypadkiem modelu opisującego rozrost populacji.
Zakładam, że opisywana populacja ma w danym siedlisku bardzo dobre warunki rozwoju, nieograniczony dostęp do pożywienia itd.
Aby maksymalnie uprościć zakładam, że osobniki w danej populacji są rozłożone równomiernie w przestrzeni, tak aby móc analizować tylko zależność od czasu, pomijając zależność od przestrzeni.

Moja aplikacja rozwiązuje problem pierwotnej wartości nieliniowej równości różniczkowej pierwszego rzędu, który modeluje wzrost populacji organizmów o pewnej szybkości wzrostu i ilości osobników.

Równanie różniczkowe, które ma być rozwiązane, jest proste:

$$\boldsymbol{P'(t)} = \boldsymbol{rP(t)} \qquad \boldsymbol{P(t)} = \boldsymbol{P_0} \qquad \boldsymbol{2 < P_0 < N}$$

- P(t) – ilość osobników populacji w czasie t
- **r** – parametr rozrodczości (ilość urodzin nowych osobników w jednostce czasu, przy jednocześnie zerowej śmiertelności)
- **N** – maksymalna ilość osobników populacji dla danych ograniczeń, Ograniczeniami mogą być np.: określona ilość pożywienia, określona wielkość obszaru dla danej populacji

Warto zauważyć, że granica P (t) wynosi N.
W aplikacji przyjąłem, że r przyjmuje wartości od 0,1 do 0,9 w krokach 0,1 i N zmienia się od 25 do 100 w odstępach 25.
Równanie różniczkowe jest numerycznie rozwiązane przy pomocy algorytmu Rungego-Kutty czwartego rzędu:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{90}(7k_0 + 32k_2 + 12k_3 + 32k_4 + 7k_5)h$$

Gdzie:

k – wartość współczynników:

$$k_0 = hf(x_1, y_1)$$
$$k_1 = hf\left(\frac{x_1+h}{4,5}, y_1 + k_0\right)$$
$$k_2 = hf(\frac{x_1+h}{3}, \frac{k_0+k_1}{4})$$
$$k_3 = hf(\frac{x_1+h}{2}, \frac{y_1+k_0+3k_2}{8})$$
$$k_4 = hf(\frac{4(x_1+h)}{5}, \frac{y_1+53k_0-135k_1+126k_2+56k_3)}{125})$$
$$k_5 = hf(x_1 + h, \frac{y_1+133k_0-378k_1+276k_2+112k_3+25k_4}{168})$$

$$k_5 = hf(x_1 + h, \frac{y_1 + 133k_0 - 378k_1 + 276k_2 + 112k_3 + 25k_4}{168})$$

Dokładny opis:

Przyjmuję, że populacja jest jednorodna, składa się z genetycznie identycznych osobników rozmnażających się partenogenetycznie.
Osobnik rodzi się w pełni ukształtowany i zdolny do rozrodu.
Każdy osobnik wydaje potomstwo co **T** jednostek czasu, gdzie **T** jest ustalone i jednakowe dla wszystkich jednostek populacji.
Za każdym razem jeden osobnik ma **n** osobników potomnych.
Załóżmy zatem, że znamy liczebność **P(t)** w pewnej ustalonej chwili **t** i chcemy obliczyć **P(t+Δt)** po upływie czasu **Δt**.
Zauważmy, że w przedziale czasu **(t+Δt)** jest $\frac{\mathbf{\Delta t}}{\boldsymbol{T}}$ momentów rozmnażania.
Każdy rodzic ma w tym przedziale czasu średnio $\frac{\mathbf{\Delta t}}{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{n}$ potomków. Liczba osobników w chwili **t** wynosi **P(t),** w taki razie przyrost liczebności możemy przybliżyć równaniem:

$$\boldsymbol{P(t+\Delta t) - P(t) = \frac{\Delta t}{T} n P(t)}$$

Dzieląc stronami przez Δt i przechodząc do granicy otrzymamy:

$$\lim_{\boldsymbol{\Delta t \to 0}} \frac{\boldsymbol{N(t+\Delta t) - P(t)}}{\boldsymbol{\Delta t}} = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\boldsymbol{P(t)} = \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{P(t)}$$

Przyjmijmy oznaczenia $\frac{d}{dt}P(t) = P(t)$, $\frac{n}{T}r$ i przepiszmy równanie do postaci:

$$\boldsymbol{P'(t) = rP(t)}$$

Wnioski:

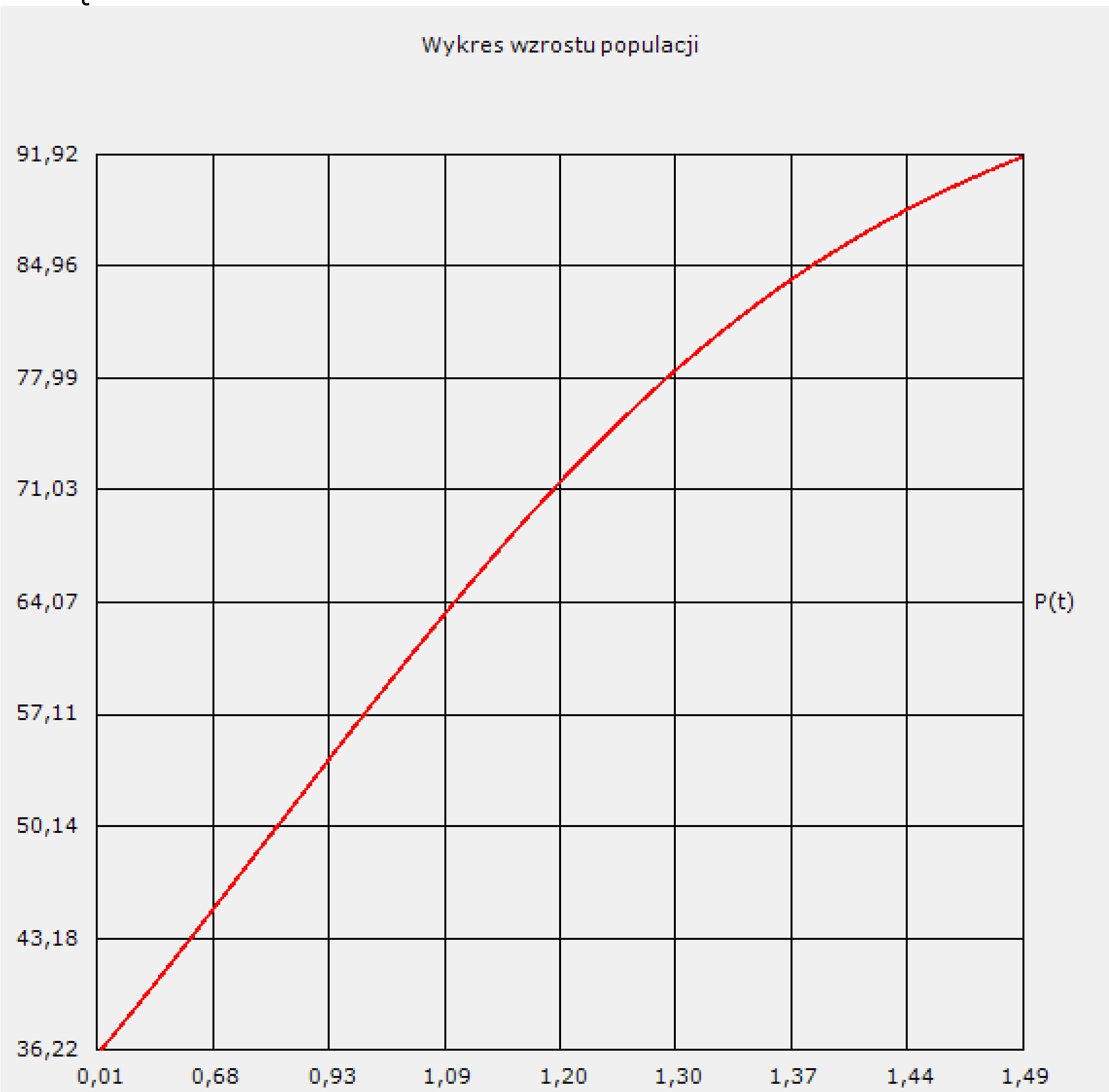
Zgodnie z modelem wykładniczego rozwoju pojedynczej populacji populacja, która nie ma przeszkód rozwija się ze wzrostem wykładniczym powodując coraz szybsze przybywanie nowych osobników.
Jednak taka tendencja nie trwa w nieskończoność.
Zakładając, że dane środowisko może pomieścić lub wyżywić ograniczoną do N ilość osobników gwałtowny wzrost populacji musi być zahamowany, gdy osiągnie ona liczbę osobników bliską N.
Tak dokładnie się dzieje, wzrost najpierw drastycznie maleje po czym praktycznie przechodzi w funkcję stałą utrzymując się na poziomie maksymalnej ilości osobników jaka może żyć w danym środowisku.

Założenia tego modelu można potwierdzić wykresem zależności ilości osobników od kolejnych populacji następujących po sobie. Wyliczenia, które posłużyły do jego nakreślenia jednoznacznie wykazują zależność:

$$\boldsymbol{2 < P_0 < N}$$

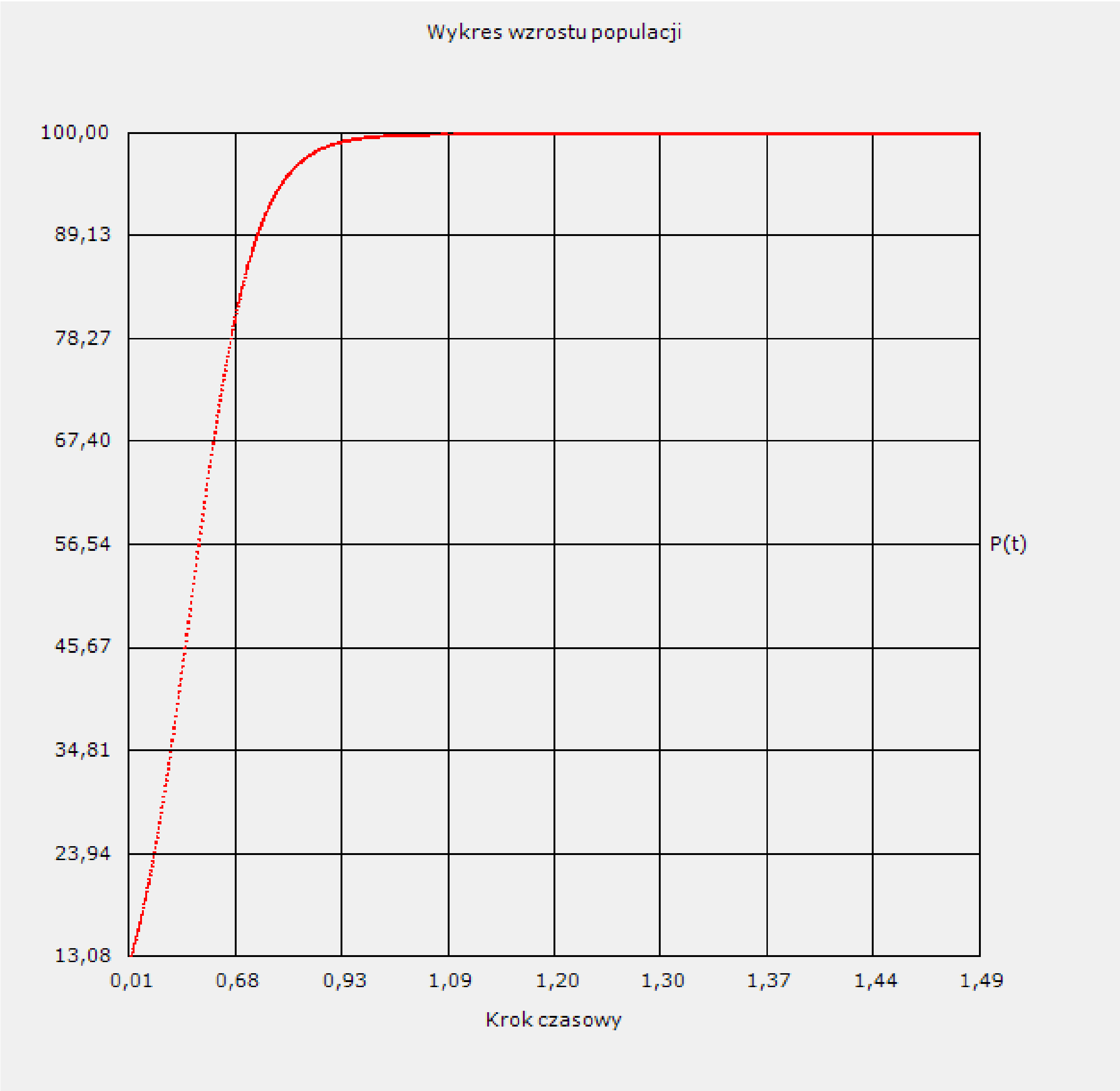
Populacja nie przekracza nigdy maksymalnej ilości dla danego środowiska.

Z wykresu możemy odczytać coraz szybszy wzrost populacji oraz moment czasu, w którym populacja osiąga maksimum dla środowiska i przestaje rosnąć.



Wykres 1. Wzrostu liczebności populacji w jednostkach czasu dla r=0,1 i N=100

Na wykresie widać jak populacja rośnie wykładniczo z postępem czasu, liczebność populacji rośnie zgodnie z niską wartością współczynnika rozrodności r.



Wykres 2. Wzrostu liczebności populacji w jednostkach czasu dla r=0,9 i N=100

Liczebność tej populacji rośnie zgodnie ze wzrostem wykładniczym dla największej możliwej wartości współczynnika rozrodności r. Jak widać w momencie osiągnięcia maksimum osobników N środowisko się nasyca i rozwój liczebności populacji jest gwałtownie zahamowany. Populacja nie ma możliwości dalszego rozwoju poprzez ograniczenie środowiska, którym może być np.: ograniczenie przestrzenne.