Fizyka w modelowaniu i symulacjach komputerowych
Jacek Matulewski (e-mail: jacek@fizyka.umk.pl)
http://www.fizyka.umk.pl/~jacek/dydaktyka/modsym/

Symulacje komputerowe

Dynamika bryły sztywnej

Wersja: 8 kwietnia 2010

Plan (1)

1. Bryła sztywna
2. Środek masy = punkt materialny
3. Kinematyka bryły sztywnej (prędkość kątowa)
4. Układy odniesienia w ruchu obrotowym
5. Równania ruchu bryły sztywnej, momenty pędu i siły
6. Tensor momentu bezwładności
7. Równania ruchu c.d. - macierz obrotu
8. Operator gwiazdki

Plan (2)

1. Kwaterniony lepsze od macierzy obrotu
2. Reprezentacje obrotów – porównanie

3. Wykrywanie zderzeń dowolnych brył, siatek (trójkąty)
4. Idee: otoczka wypukła, hierarchiczna dekompozycja
5. Obszary ograniczające: BS, AABB, OBB
6. Jak wykryć kolizję dwóch wypukłych brył sztywnych?
7. Wyznaczanie przekroju prostopadłościanów OBB
8. Metoda GJK

Koncepcja bryły sztywnej

- Ciała rozciągłe zbudowane z punktów materialnych (np. tkaninę lub sześcian) – odkształcenia, drgania

- Bryła sztywna = obiekt, który nie może zmieniać kształtu, zbiór punktów o stałych względnych położeniach

- Ruch postępowy i obroty!

- Implementacja w C++ i C# (zbiór brył sztywnych)

Środek masy

- Środek masy

$$\vec{R}_{\text{śm}} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i$$

- Prędkość środka masy

$$\vec{V}_{\text{śm}} = \dot{\vec{R}}_{\text{śm}} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{v}_i = \frac{1}{M}\sum_i \vec{p}_i$$

- Równanie ruchu (postępowego) środka masy:

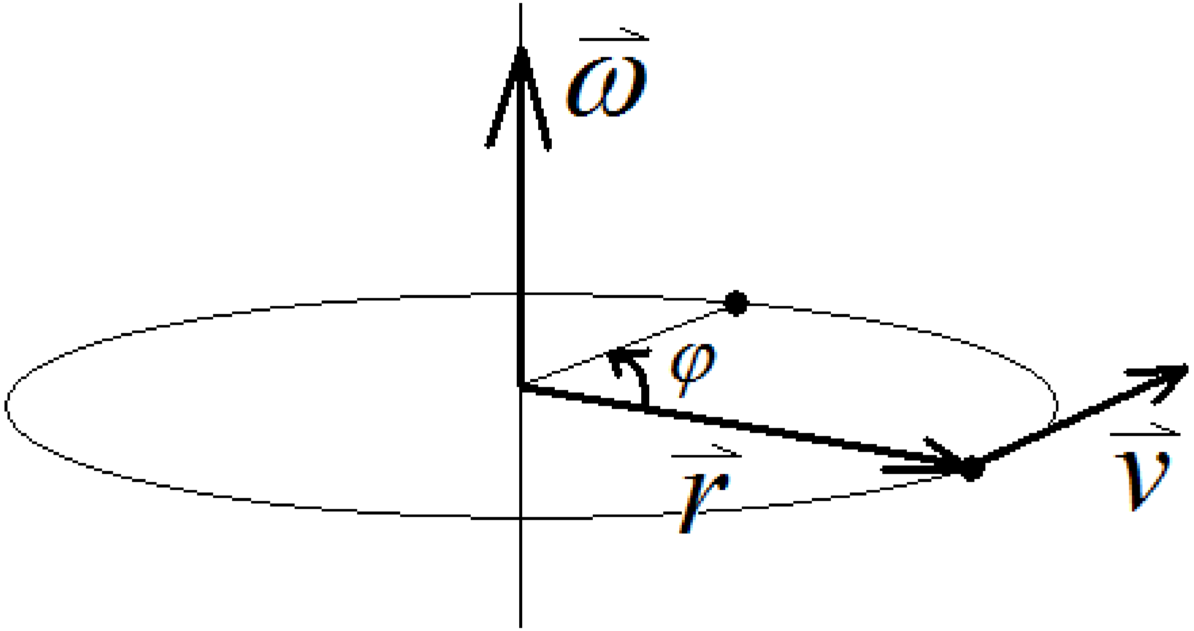
$$\dot{\vec{P}}_{\text{śm}} = M\ddot{\vec{R}}_{\text{śm}} = M\vec{A}_{\text{śm}} \qquad \vec{P}_{\text{śm}} = M\vec{V}_{\text{śm}} = \sum_i \vec{p}_i \qquad \dot{\vec{P}}_{\text{śm}} = \sum_i \dot{\vec{p}}_i = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{\text{śm}}$$

Środek masy

- Równania ruchu takie same jak dla punktu materialnego!
- Do opisu środka masy użyjemy gotowej klasy PunktMaterialny z jej metodami całkującymi równanie Newtona (algorytmy Eulera i Verleta)

Kinematyka bryły sztywnej

- Oznaczenia:



Kinematyka bryły sztywnej

- Wektor prędkości kołowej

- Rotujący układ odniesienia – pochodna wekt.

$$\left(\dot{\vec{b}}\right)_O = \left(\dot{\vec{b}}\right)_{O'} + \vec{w} \times \vec{b}\,'$$

O – układ laborateryjny (inercyjny)

wyprowadzenie – zadanie domowe

O' – układ obracający się z prędkością ω

- Przykład: prędkość liniowa:

$$\left(\dot{\vec{r}}\right)_O = \left(\dot{\vec{r}}'\right)_O + \left(\dot{\vec{r}}_0\right)_O = \left(\dot{\vec{r}}'\right)_{O'} + \vec{w} \times \vec{r}\,' + \left(\dot{\vec{r}}_0\right)_O$$

$$\vec{v}_O = \vec{v}_{O'} + \vec{w} \times \vec{r}\,' + \vec{v}_0$$

ruch względem O'

translacja układu odniesienia

Dynamika bryły sztywnej

- Do bryły sztywnej przykładamy zewnętrzną niezrównoważoną siłę.
- Efektem będzie ruch (postępowy środka masy + obroty)

- Opis obrotów bryły – pojęcie momentu pędu

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

Moment pędu

- Moment pędu:

przejście do układu nieobracającego się,
ale o początku związanym z bryłą sztywną
(ułatwia rozdzielenie ruchu śr. masy i obrotów)

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \{\vec{v}_i' + \vec{v}_0 + (\vec{\omega} \times \vec{r}_i{}')\} =$$

$$= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_0 + \sum_i m_i \vec{r}_i \times \{\vec{v}_i' + (\vec{\omega} \times \vec{r}_i{}')\}$$

$$= \boxed{M\vec{R}_{śm} \times \vec{v}_0 + \vec{r}_0 \times M\left(\vec{\omega} \times \vec{R}_{śm}'\right)} + \boxed{\sum_i m_i \vec{r}_i{}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i{}')}$$

$$\hat{I}\vec{\omega}(t)$$

- momentu bezwładności

Te wyrazy znikają, gdy układ O'
związany jest z bryłą sztywną

Moment bezwładności

- Moment pędu w układzie związanym z bryłą:

$$\vec{L} = \hat{I}\vec{\omega}$$

$$\boxed{\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})}$$

$$\vec{L} = \sum_i m_i\, \vec{r}_i{}' \times (\vec{\omega}\times\vec{r}_i{}') = \sum_i m_i \{\vec{\omega}(\vec{r}_i{}'\cdot\vec{r}_i{}') - \vec{r}_i{}'(\vec{r}_i{}'\cdot\vec{\omega})\}$$

- Obliczanie składowych momentu pędu:

$$L_x = \sum_i m_i \{\omega_x({r_i'}^2) - x_i'(x_i'\omega_x + y_i'\omega_y + z_i'\omega_z)\}$$

$$= \sum_i m_i \{({r_i'}^2 - {x_i'}^2)\omega_x - x_i'y_i'\omega_y - x_i'z_i'\omega_z\}$$

Tensor momentu bezwładności

- Zawiera całą informację o geometrii bryły (stały gdy obliczane w lokalnym układzie bryły)

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \iiint_V (y'^2 + z'^2)\, dV & -\iiint_V x'y'\, dV & -\iiint_V x'z'\, dV \\ -\iiint_V x'y'\, dV & \iiint_V (x'^2 + z'^2)\, dV & -\iiint_V y'z'\, dV \\ -\iiint_V x'z'\, dV & -\iiint_V x'z'\, dV & \iiint_V (x'^2 + y'^2)\, dV \end{pmatrix}$$

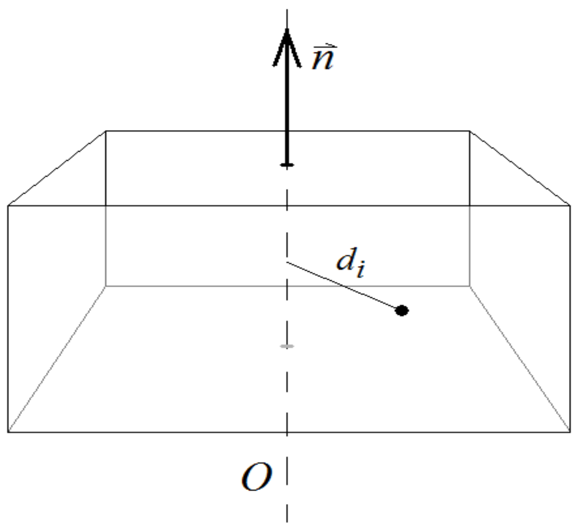
$$\begin{pmatrix} \sum_i m_i (y_i'^2 + z_i'^2) & -\sum_i m_i x_i' y_i' & -\sum_i m_i x_i' z_i' \\ -\sum_i m_i x_i' y_i' & \sum_i m_i (x_i'^2 + z_i'^2) & -\sum_i m_i y_i' z_i' \\ -\sum_i m_i x_i' z_i' & -\sum_i m_i y_i' z_i' & \sum_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2) \end{pmatrix}$$

- Prostopadłościan: $\hat{I} = \frac{M}{12} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$

wyprowadzenie – zadanie domowe

Tensor momentu bezwładności

- Obliczanie momentu bezwładności bryły



$$
\begin{aligned}
I_O \equiv I_{\vec{n}} &= \vec{n} \cdot \ddot{I}\vec{n} \\
&= \vec{n} \cdot \sum_i m_i \, \vec{r}_i{}' \times (\vec{n} \times \vec{r}_i{}') \\
&= \vec{n} \cdot \sum_i m_i \, \{\vec{n}(\vec{r}_i{}' \cdot \vec{r}_i{}') - \vec{r}_i{}'(\vec{r}_i{}' \cdot \vec{n})\} = \\
&= \sum_i m_i \, \{r_i'^2 - (\vec{r}_i{}' \cdot \vec{n})^2\} \\
&= \sum_i m_i \, d_i^2
\end{aligned}
$$

- Twierdzenie Steinera

$$I_O \equiv \sum_i m_i \, d_i^2 + M d^2$$

Dynamika bryły sztywnej

- Pochodna momentu pędu:

$$\dot{\vec{L}} = \sum_i \vec{r}_i{}' \times \dot{\vec{p}}_i' = \sum_i \vec{r}_i{}' \times m\dot{\vec{v}}_i' = \sum_i \vec{r}_i{}' \times m\vec{a}_i' = \sum_i \underbrace{\boxed{\vec{r}_i{}' \times \vec{F}_i}}_{\text{moment siły}} = \sum_i \vec{M}_i = \vec{M}$$

- Równanie ruchu obrotowego:

$$\vec{M}(t) = \dot{\vec{L}}(t) = \frac{d}{dt}\left(I(t)\vec{\omega}(t)\right)$$

- Moment bezwładności nie jest wielkością stałą jeżeli zmienia się oś obrotu!
- Duży koszt obliczeniowy

Dynamika bryły sztywnej

- Wygodniej byłoby używać stałego tensora
- Ruch obrotowy w układzie środka masy:

$$\vec{M}(t) = \dot{\vec{L}}(t) = \frac{d}{dt}(I(t)\vec{\omega}(t))$$

$$\dot{\vec{L}}(t) \equiv \left(\dot{\vec{L}}(t)\right)_O = \left(\dot{\vec{L}}(t)\right)_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{L}$$

$$\vec{M}(t) = \left(\dot{\vec{L}}(t)\right)_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \hat{I}\dot{\vec{\omega}}(t) + \vec{\omega} \times \hat{I}\vec{\omega}(t)$$

$$\boxed{\dot{\vec{\omega}}(t) = \hat{I}^{-1}\left(\vec{M}(t) - \vec{\omega} \times \hat{I}\vec{\omega}(t)\right)}$$

Moment bezwładności obliczany w układzie lokalnym (środka masy)

Równania ruchu

- Ruch postępowy środka masy

$$\boxed{\vec{F} = \dot{\vec{P}}_{\text{śm}} = M\ddot{\vec{R}}_{\text{śm}} = M\vec{A}_{\text{śm}}}$$

- Ruch obrotowy w układzie środka masy

$$\vec{M}(t) = \dot{\vec{L}}(t) = \frac{d}{dt}\left(I(t)\vec{\omega}(t)\right)$$

Moment bezwładności obliczany w układzie lokalnym (środka masy)

- Do implementacji: $\boxed{\dot{\vec{\omega}}(t) = \hat{I}^{-1}\left(\vec{M}(t) - \vec{\omega} \times \hat{I}\vec{\omega}(t)\right)}$

Równania ruchu

- Złożenie ruchu postępowego i obrotowego

- W układzie środka masy – tylko ruch obrotowy

Macierz obrotu

- Po scałkowaniu równań ruchu otrzymamy prędkość liniową i kołową.
  Jak znaleźć położenie i orientację ciała?

- Jak zapisać orientację ciała? Macierz obrotu ***R***

$$\hat{x}' = \boldsymbol{R}\hat{x} = \begin{pmatrix} R_{xx} & R_{xy} & R_{xz} \\ R_{yx} & R_{yy} & R_{yz} \\ R_{zx} & R_{zy} & R_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{xx} \\ R_{yx} \\ R_{zx} \end{pmatrix}$$

- Interpretacja kolumn macierzy obrotu

Macierz obrotu

- Pochodna wersora:

$$\dot{\hat{x}}'(t) = \vec{\omega}(t) \times \hat{x}'(t)$$

- Pochodna macierzy obrotu:

$$\dot{\boldsymbol{R}} = (\vec{\omega}(t) \times \hat{x}'(t), \quad \vec{\omega}(t) \times \hat{y}'(t), \quad \vec{\omega}(t) \times \hat{z}'(t)) =$$

$$= \left(\vec{\omega}(t) \times \begin{pmatrix} R_{xx} \\ R_{yx} \\ R_{zx} \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega}(t) \times \begin{pmatrix} R_{xy} \\ R_{yy} \\ R_{zy} \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega}(t) \times \begin{pmatrix} R_{xz} \\ R_{yz} \\ R_{zz} \end{pmatrix} \right)$$

$$= \vec{\omega}^*(t)\boldsymbol{R}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{xx} & R_{xy} & R_{xz} \\ R_{yx} & R_{yy} & R_{yz} \\ R_{zx} & R_{zy} & R_{zz} \end{pmatrix}$$

Operator gwiazdki

- Iloczyn wektorowy:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) - \vec{j}(a_x b_z - a_z b_x) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_x \\ b_z \end{pmatrix} = A\vec{b}$$

- Operator realizujący iloczyn wektorowy (zaleta: działa na macierze)

$$\vec{a}^* = A = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}$$

Równanie ruchu obrotowego

$$\dot{\vec{\omega}}(t) = \hat{I}^{-1}\left(\vec{M}(t) - \vec{\omega} \times \hat{I}\vec{\omega}(t)\right)$$

$$\boldsymbol{R}(t) = \vec{\omega}^{*}(t)\boldsymbol{R}(t)$$

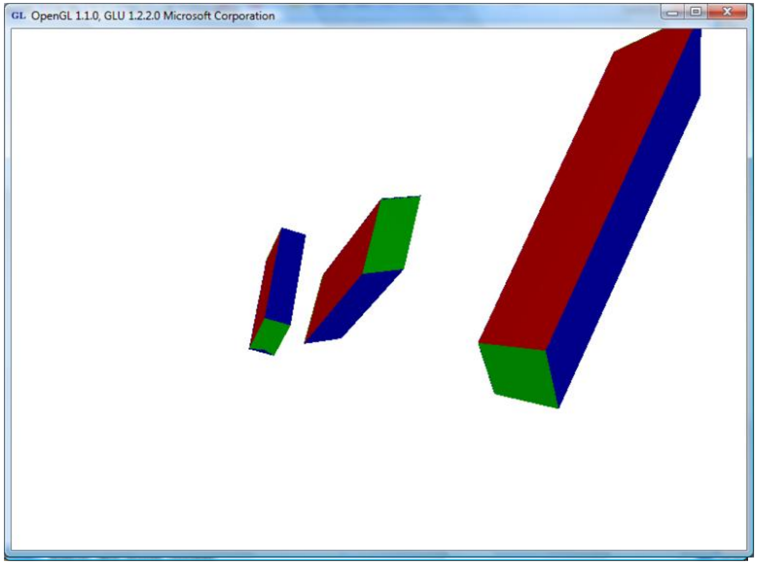
φ

Ruch liniowy i kołowy

Ruch postępowy punktu materialnego	**Ruch obrotowy bryły sztywnej**
Wektor przesunięcia: $\vec{r}(t)$	Kąt obrotu , wektor $\vec{\varphi}(t) = \varphi(t)\vec{n}$ (tylko gdy oś obrotu pozostaje nieruchoma) Macierz obrotu $\boldsymbol{R}$ Kwaternion $q(t)$
Prędkość: $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$	Prędkość kątowa: $\vec{\omega}(t) = \dot{\vec{\varphi}}(t)$ $\dot{\boldsymbol{R}} = \vec{\omega}(t)^{*}\boldsymbol{R}$
Przyspieszenie: $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$	Przyspieszenie kątowe: $\vec{\varepsilon}(t) = \dot{\vec{\omega}}(t) = \ddot{\vec{\varphi}}(t)$
Masa: m	Moment bezwładności $I \equiv I_{\vec{n}} = \vec{n} \cdot \hat{I}\vec{n}$
Siła: $\vec{F} = m\vec{a}$	Moment siły: $\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = I\vec{\varepsilon}$
Pęd: $\vec{p} = m\vec{v}$	Moment pędu: $\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \hat{I}\vec{\omega}$
Energia kinetyczna: $E_k = \frac{mv^2}{2}$	Energia kinetyczna: $E_k = \frac{I\omega^2}{2}$

Implementacja

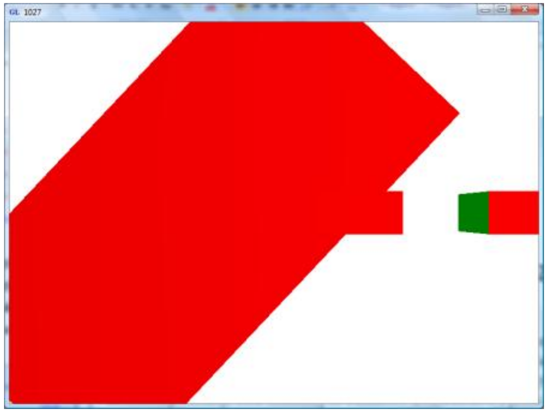
- Demonstracja kodu
- Zbiór swobodnych prostopadłościanów



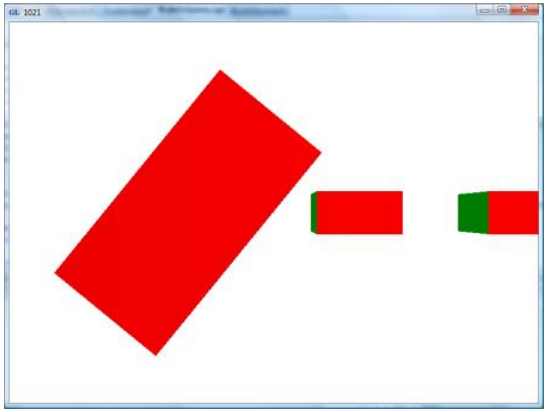
- Gdy moment sił = 0, rozbieżne po 1 000 iter.

Implementacja

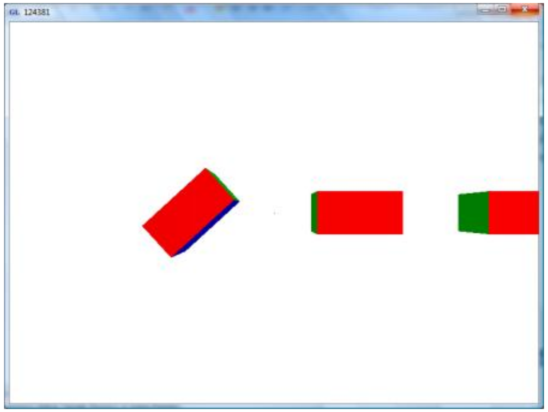
- Demonstracja c. d.
- Gdy przyłożony moment siły, szybka utrata dokładności (skalowanie, pochylenie)



Macierze obrotu
(jednostajne powiększenie)



Kwaterniony
(„oddychanie”)



Kwaterniony
z renormalizacją

Kwaterniony
szybkie powtórzenie

Kwaterniony

- Cztery pierwiastki -1:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$i \cdot j = -j \cdot i = k$$

$$j \cdot k = -k \cdot j = i$$

$$k \cdot i = -i \cdot k = j$$

- Zapis analogiczny do licz zespolonych:

$$q = w + ix + jy + kz = [w, x, y, z] = [s, \vec{v}]$$

- Dodawanie = dodawanie składowych
- Mnożenie – mieszanie składowych (nieprzemienne)

Kwaterniony

- Mnożenie (często używany wzór):

$$q_1 \cdot q_2 = [s_1 s_2 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2, \quad s_1 \vec{v}_2 + s_2 \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2] \neq q_2 \cdot q_1$$

- Sprzężenie kwaternionu: $q^* = [s, -\vec{v}] = w - ix - jy - kz$
- Kwaternion odwrotny: $q^{-1} = q^* / |q|^2$

- Kwaterniony to nie są rozszerzone wektory:

$$[0, \vec{v}] \cdot [0, \vec{v}] = [-\vec{v} \cdot \vec{v}, \vec{v} \times \vec{v}] = [-\vec{v}^2, 0]$$

Kwaterniony jednostkowe

- Kwaternion jednostkowy (norma = 1):

$$q = [s, \vec{v}] = \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{u}\right]$$

$$|q| = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{u}^2 = 1$$

- Kąt i oś obrotu:

$$\theta = 2\mathrm{acos}\,(s)$$

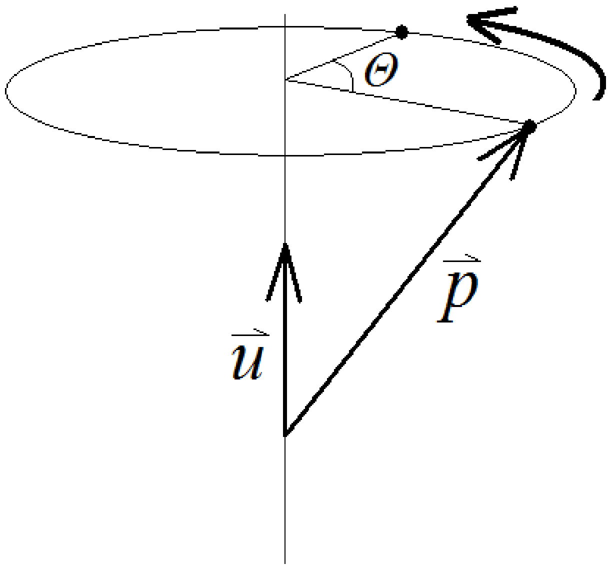
$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Kwaterniony jednostkowe

- Obracanie wektora:

$$q \cdot \vec{p} \cdot q^{-1} = \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{u}\right] \cdot [0, \vec{p}] \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{u}\right] =$$

$$= [0, \quad \vec{p}_{\parallel} + \cos(\theta)\vec{p}_{\perp} + \sin(\theta)\,\vec{u} \times \vec{p}_{\perp}]$$



$$\left[\cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{2}\right), \quad \sin\left(\frac{\theta + 2\pi}{2}\right)\vec{u}\right] =$$

$$\left[\cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right), \quad \sin\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)\vec{u}\right] =$$

$$\left[-\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{u}\right] = -q$$

Kwaterniony jednostkowe

- Kwaternion jednostkowy jest równoważny macierzy obrotu (ortonormalna):

$$q \cdot \vec{p} \cdot q^{-1} \qquad\qquad \boldsymbol{R}\vec{p}$$

- Konwersja kwaternionu na macierz (konieczna np. do OpenGL):

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1-2(y^2+z^2) & 2(xy-zw) & 2(xz+yw) \\ 2(xy+zw) & 1-2(x^2+z^2) & 2(yz-xw) \\ 2(xz-yw) & 2(yz+xw) & 1-2(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

Pochodna kwaternionu

- Chcemy za pomocą kwaternionów zapisać równanie ruchu

$$\frac{q(t_0 + \Delta t) - q(t_0)}{\Delta t}$$

$$q(t_0 + \Delta t) = \left[\cos\left(\frac{|\vec{\omega}(t_0)|\Delta t}{2}\right), \quad \sin\left(\frac{|\vec{\omega}(t_0)|\Delta t}{2}\right)\frac{\vec{\omega}(t_0)}{|\vec{\omega}(t_0)|}\right] \cdot q(t_0)$$

$$\dot{q}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(t_0 + \Delta t) - q(t_0)}{\Delta t} = \left[0, \tfrac{1}{2}\vec{\omega}(t_0)\right] \cdot q(t_0) = \frac{1}{2}\vec{\omega}(t_0) \cdot q(t_0)$$

$$\boxed{\dot{q}(t) = \frac{1}{2}\vec{\omega}(t) \cdot q(t)}$$

Nowe równanie ruchu równoważne macierzowemu

$$\dot{\boldsymbol{R}}(t) = \vec{\omega}^*(t)\boldsymbol{R}(t)$$

Reprezentacje obrotów

- Kąty Eulera (3 liczby)
- Macierze obrotu (9 liczb)
- Kwaterniony (4 liczby)

- Wady i zalety
  - efekt przegubowy (*gimbal lock*)
  - interpolacja
  - Ilość zajmowanej pamięci
  - łatwość renormalizacji (vs. koszt ortogonalizacji)