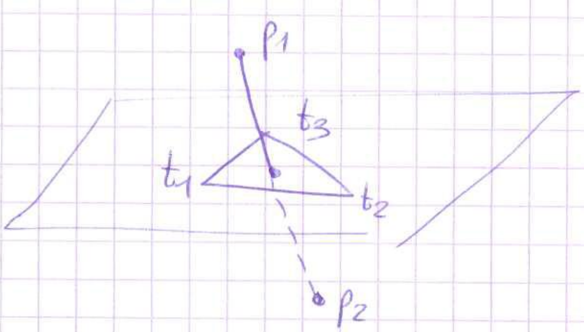
△ 1

Kolizja punktu z trójkątem – detekcja
(badanie przecięcia odcinka z trójkątem)

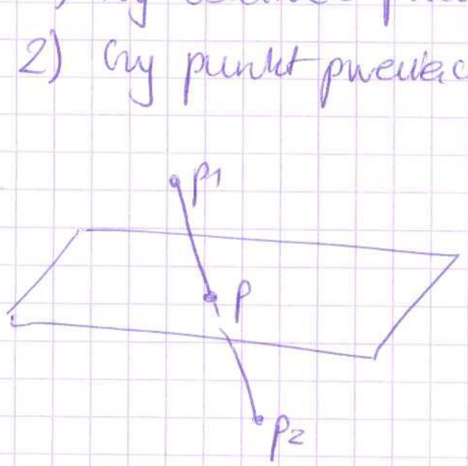
Kolizja <=> odcinek łączący położenie poprzednie i następne przecina trójkąt



Etap:

1) Czy odcinek przecina płaszczyznę, na której jest trójkąt?
2) Czy punkt przecięcia należy do trójkąta? – zagadn. 2D

Ad 1



Najpierw: obliczyć rzuty ~~od~~ wektorów $\vec{p_1p}$ i $\vec{p_2p}$ ~~i sprawdzić~~, na normalną $\vec{n}$ do powierzchni i sprawdzić, czy mają przeciwne znaki.

Jednak nie znamy p. Ale zamiast niego możemy wziąć dowolny punkt należący do płaszczyzny np. środek trójkąta $t = \frac{t_1+t_2+t_3}{3}$

Test: $\{(\vec{p_1}-\vec{t})\cdot\vec{n}\}\cdot\{(\vec{p_2}-\vec{t})\cdot\vec{n}\} < 0$

Jak obliczyć wektor normalny? Korzystając z wierzchołków trójkąta:

$$\vec{n} = (\vec{t_2}-\vec{t_1}) \times (\vec{t_3}-\vec{t_1})$$

Można test przepisać jako

$$\{\vec{p_1}\cdot\vec{n} - \vec{t}\cdot\vec{n}\}\cdot\{\vec{p_2}\cdot\vec{n} - \vec{t}\cdot\vec{n}\} < 0$$

Więcej działań, ale te iloczyny będą potem często używane.

Trzeba wyznaczyć punkt przecięcia odcinka i płaszczyzny — $\vec{p}$.

$$\begin{cases} \vec{p} = \vec{p_1} + k(\vec{p_2} - \vec{p_1}) & k \in [0,1] \\ \vec{p} \circ \vec{n} = d \end{cases}$$

$\vec{p}$ należy do odcinka

$\vec{p}$ należy do płaszczyzny

d - odległość płaszczyzny od pocz. ukł. wsp.

Można ją obliczyć wiedząc, że $\vec{t}$ należy do płaszczyzny tzn. $\vec{t} \circ \vec{n} = d$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \vec{p} \circ \vec{n} = \vec{t} \circ \vec{n} \\ \vec{p} = \vec{p_1} + k(\vec{p_2} - \vec{p_1}) \quad / \circ \vec{n} \end{cases}$$

$$\vec{p} \circ \vec{n} = \vec{p_1} \circ \vec{n} + k \cancel{\vec{p_2} \circ \vec{n}} (\vec{p_2} - \vec{p_1}) \circ \vec{n}$$

$$k = \frac{\vec{t} \circ \vec{n} - \vec{p_1} \circ \vec{n}}{(\vec{p_2} - \vec{p_1}) \circ \vec{n}}$$

Znając k znamy $\vec{p}$.

<u>Ad 2</u> Czy punkt przecięcia znajduje się wewnątrz trójkąta (problem 2D)

Sposób 1: Jeżeli punkt poza trójkątem $\Leftrightarrow$ odcinek łączący go ze środkiem trójkąta, przecina jeden z boków

Sposób 2: współrzędne barycentryczne lub parametryczne

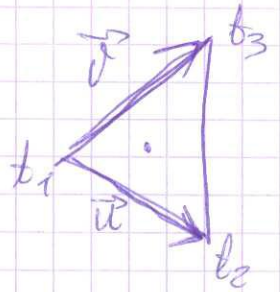
Wsp. barycentryczne $[\mu_1, \mu_2, \mu_3]$: $\vec{p} = \mu_1 \vec{t_1} + \mu_2 \vec{t_2} + \mu_3 \vec{t_3}$

przy czym $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$

$$\vec{p} = (1 - \mu_2 - \mu_3)\vec{t_1} + \mu_2 \vec{t_2} + \mu_3 \vec{t_3} = \vec{t_1} + \mu_2 \underbrace{(\vec{t_2} - \vec{t_1})}_{= \vec{u}} + \mu_3 \underbrace{(\vec{t_3} - \vec{t_1})}_{= \vec{v}}$$

$\vec{p} - \vec{t_1} = \mu_2 \vec{u} + \mu_3 \vec{v}$ — wsp. parametryczne

położenie punktu w układzie wsp. o początku w $\vec{t_1}$

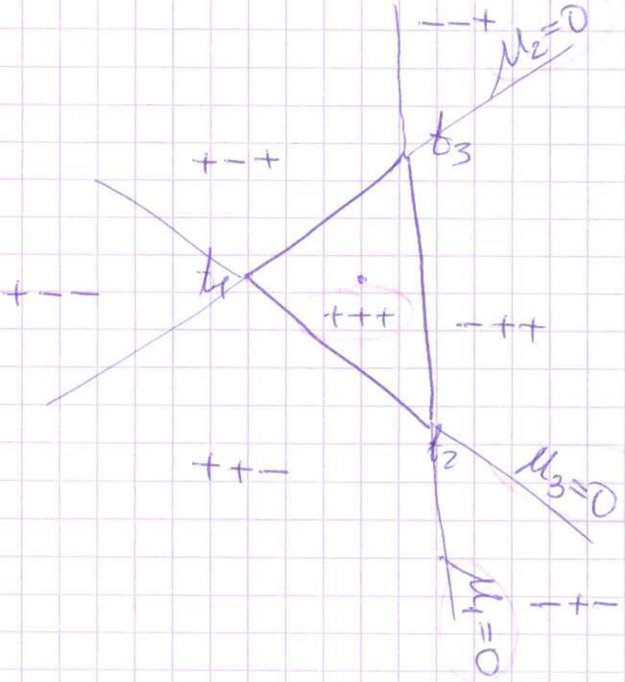


Wsp. barycentryczne

$\vec{t_1} = (1, 0, 0)$

$\vec{t_2} = (0, 1, 0)$

$\vec{t_3} = (0, 0, 1)$



Punkt jest wewnątrz trójkąta jeżeli $0 \leq \mu_1, \mu_2, \mu_3 \leq 1$

Pozostaje tylko znaleźć wsp. barycentryczne. W tym celu rzutujemy $\vec{w} = \vec{p} - \vec{t_1} = \mu_2 \vec{u} + \mu_3 \vec{v}$ na wektory $\vec{u} = \vec{t_2} - \vec{t_1}$ i $\vec{v} = \vec{t_3} - \vec{t_1}$

$$\begin{cases} 1^\circ \quad \vec{w} \circ \vec{u} = \mu_2 \vec{u} \circ \vec{u} + \mu_3 \vec{v} \circ \vec{u} \\ 2^\circ \quad \vec{w} \circ \vec{v} = \mu_2 \vec{u} \circ \vec{v} + \mu_3 \vec{v} \circ \vec{v} \end{cases}$$

2 niew. μ_2 i μ_3

Z 1° $\mu_2 = \frac{\vec{w} \circ \vec{u} - \mu_3 \vec{v} \circ \vec{u}}{\vec{u}^2}$

Do 2° $\vec{w} \circ \vec{v} = \frac{\vec{w} \circ \vec{u} - \mu_3 \vec{v} \circ \vec{u}}{\vec{u}^2} \cdot \vec{u} \circ \vec{v} + \mu_3 \vec{v}^2$

$$\vec{w} \circ \vec{v} = \frac{(\vec{w} \circ \vec{u})(\vec{u} \circ \vec{v})}{\vec{u}^2} - \mu_3 \frac{(\vec{v} \circ \vec{u})^2}{\vec{u}^2} + \mu_3 \vec{v}^2$$

$$\mu_3 \underbrace{\left(\vec{v}^2 - \frac{(\vec{v} \circ \vec{u})^2}{\vec{u}^2}\right)}_{= \frac{\vec{v}^2 \vec{u}^2 - (\vec{v} \circ \vec{u})^2}{\vec{u}^2}} = \vec{w} \circ \vec{v} - \frac{(\vec{w} \circ \vec{u})(\vec{u} \circ \vec{v})}{\vec{u}^2}$$

$$\mu_3 = \frac{(\vec{w}\circ\vec{v})\vec{u}^2 - (\vec{w}\circ\vec{u})(\vec{u}\circ\vec{v})}{\cancel{\vec{u}^2}} \cdot \frac{\cancel{\vec{u}^2}}{\vec{v}^2\vec{u}^2 - (\vec{u}\circ\vec{u})^2}$$

$$\boxed{\mu_3 = \frac{(\vec{w}\circ\vec{u})(\vec{u}\circ\vec{u}) - (\vec{w}\circ\vec{u})(\vec{u}\circ\vec{v})}{(\vec{v}\circ\vec{v})^2(\vec{u}\circ\vec{u})^2 - (\vec{u}\circ\vec{v})^2}}$$

Do 1° $\mu_2 = \frac{\vec{w}\circ\vec{u}}{\vec{u}^2} - \mu_3 \frac{\vec{v}\circ\vec{u}}{\vec{u}^2}$

$$= \frac{\vec{w}\circ\vec{u}}{\vec{u}^2} - \frac{(\vec{w}\circ\vec{u})\vec{u}^2 - (\vec{w}\circ\vec{u})(\vec{u}\circ\vec{v})}{\vec{v}^2\vec{u}^2 - (\vec{u}\circ\vec{v})^2} \cdot \frac{(\vec{v}\circ\vec{u})}{\vec{u}^2} =$$

$$= \frac{(\vec{w}\circ\vec{u})(\vec{u}^2\vec{v}^2) - \cancel{(\vec{w}\circ\vec{u})(\vec{u}\circ\vec{v})^2} - (\vec{w}\circ\vec{u})\vec{u}^2\cdot(\vec{u}\circ\vec{v}) + \cancel{(\vec{w}\circ\vec{u})(\vec{u}\circ\vec{v})^2}}{\{\vec{v}^2\vec{u}^2 - (\vec{u}\circ\vec{v})^2\}\vec{u}^2}$$

$$= \frac{(\vec{w}\circ\vec{u})\cancel{\vec{u}^2}\vec{v}^2 - (\vec{w}\circ\vec{u})\cancel{\vec{u}^2}(\vec{u}\circ\vec{v})}{\{\vec{v}^2\vec{u}^2 - (\vec{u}\circ\vec{v})^2\}\cancel{\vec{u}^2}}.$$

$$\boxed{\mu_2 = \frac{(\vec{w}\circ\vec{u})(\vec{v}\circ\vec{v}) - (\vec{w}\circ\vec{u})(\vec{u}\circ\vec{v})}{(\vec{v}\circ\vec{v})^2(\vec{u}\circ\vec{u})^2 - (\vec{u}\circ\vec{v})^2}}$$

Trzeba wpierw policzyć wszystkie iloczyny skalarne, bo powtarzają się w obu wzorach, a potem użyć ich do obliczeń! Zmienne jest $\vec{w}$ ⇒ mianownik jest stały sam dla wielu punktów! – liczymy tylko raz dla trójkąta

$$\boxed{\mu_1 = 1 - \mu_2 - \mu_3}$$

Ogólniej: to idea simplexu, która może być użyta w dowolnej ilości wymiarów i sprawdzaniu czy punkt jest w środku:

1D – simplex = odcinek
2D – trójkąt
3D – równoległościan