

Równania różniczkowe zwyczajne (ODE)

ODE 1

Problem: rozwiązać równanie postaci $\frac{d\vec{r}}{dt} = f(\vec{r}, t)$, $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$

Uwaga! Równanie wyższych rzędów można zawsze sprowadzić do równania tej postaci. np. równanie ruchu punktu materialnego:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)}{m} \quad \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0, \quad \dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}_0$$

sprowadza się do: podstawiamy $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)}{m} \quad \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(t) \quad \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$$

initial value problem

Najprostszy algorytm — algorytm Eulera

Tny wyprowadzenie:

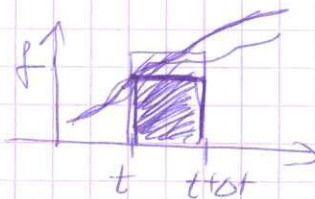
1° Różniczkowe \rightarrow iloraz różnicowy

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = f(\vec{r}, t) \Rightarrow \vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta t f(\vec{r}, t)$$

2° Formalne wyrażenie równania i całkowanie numer.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = f(\vec{r}, t)$$

$$[\vec{r}(t)]_t^t+\Delta t = \int_t^{t+\Delta t} f(\vec{r}, t) dt$$



$$\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = f(\vec{r}, t) \Delta t$$

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta t f(\vec{r}, t)$$

3° Szereg Taylora — b. ważny w metodach numerycznych
Rozwija się poprzez wielomiany zmiennej
wartości funkcji ze pomocą, wartości w którym
punkcie i informacją o zmienności w tym
punkcie (pochodnej)

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{1!} \Delta t + \frac{\ddot{\vec{r}}(t)}{2!} \Delta t^2 + \frac{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\vec{r}}(t)}{3!} \Delta t^3 + \dots$$

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \vec{v}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{\vec{r}}(t)\Delta t^2 + \frac{1}{6}\dddot{\vec{r}}(t)\Delta t^3 + \dots$$

ODE 2

$$f(\vec{r}, t) \text{ to } \frac{d\vec{v}}{dt} = f$$

Rzecz metody = które wyznoszą w sz. Taylora współwzrosty

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta t f(\vec{r}, t)$$

Metoda Eulera = równoważenie zobaczenia, że $f(\vec{r}, t)$ jest stałe w czasie Δt kroku Δt

Euler stosowany do równania Newtona

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)}{m}$$

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0, \quad \dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}_0$$

Euler ok. jeżeli $\vec{a} = \text{const}$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)}{m}$$

$$\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$$

$$\vec{v}(t+\Delta t) = \vec{v}(t) + \vec{a}\Delta t$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(t)$$

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$$

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \vec{v}(t)\Delta t$$

Euler: wciąż jak na nich jednostajny

Sztuczka zamiast $v(t)$ ~~explicit~~, weźmy $v(t+\Delta t)$ ~~explicit~~ z drugiego równania!

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + v(t+\Delta t)\Delta t$$

Wówczas

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + (v(t) + \vec{a}\Delta t)\Delta t$$

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + v(t)\Delta t + \vec{a}\Delta t^2$$

Powinno być ze wzorem na nich jedna przyp. (= wz. w szeregu Tayl.)

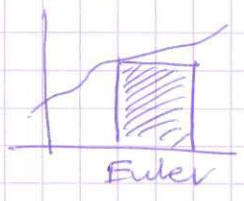
$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \frac{\dot{\vec{r}}(t)\Delta t}{1!} + \frac{\ddot{\vec{r}}(t)\Delta t^2}{2!} + \dots =$$

$$\vec{r}(t) + v(t)\Delta t + \frac{\vec{a}(t)\Delta t^2}{2} + \dots \text{ służy jeżeli } \vec{a} = \text{const}$$

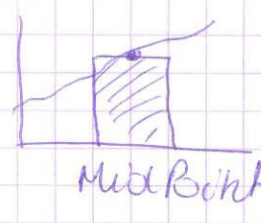
Euler (niech jednostajny w jednym ze wzorów) \Rightarrow błąd $\frac{1}{2}$ w ost. wz.

Jeżeli $f(\vec{r}, t)$ jest znane analitycznie i maime poliny jej pochodne, maime linij $\vec{r}(t+\Delta t)$ z wiakmą precyją, zachowując wiatel wywiad wzdłużie w swere Raylona.
Ale utrapie - jeżeli maime fa scelkome, to znemy wzw. analitycne

Metoda Eulera jest asymbaryane (komystr z infomacji na ponatku pwechuletu czasu) - explicit

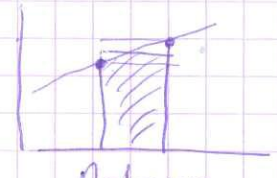


Euler



MidPoint

$$\vec{r}_n - \vec{r}_{n-1} = f(\vec{r}_{n+\frac{1}{2}}, t_{n+\frac{1}{2}})$$
$$\frac{\vec{r}_{n+1} - \vec{r}_n}{2\Delta t} = f(\vec{r}_n, t_n)$$



Adams

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{f_n + f_{n+1}}{2}$$

Podobne do MidPoint, ale inne:

Dwustopniowa metoda explicita (ulepszona met. Eulera)



Troche inne polejsie - dwuetapowe:

etap 1°: metoda Eulera polejsie wartosci funkcji w srodku pwechuletu tj o dla $t + \frac{\Delta t}{2}$

$$\vec{r}(t + \frac{\Delta t}{2}) = \vec{r}(t) + \frac{\Delta t}{2} f(\vec{r}, t) \quad \text{to zapewni symetrycznosc}$$

etap 2°: korzystając z tej wartosci obliczymy wartosci na koncu:

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta t f(\vec{r}(t + \frac{\Delta t}{2}), t + \frac{\Delta t}{2})$$

Zapiszmy to troche iniej:

Podwojone zmiane \vec{r} w pierwszej polowie kwaku

$$1^\circ \rightarrow 2(\vec{r}(t + \frac{\Delta t}{2}) - \vec{r}(t)) = \vec{k}_1 = h f(\vec{r}, t) \quad h \equiv \Delta t$$

Zmiane \vec{r} pod koniec nastepnego kwaku

$$2^\circ \rightarrow \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = h f(\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{k}_1, t + \frac{1}{2}h) = \vec{k}_2$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \vec{k}_2$$

Ostatecznie przepis

$$\vec{k}_1 = \Delta t f(\vec{r}, t)$$

$$\vec{k}_2 = \Delta t f\left(\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{k}_1, t + \frac{1}{2}\Delta t\right)$$

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \vec{k}_2$$

- Bardziej formalne wyprowadzenie wymaga więcej rozwinięć w szeregu Taylora funkcji dwóch zmiennych $f(\vec{r}, t)$, $f(\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{k}_1, t + \frac{1}{2}\Delta t)$
- Trzeba obliczać f między krokami - koszt jestki wtedy wielu wartości np. wiele punktów.

~~Również bez formalnego wyprowadzenia~~

Ogólne sformułowanie: metoda explicit

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \sum_{i=1}^s \omega_i \vec{k}_i$$

$$\vec{k}_1 = hf(\vec{r}, t)$$

$$\vec{k}_i = hf(\vec{r} + a_i h, t + \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} \vec{k}_j), \quad i > 1$$

Trzeba w każdym kroku s -krotnie obliczać wartości $f(x, y)$

$$\vec{k}_i = hf\left(t + a_i h, \vec{r} + \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} \vec{k}_j\right)$$

$$s=1: \quad \vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \omega_1 \vec{k}_1 = \vec{r}(t) + hf(\vec{r}, t)$$

metoda
Eulera
RK1

$$s=2: \quad \vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \omega_1 \vec{k}_1 + \omega_2 \vec{k}_2$$

$$\vec{k}_1 = hf(\vec{r}, t)$$

$$\vec{k}_2 = hf(\vec{r} + b_{21} \vec{k}_1, t + a_2 h)$$

uproszczenie!

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}$$

wzajemny w szeregu Taylora

$$f(\vec{r} + b_{21} hf(\vec{r}, t), t + a_2 h) = f(\vec{r}, t) + \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{(\vec{r}, t)} \cdot (a_2 h) + \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \Big|_{(\vec{r}, t)} \cdot (b_{21} hf(\vec{r}, t))$$

Wstawiamy rozwinięcie

$$\begin{aligned} \vec{r}(t+\Delta t) &= \vec{r}(t) + \underbrace{w_1}_{(1)} h f(\vec{r}, t) + \underbrace{w_2}_{(2)} h \left[f(\vec{r}, t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\vec{r}, t) \cdot a_2 h \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f}{\partial r}(\vec{r}, t) \cdot b_{21} h f(\vec{r}, t) \right] \\ &= \vec{r}(t) + \underbrace{w_1}_{(1)} h f(\vec{r}, t) (w_1 + w_2) + w_2 h^2 \left(a_2 \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{(\vec{r}, t)} + b_{21} f \frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{(\vec{r}, t)} \right) \end{aligned}$$

Wzorem do porównania jest rozwinięcie w szeregu Taylora względem czasu:

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{1!} h + \frac{\ddot{\vec{r}}(t)}{2!} h^2 + \frac{\vec{r}^{(3)}(t)}{3!} h^3 + \dots$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} - \textcircled{2} \quad (w_1 + w_2) h f(\vec{r}, t) &= \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{1!} h \\ (w_1 + w_2) f(\vec{r}, t) &= \dot{\vec{r}}(t) & \Leftrightarrow \text{Pierwotne równanie} \\ & & \Leftrightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = f(\vec{r}, t) \\ & & \Downarrow \\ & & w_1 + w_2 = 1 \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} - \textcircled{3} \quad \frac{\ddot{\vec{r}}(t)}{2!} h^2 = w_2 h^2 \left(a_2 \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{(\vec{r}, t)} + b_{21} f(\vec{r}, t) \frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{(\vec{r}, t)} \right)$$

Zajmijmy się lewą stroną

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}(t) \right) = \frac{d}{dt} \left(f(\vec{r}, t) \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{d\vec{r}}{dt} =$$

Wzrostło zupełnie

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

z równania

$$\frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial r} f(\vec{r}, t) \right) = w_2 h^2 \left(a_2 \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial r} b_{21} w_2 \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_2 a_2 = \frac{1}{2} \\ w_2 b_{21} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a_2 = b_{21}$$

Wzrost równań na w_1, w_2, b_{21} i a_2 (4 niewiadome, ale mamy tylko 3 równania)

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 1 \\ w_2 = \frac{1}{2a_2} \\ b_{21} = a_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \infty$ wiele rozwiązań, niech parametrem będzie a_2

\Downarrow
cała reszta metod

$$w_1 = 1 - \frac{1}{2a_2} \quad a_2 \neq 0$$

Wówczas

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \left(1 - \frac{1}{2a_2}\right) h f(\vec{r}, t) + \frac{1}{2a_2} h f(\vec{r} + a_2 h f(\vec{r}, t), t + a_2 h)$$

W powyższej formule możemy przeprowadzić minimalizację w zmiennej a_2 , żeby zmniejszyć błąd tj. różnicę z Taylor'em

Przyjmijmy np. $a_2 = 1 \Rightarrow w_1 = w_2 = \frac{1}{2}, b_{21} = 1$

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \frac{h}{2} f(\vec{r}, t) + \frac{h}{2} f(\vec{r} + \underbrace{h f(\vec{r}, t)}_{k_1}, t+h)$$

Inne rozwiązanie to $a_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow w_2 = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 1$

$$w_{21} = 1 - w_2 = 0$$

$$b_{21} = a_2 = \frac{1}{2}$$

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + 0 + 1 \cdot h f(\vec{r} + \underbrace{\frac{1}{2} h f(\vec{r}, t)}_{\vec{r}(t+\frac{t}{2})}, t + \frac{1}{2} h)$$

Metoda MidPoint

$s=4$ i zoptymalizowane współczynniki daje przepis na RK4

$$\begin{aligned} \vec{k}_1 &= h f(\vec{r}, t) \\ \vec{k}_2 &= h f(\vec{r} + \frac{\vec{k}_1}{2}, t + \frac{h}{2}) \\ \vec{k}_3 &= h f(\vec{r} + \frac{\vec{k}_2}{2}, t + \frac{h}{2}) \\ \vec{k}_4 &= h f(\vec{r} + \vec{k}_3, t+h) \end{aligned}$$

optymalna metoda RK4

Obliczenia dla wpisanych wartości są trudne, bo współczynniki przy potęgach h zależą od funkcji f .

$$\vec{r}(t+h) = \vec{r}(t) + \frac{1}{6} (\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4) + O(h^5)$$

To zaimplementować!

Automatyczne dopasowywanie kroku

ODE7

Podjęcie 1°:
"step doubling"

w każdym kroku lub co kilka kroków
przeprowadzamy obliczenia dla kroku Δt
i kroku $\Delta t/2$
Jeżeli wyniki są różne to zmniejszamy krok.
Jeżeli takie same to możemy spróbować, czy
wydłużenie do $2\Delta t$ nie daje tych samych
wyników co Δt

Robienie tego w każdym kroku podwoje
obliczenia

Robienie rzadziej \rightarrow można przegapić krytyczny
moment

Podjęcie 2°:

Poliny RK4 i RK5 i sprawdź
różnicę w wyniku. Gdy jest błąd \rightarrow
nie zmieniajmy kroku, tylko odłóż krok Δt

To jednak wymaga polinomu f obliczeń (10)
w różnych argumentach: 4 dla RK4 i 6 dla
RK5

Runge - Kutta - Fehlberg
1800 1869

Dla Runge-Kutta rzędu $M > 4$ więcej niż $K_1 - K_M$ (obliczeń
funkcji f) jest potrzebne. Dla RK5 to 16, RK6 - 7, RK8 - 11
Dlatego RK4 jest tak popularne. RK7 - 9

Są też rozwiązania z płacaniem wyników dla RK4 i inne
dokładne, co to chęć (tylko bardziej kosztowne obliczenia)

Fehlberg odkrył takie zestawy $\{K_i\}$, które pozwalają
w różnych kombinacjach na stworzenie algorytmów RK różnych
rzędów (embedded RK families)

Jestne z enderubnych puer Fehlbergo metod RK arwalego wadu, ktawo wymerego plaku wymerego

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{K}_1 &= hf(\vec{r}, t) \\ \vec{K}_2 &= hf\left(\vec{r} + \frac{1}{4}\vec{K}_1, t + \frac{1}{4}h\right) \\ \vec{K}_3 &= hf\left(\vec{r} + \frac{3}{32}\vec{K}_1 + \frac{9}{32}\vec{K}_2, t + \frac{3}{8}h\right) \\ \vec{K}_4 &= hf\left(\vec{r} + \frac{1932}{2187}\vec{K}_1 + \frac{7200}{2187}\vec{K}_2 + \frac{7296}{2187}\vec{K}_3, t + \frac{12}{13}h\right) \\ \vec{K}_5 &= hf\left(\vec{r} + \frac{438}{216}\vec{K}_1 + 8\vec{K}_2 + \frac{3680}{513}\vec{K}_3 - \frac{845}{4104}\vec{K}_4, t+h\right) \end{aligned} \right.$$

$$\vec{r}(t+h) = \vec{r}(t) + \frac{25}{216}\vec{K}_1 + \frac{1408}{2565}\vec{K}_3 + \frac{2187}{4104}\vec{K}_4 - \frac{1}{5}\vec{K}_5$$

Dokladajac jeden wyner

$$\vec{K}_6 = hf\left(\vec{r} - \frac{8}{27}\vec{K}_1 + 2\vec{K}_2 - \frac{3544}{2565}\vec{K}_3 + \frac{1858}{4104}\vec{K}_4 - \frac{11}{40}\vec{K}_5, t + \frac{1}{2}h\right)$$

moimo oblinyc' RK wadu 5:

$$\vec{r}(t+h) = \vec{r}(t) + \frac{16}{135}\vec{K}_1 + \frac{6656}{12825}\vec{K}_3 + \frac{28561}{56430}\vec{K}_4 - \frac{9}{50}\vec{K}_5 + \frac{2}{55}\vec{K}_6$$

Zatem niewielkim dodatocym kosdem oblinajac fulife f dla swiele argumentaw moimo oblinyc' jednoczesnie RK4 i RK5 i porownajac wyniki zmniejszej lub zwiekszej krok czasowy.

To metoda RKF4(5)

Tu ^{moimo} zaktualizujemy $\vec{r}(0)$ itp.

0) Definiujemy wszystkie wspoldaynniki (stale) i zadajemy wartosci graniczne dla bledu (E_{min} , E_{max}) i kroku czasowego (h_{min} , h_{max})

1) Uruchomimy procedure, RKF45 oblinajac \vec{r}_4 i \vec{r}_5 . Oblinamy $E = |\vec{r}_4 - \vec{r}_5|$

2) Jeieli $E_{min} \leq E \leq E_{max}$, krok h prostoje bez zmian \rightarrow wykonujemy nastepny krok oblineni

3) Jeieli $E < E_{min}$: ~~$h \rightarrow h/2$~~ $h \rightarrow 2h$
Jeieli $E > E_{max}$: ~~$h \rightarrow 2h$~~ $h \rightarrow h/2$

4) Przy warunkach, ze $h_{min} \leq h \leq h_{max}$ wykonujemy jest nastepny krok

Błąd maierne polinuje) jawnie (choć w praktyce niepotrzeba):

ODE 8

$$\epsilon = |\vec{\gamma}_5 - \vec{\gamma}_4| = \left| \frac{1}{360} \vec{k}_1 - \frac{128}{4275} \vec{k}_3 - \frac{2187}{75240} \vec{k}_4 + \frac{1}{50} \vec{k}_5 + \frac{2}{55} \vec{k}_6 \right|$$

Metody płynnie adaptujone krot:

$$\text{NR: } h_{\text{best}} = h_{\text{ppn}} \cdot S \cdot \left(\frac{1}{\epsilon} \right)^{1/5}$$

np. $\boxed{0.95}$
tolerancje

$\parallel 10^{-8}$

Van Passos

$$h_{\text{best}} = h_{\text{ppn}} \cdot \left(\frac{S}{2\epsilon} \right)^{1/4}$$

obciążone
 $0.1 < < 4$

zmiane ftko poly

$\epsilon \gg S$ - tolerancje

Problem! Metody RK nie nadają się do rozwiązywania problemów z opóźnieniami, w których funkcja f nie jest danej pewnie np. problem wielu oddziaływających ze sobą cząstek. Wówczas musimy obliczyć tylko $f(x_0, t_0)$ - inne wymagają wszystkich obliczeń.
 ↳ RK1 = Euler lub Verlet.

~~Zajmijmy się, jakimi się zajmujemy implementacją:~~

Zanim, zajmujemy się implementacją RK4 i ^{osobliwa} ~~zobacz~~ ^{wskazywane} RK4(5) ~~metoda~~ ^{metoda} przyjmiemy się pewnie jednej metodzie:

Algorytm Verleta - dopasowane do v-Newtona

Taylor szeregi wzdłuż dla $\vec{r}(t+\Delta t)$ i $\vec{r}(t-\Delta t)$:

$$\begin{aligned} \bullet \vec{r}(t+\Delta t) &\cong \vec{r}(t) + \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{1!} \Delta t + \frac{\ddot{\vec{r}}(t)}{2!} \Delta t^2 + \frac{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\vec{r}}(t)}{3!} \Delta t^3 + \dots \\ &\cong \vec{r}(t) + \vec{v}(t) \Delta t + \frac{\vec{a}(t) \Delta t^2}{2} + \frac{\vec{r}^{(3)}(t)}{6} \Delta t^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \vec{r}(t-\Delta t) &= \vec{r}(t + (-\Delta t)) = \\ &\cong \vec{r}(t) - \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{1!} \Delta t + \frac{\ddot{\vec{r}}(t)}{2!} (-\Delta t)^2 + \frac{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\vec{r}}(t)}{3!} (-\Delta t)^3 + \dots \\ &= \vec{r}(t) - \vec{v}(t) \Delta t + \frac{\vec{a}(t) \Delta t^2}{2} - \frac{\vec{r}^{(3)}(t)}{6} \Delta t^3 \end{aligned}$$

Dodajemy stronami

$$\vec{r}(t+\Delta t) + \vec{r}(t-\Delta t) \cong 2\vec{r}(t) + \vec{a}(t) \Delta t^2$$

⇓

$$\vec{r}(t+\Delta t) = -\vec{r}(t-\Delta t) + 2\vec{r}(t) + \vec{a}(t) \Delta t^2$$

opisuje
zmianę obecnego
stanu wzniesi poprawki
stan (ale tylko potrzeb)

Miemy, jeżeli poturbujemy wzniesi obliczyć przekroś - obliczamy stronami:

$$\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t-\Delta t) = 2\Delta t \vec{v}(t) + \frac{1}{3} \vec{r}^{(3)} \Delta t^3$$

odwołując - przepis
na poch. drug

$$\vec{v}_n = \frac{\vec{r}_{n-1} - 2\vec{r}_n + \vec{r}_{n+1}}{\Delta t^2}$$

$$\downarrow$$

$$\vec{v}(t) = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t-\Delta t)}{2\Delta t}$$

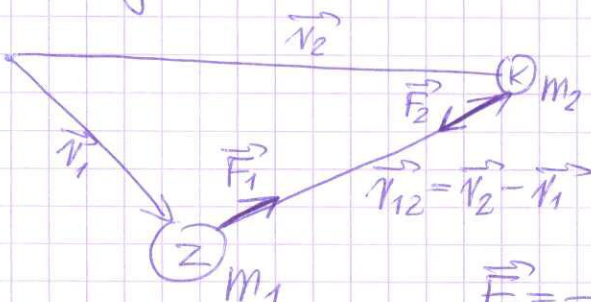
implementacja na współrzędnych SO

Nieco bardziej skomplikowany układ równań różniczkowych zwykłych pierwszego rzędu

Zagadnienie dwóch ciał w 2D

Ziemia - 1

Księżyc - 2



$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1 \quad \boxed{F = \frac{GMm}{r_{12}}}$$

Równanie dynamiki:

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_1 = F \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \\ m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_2 = -F \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{F}{m} \frac{(x_2 - x_1)}{r_{12}} \\ \frac{d^2 y_1}{dt^2} = \frac{F}{m} \frac{(y_2 - y_1)}{r_{12}} \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\frac{F}{m} \frac{(x_2 - x_1)}{r_{12}} \\ \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -\frac{F}{m} \frac{(y_2 - y_1)}{r_{12}} \end{cases}$$

$$r_{12} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

4 równania drugiego rzędu \rightarrow 8 równań 1-go rzędu

$$\boxed{N=8}$$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = v_{x1}, & \frac{dv_{x1}}{dt} = \frac{F}{m} \frac{(x_2 - x_1)}{r_{12}} \\ \frac{dy_1}{dt} = v_{y1}, & \frac{dv_{y1}}{dt} = \frac{F}{m} \frac{(y_2 - y_1)}{r_{12}} \\ \frac{dx_2}{dt} = v_{x2}, & \frac{dv_{x2}}{dt} = -\frac{F}{m} \frac{(x_2 - x_1)}{r_{12}} \\ \frac{dy_2}{dt} = v_{y2}, & \frac{dv_{y2}}{dt} = -\frac{F}{m} \frac{(y_2 - y_1)}{r_{12}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y_0 = x_1, & \quad y_1 = v_{x1} \\ y_2 = y_1, & \quad y_3 = v_{y1} \\ y_4 = x_2, & \quad y_5 = v_{x2} \\ y_6 = y_2, & \quad y_7 = v_{y2} \end{aligned}$$

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(y_{j=1}^7, t)$$