Kwaterniony

i, j, k – trzy różne pierwiastki -1 w przestrzeni kwaternionów

$$i = (0,1,0,0),\quad j = (0,0,1,0),\quad k = (0,0,0,1)$$

$$\boxed{i^2 = j^2 = k^2 = -1}$$

$$q = [w, x, y, z] = w + ix + jy + kz$$

~~Zachs~~ Związek między pierwiastkami:

$$i \cdot j = -j \cdot i = k$$
$$j \cdot k = -k \cdot j = i$$
$$k \cdot i = -i \cdot k = j$$

Zapis kwaternionu w postaci podobnej do liczb zesp. + powyższe relacje pozwala na wypr. najważniejszych własności:

Operacje arytmetyczne

$$q_1 + q_2 = (w_1 + x_1 i + y_1 j + z_1 k) + (w_2 + x_2 i + y_2 j + z_2 k) =$$
$$= (w_1 + w_2) + i(x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) + k(z_1 + z_2)$$ – sumowanie po współrzędnych.
$$= [w_1 + w_2,\ x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2]$$ Tak samo odejmowanie.

$$q_1 \cdot q_2 = (w_1 + x_1 i + y_1 j + z_1 k) \cdot (w_2 + x_2 i + y_2 j + z_2 k) =$$
$$w_1 w_2 + w_1 x_2 i + w_1 y_2 j + w_1 z_2 k +$$
$$+ x_1 w_2 i + x_1 x_2 \overset{-1}{i^2} + x_1 y_2 ij + x_1 z_2 ik +$$
$$+ y_1 w_2 j + y_1 x_2 ji + y_1 y_2 j^2 + y_1 z_2 jk +$$
$$+ z_1 w_2 k + z_1 x_2 ki + z_1 y_2 kj + z_1 z_2 k^2 =$$
$$w_1 w_2 + w_1 x_2 i + w_1 y_2 j + w_1 z_2 k +$$
$$+ x_1 w_2 i - x_1 x_2 + x_1 y_2 k + x_1 z_2 (-j) +$$
$$+ y_1 w_2 j + y_1 x_2 (-k) + y_1 y_2 (-1) + y_1 z_2 i +$$
$$+ z_1 w_2 k + \underbrace{z_1 x_2 j}_{-z_1 z_2} + z_1 y_2 (-i) + z_1 z_2 (-1) =$$
$$= w_1 w_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(w_1 x_2 + x_1 w_2 + y_1 z_2 - y_2 z_1) +$$
$$+ j(w_1 y_2 - x_1 z_2 + w_2 y_1 + x_2 z_1) + k(w_1 z_2 + x_1 y_2 - y_1 x_2 + w_2 z_1)$$

$\leftarrow$

Wygodniejszy zapis: ze pomocą skalarne i wektorowe

$$s \equiv w \quad i \quad \vec{v} = [x, y, z]$$

$$q = w + ix + jy + kz = [w, x, y, z] = [s, \vec{v}]$$

Wówczas

$$q_1 + q_2 = [s_1 + s_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_2]$$

$$\boxed{q_1 \cdot q_2 = [s_1 s_2 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2, \ s_1 \vec{v}_2 + s_2 \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2]}$$ — hipoteza

sprawdzenie: — sprowadzamy do wzoru z poprzedniej kartki

$$q_1 q_2 = w_1 \cdot w_2 - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) + w_1 (i x_2 + j y_2 + k z_2) + w_2 (i x_1 + j y_1 + k z_1) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} =$$

$$= w_1 \cdot w_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2 + i(w_1 x_2 + w_2 x_1) + j(w_1 y_2 + w_2 y_1) + k(w_1 z_2 + w_2 z_1) + i(y_1 z_2 - y_2 z_1) - j(x_1 z_2 - x_2 z_1) + k(x_1 y_2 - x_2 y_1) =$$

$$= w_1 w_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2 + i(w_1 x_2 + w_2 x_1 + y_1 z_2 - y_2 z_1) + j(w_1 y_2 + w_2 y_1 - x_1 z_2 + x_2 z_1) + k(w_1 z_2 + w_2 z_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

O.K.

Mnożenie kwaternionów <u>nie jest przemienne</u> – powód to iloczyn wektorowy w części wektorowej

tak jak macierzy!

$$q_2 \cdot q_1 = [s_2 \cdot s_1 - \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1,\ s_2\vec{v}_1 + s_1\vec{v}_2 + \vec{v}_2 \times \vec{v}_1]$$
$$= [s_1 s_2 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2,\ s_1\vec{v}_2 + s_2\vec{v}_1 \underline{- \vec{v}_1 \times \vec{v}_2}]$$

Mnożenie przez liczbę ~ mnożenie przez kwaternion, którego część wektorowa równa jest zero

$$q_1 \cdot s_2 = [s_1, \vec{v}_1] \cdot [s_2, \vec{0}] = [s_1 \cdot s_2 - \underbrace{\vec{v}_1 \cdot \vec{0}}_{0},\ \underbrace{s_1\vec{0}}_{\vec{0}} + s_2\vec{v}_1 - \underbrace{\vec{v}_1 \times \vec{0}}_{\vec{0}}] =$$
$$= [s_1 s_2, s_2 \vec{v}_1] =$$
$$= w_1 s_2 + i x_2 s_2 + j y_2 s_2 + k z_2 s_2$$

→ mnożenie liczby przez wszystkie wsp. kwaternionu

Dzielenie <=> mnożenie przez $[\frac{1}{s_2}, \vec{0}]$

„<u>Dzielenie" dwóch kwaternionów</u> – cel.

- kwaternion sprzężony – definicja (analog sprzężenie zespol.)

$$q^* = [s, \vec{v}]^* = [s, -\vec{v}] = w - ix - jy - kz$$

$$q \cdot q^* = [s, \vec{v}] \cdot [s, -\vec{v}] = [s \cdot s + \vec{v}\cdot\vec{v},\ \underbrace{s\vec{v} - s\vec{v}}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{v} \times \vec{v}}_{\vec{0}}] =$$
$$= s^2 + \vec{v}^2 + i\vec{0} + j\vec{0} + k\vec{0} =$$
$$= s^2 + \vec{v}^2$$

$\Updownarrow$ – część wektorowa znika

$$q \cdot q^* = q^* \cdot q = s^2 + \vec{v}^2$$ – coś analogicznego do kwadratu normy liczby zespolonej

$$q \cdot q^* \equiv |q|^2 = w^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

$\Downarrow$

- def. kwaternion odwrotny

$$q^{-1} = q^* / |q|^2$$

Wówczas

$$q^{-1}\cdot q = \underbrace{\frac{q^*}{|q|^2}}_{\text{liczba}} \cdot q = \frac{1}{|q|^2}\, q\cdot q^* = q\cdot q^{-1} = \frac{1}{|q|^2}\big(\underbrace{q\cdot q^*}_{|q|^2}\big) = \underline{1}$$

Odwrotność kwaternionu będzie ważna operacja.

- Sprawdźmy czemu równe jest odwrotność iloczynu kwaternionów

$$(q_1\cdot q_2)^{-1} = \left([s_1,\vec{v}_1]\circ[s_2,\vec{v}_2]\right)^{-1} =$$
$$= \left([s_1 s_2-\vec{v}_1\circ\vec{v}_2,\ s_1\vec{v}_2+s_2\vec{v}_1+\vec{v}_1\times\vec{v}_2]\right)^{-1} =$$
$$= \frac{1}{|q|^2}[s_1 s_2-\vec{v}_1\circ\vec{v}_2,\ -s_1\vec{v}_2-s_2\vec{v}_1\underbrace{-\vec{v}_1\times\vec{v}_2}_{+\vec{v}_2\times\vec{v}_1}] =$$
$$= \frac{1}{|q|^2}[s_2,-\vec{v}_2]\circ[s_1,-\vec{v}_1] = q_2^{-1}\cdot q_1^{-1}\cdot\frac{1}{|q|^2}$$

Odwrotność iloczynu to iloczyn odwrotności ze zmienioną kolejn.
(z dokładnością do normy)

<u>Uwaga!</u>

czysty kwaternion
||
Mnożenie kwaternionu przez kwaternion bez części wektorowej jest jak mnożenie składowych kwaternionu przez liczbę.

Tak nie jest w przypadku kwaternionów bez części skalarnej:

$$q_1\cdot\vec{v}_2 = [s_1,\vec{v}_1]\cdot[0,\vec{v}_2] = [-\vec{v}_1\circ\vec{v}_2,\ s_1\vec{v}_2+\vec{v}_1\times\vec{v}_2]$$
$$\vec{v}_1\cdot q_2 = [0,\vec{v}_1]\cdot[s_2,\vec{v}_2] = [-\vec{v}_1\circ\vec{v}_2,\ s_2\vec{v}_1+\vec{v}_1\times\vec{v}_2]$$

zapis wobec którego należy być ostrożnym

Iloczyn dwóch kwaternionów bez części skalarnej $\neq$ iloczyn skal. lub wekt. dwóch wekt.

$$[0,\vec{v}_1]\cdot[0,\vec{v}_2] = [0\cdot 0-\vec{v}_1\circ\vec{v}_2,\ \vec{v}_1\times\vec{v}_2]$$
$$[0,\vec{v}]\cdot[0,\vec{v}] = [-\vec{v}^{\,2},\ \vec{0}]$$

Kwaterniony jednostkowe i obroty

$|q|^2 = 1 \iff$ kwaternion jednostkowy

Ich własnością jest zapis:

$$q = [s, \vec{v}] = \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{u}\right] \quad , |\vec{u}|^2 = \vec{u}^2 = \underline{1}$$

$$\begin{matrix} s = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \vec{v} = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{u} \end{matrix} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{matrix} \theta = 2\arccos(s) \\ \vec{u} = \frac{\vec{v}}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \end{matrix}$$

$$|q|^2 = s^2 + \vec{v}^2 = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\underbrace{\vec{u}^2}_{=1} = 1$$

tożsamościowo

Dwie własności kwaternionów jednostkowych

1) $q_1 \cdot q_2 = \left[\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\vec{u}\right] \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\vec{u}\right] =$

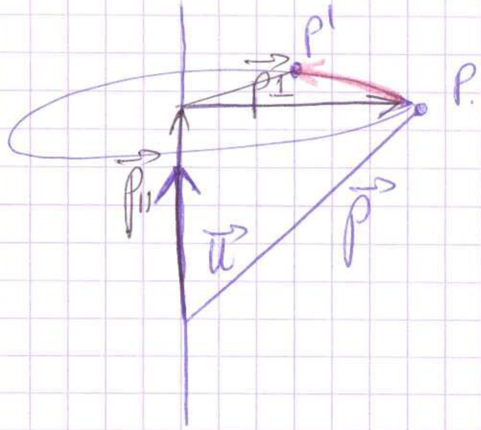
mnożenie dwóch kwaternionów o tej samej osi $\vec{u}$

$$= \Big[\overbrace{\cos\left(\tfrac{\theta_1}{2}\right)\cdot\cos\left(\tfrac{\theta_2}{2}\right) - \sin\left(\tfrac{\theta_1}{2}\right)\sin\left(\tfrac{\theta_2}{2}\right)\underbrace{\vec{u}\circ\vec{u}}_{1}}^{\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)},$$

$$\underbrace{\cos\left(\tfrac{\theta_1}{2}\right)\cdot\sin\left(\tfrac{\theta_2}{2}\right)\vec{u} + \cos\left(\tfrac{\theta_2}{2}\right)\sin\left(\tfrac{\theta_1}{2}\right)\vec{u}}_{\sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\vec{u}} + \sin\left(\tfrac{\theta_1}{2}\right)\cdot\sin\left(\tfrac{\theta_2}{2}\right)\underbrace{\vec{u}\times\vec{u}}_{\vec{0}}\Big]$$

$$= \left[\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\vec{u}\right]$$ — złożenie kątów θ_1 i θ_2

2) Obrót punktu $\vec{p}$ wokół osi $\vec{u}$ o kąt θ



W wyniku obrotu części wektora $\vec{p}$, która jest równoległa do $\vec{u}$ nie zmienia się.

$$\vec{p}_{\parallel}' = \vec{p}_{\parallel}$$

Natomiast części prostopadłe $\rightarrow$ obrót w przestrzeni 2D

$$\vec{p}_{\perp}' = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}}_{\text{macierz obrotu 2D}} \vec{p}_{\perp}$$

Jeżeli $\vec{p}_{\perp} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$ to $\vec{p}_{\perp}' = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta \cdot p_x - \sin\theta \cdot p_y \\ \sin\theta \cdot p_x + \cos\theta \, p_y \end{pmatrix} =$$

$$= \cos\theta \underbrace{\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}}_{= \vec{p}_{\perp}} + \sin\theta \underbrace{\begin{pmatrix} -p_y \\ p_x \end{pmatrix}}_{= \vec{u} \times \vec{p}_{\perp}}$$

$\vec{u} \times \vec{p}_{\perp}$ – wektor w przestrzeni obrotu prostopadły do $\vec{p}_{\perp}$ - drugi wektor bazy.

Cały obrócony wektor:

$$\vec{p}' = \vec{p}^{\parallel} + \cos(\theta)\, \vec{p}_{\perp} + \sin(\theta)\, (\vec{u} \times \vec{p}_{\perp})$$

Ten sam wynik możemy uzyskać obkładając wektor $\vec{p}$ jednostkowym kwaternionem i jego odwrotnością!

Hipoteza $\vec{p}' = q \cdot \vec{p} \cdot q^{-1}$

Dowód

97

$$q \cdot \vec{p} \cdot q^{-1} = \left[\cos\tfrac{\theta}{2}, \sin\tfrac{\theta}{2}\vec{u}\right] \cdot \underbrace{[0, \vec{p}] \cdot \left[\cos\theta/2, -\sin\tfrac{\theta}{2}\vec{u}\right]}_{\text{pierwsze mnożenie}} =$$

$$= \left[\cos\tfrac{\theta}{2}, \sin\tfrac{\theta}{2}\vec{u}\right] \cdot \left[\cancel{\cos\tfrac{\theta}{2}\vec{p}}\, 0 + \vec{p}\sin\tfrac{\theta}{2}\circ\vec{u},\ \cos\tfrac{\theta}{2}\vec{p} - \vec{p}\times\sin\tfrac{\theta}{2}\vec{u}\right] =$$

$$= \left[\cos\tfrac{\theta}{2}, \sin\tfrac{\theta}{2}\vec{u}\right] \cdot \left[\sin\tfrac{\theta}{2}\,\vec{p}\circ\vec{u},\ \cos\tfrac{\theta}{2}\vec{p} - \sin\tfrac{\theta}{2}(\vec{p}\times\vec{u})\right]$$

$$= \Big[\cos\tfrac{\theta}{2}\sin\tfrac{\theta}{2}(\vec{p}\circ\vec{u}) - \sin\tfrac{\theta}{2}\vec{u}\circ\left\{\cos\tfrac{\theta}{2}\vec{p} - \sin\tfrac{\theta}{2}(\vec{p}\times\vec{u})\right\},$$
$$\cos\tfrac{\theta}{2}\cdot\left\{\cos\tfrac{\theta}{2}\vec{p} - \sin\tfrac{\theta}{2}(\vec{p}\times\vec{u})\right\} + \sin\tfrac{\theta}{2}(\vec{p}\circ\vec{u})\cdot\sin\tfrac{\theta}{2}\vec{u} +$$
$$+ \sin\tfrac{\theta}{2}\vec{u}\times\left\{\cos\tfrac{\theta}{2}\vec{p} - \sin\tfrac{\theta}{2}(\vec{p}\times\vec{u})\right\}\Big] =$$

$$= \Big[\cancel{\cos\tfrac{\theta}{2}\sin\tfrac{\theta}{2}(\vec{p}\circ\vec{u})} - \cancel{\sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}(\vec{u}\circ\vec{p})} + \sin^2\tfrac{\theta}{2}\underbrace{\vec{u}\circ(\vec{p}\times\vec{u})}_{0},$$
$$\cos^2\tfrac{\theta}{2}\vec{p} - \sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}(\vec{p}\times\vec{u}) + \sin^2\tfrac{\theta}{2}(\vec{p}\circ\vec{u})\vec{u} +$$
$$+ \sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}(\vec{u}\times\vec{p}) - \sin^2\tfrac{\theta}{2}\underbrace{\vec{u}\times(\vec{p}\times\vec{u})}_{\vec{p}(\vec{u}\circ\vec{u}) - \vec{u}(\vec{u}\circ\vec{p})}\Big] =$$

$\vec{p}(\vec{u}\circ\vec{u}) = \vec{p}\cdot 1$, $\vec{u}(\vec{u}\circ\vec{p}) = \vec{p}_{\parallel}$, $\vec{p} - \vec{p}_{\parallel} = \vec{p}_{\perp}$

$\vec{p} = \vec{p}_{\parallel} + \vec{p}_{\perp}$
$\vec{u}(\vec{u}\circ\vec{p}) = \vec{p}_{\parallel}$
$\vec{u}\times\vec{p} = \vec{u}\times\vec{p}_{\perp}$

$$= \Big[0,\ \cos^2\tfrac{\theta}{2}\vec{p}_{\perp} + \cos^2\tfrac{\theta}{2}\vec{p}_{\parallel} + 2\sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}(\vec{u}\times\vec{p}_{\perp}) +$$
$$+ \sin^2\tfrac{\theta}{2}\vec{p}_{\parallel} - \sin^2\tfrac{\theta}{2}\vec{p}_{\perp}\Big] =$$

$$= \Big[0,\ \underbrace{\left(\cos^2\tfrac{\theta}{2} - \sin^2\tfrac{\theta}{2}\right)}_{\cos\theta}\vec{p}_{\perp} + \underbrace{\left(\sin^2\tfrac{\theta}{2} + \cos^2\tfrac{\theta}{2}\right)}_{1}\vec{p}_{\parallel} + \underbrace{2\sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}}_{\sin\theta}(\vec{u}\times\vec{p}_{\perp})\Big]$$

$$= \left[0,\ \vec{p}_{\parallel} + \cos(\theta)\vec{p}_{\perp} + \sin(\theta)\vec{p}\,(\vec{u}\times\vec{p}_{\perp})\right]$$

Część wektorowa tego kwaternionu taka sama jak przy obrocie

$\Updownarrow$

kwaternion może reprezentować obrót

Złożenie kwaternionów - obrotów

$$(q_2 \cdot q_1)\vec{p}(q_2 \cdot q_1)^{-1} = (q_2 q_1)\vec{p}(q_1^{-1} \cdot q_2^{-1}) = q_2 \cdot (q_1 \vec{p} q_1^{-1}) q_2^{-1}$$

Pierwszy obrót o q_1, potem q_2

Niejednoznaczność?

$\theta \to \theta + 2\pi$ (kąt pełny)

$$\left[\cos\left(\frac{\theta+2\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta+2\pi}{2}\right)\vec{u}\right] = \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)\vec{u}\right] =$$

$$= \left[-\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{u}\right] = -q$$

$\Rightarrow$ q i $-q$ reprezentują te same obroty (o ile obrót o 2π wokół niej to ten sam obrót)

Test: $\theta \to -\theta$ i $\vec{u} \to -\vec{u}$ - powinno być to samo

$$\left[\cos\left(-\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)(-\vec{u})\right] = \left[\cos\frac{\theta}{2}, +\sin\frac{\theta}{2}\vec{u}\right]$$

Pochodna kwaternionu

Konstruujemy iloraz różnicowy:

$$\dot{q}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(t_0+\Delta t) - q(t_0)}{\Delta t}$$

$$q(t_0+\Delta t) = \underbrace{\left[\cos\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right), \sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right)\frac{\vec{\omega}(t_0)}{\omega(t_0)}\right]}_{\text{obrót w czasie } \Delta t} \cdot \underbrace{q(t_0)}_{\text{obrót do chwili } t_0}$$

$\theta = \omega(t_0) \cdot \Delta t$

$\vec{u} = \frac{\vec{\omega}(t_0)}{\omega(t_0)}$

Wstawmy to do ilorazu różnicowego

$$\frac{q(t_0+\Delta t) - q(t_0)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\left\{\left[\cos\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right), \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)\frac{\vec{\omega}}{\omega}\right]\cdot q(t_0) - q(t_0)\right\} =$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\left\{\left(\left[\cos\frac{\omega\Delta t}{2}, \sin\frac{\omega\Delta t}{2}\frac{\vec{\omega}}{\omega}\right] - 1\right) q(t_0)\right\} =$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\left[\cos\frac{\omega\Delta t}{2} - 1, \sin\frac{\omega\Delta t}{2}\frac{\vec{\omega}}{\omega}\right] q(t_0) =$$

- $$\frac{\overset{\left(1-\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)^2\right)}{\cos\frac{\omega\Delta t}{2}} - 1}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t\to 0]{} 0$$

  $$\cong \frac{-\omega^2\Delta t^{\cancel{2}}}{4\cancel{\Delta t}}$$

- $$\frac{\sin\frac{\omega\Delta t}{2}}{\Delta t} \cong \frac{\frac{\omega\Delta t}{2}}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t]{} \frac{\omega}{2}$$

$$= \left[0, \frac{\cancel{\omega}}{2}\frac{\vec{\omega}}{\cancel{\omega}}\right] q(t_0)$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\dot{q}(t) = \frac{1}{2}\vec{\omega}(t)\cdot q(t)}$$

Komentarz na temat implementacji w C++ i C# (XNA). Przy okazji Wektor i Macierz