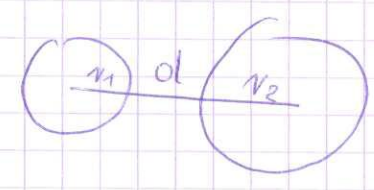


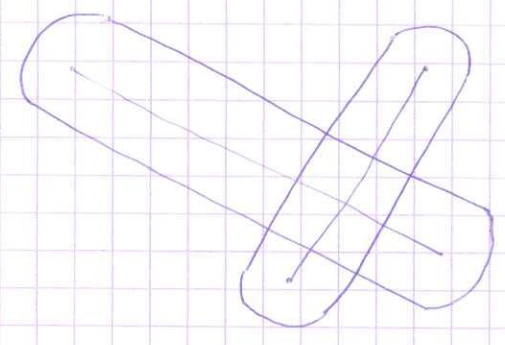
Zderzenie dwóch kul

Dwie etapy

Detekcja kolizji: wersje statyczna (w pewnych krokach)
 $d < r_1 + r_2$



wersje z cofaniem w czasie = przecięcie dwóch cylindrów domkniętych półsferami



Problem sprowadza się do obliczenia odległości dwóch odcinków to odległości $< r_1 + r_2$

trudniejsze niż odległości dwóch prostych
• jeżeli się zajmujemy, to **poźniej**

Reakcje na kolizje

\vec{u}_1 i \vec{u}_2 - prędkości przed zderzeniem (tu i przed)

\vec{v}_1 i \vec{v}_2 - prędkości tu po zderzeniu

$$\vec{n} = \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}_2}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \quad \text{- normalna zderzenia}$$

Zderzenie \Rightarrow krótkie, ale intensywne oddziaływanie siły impulsowe
nie ma sensu analizować zalegających od czasu sił

↓
Popraw - całość siły w czasie zderzenia (zmiana pędu)

$$\vec{J} = \int_{t_p}^{t_k} \vec{F}(t) dt = \Delta \vec{p} = \vec{p}_k - \vec{p}_p = m(\vec{u} - \vec{v})$$

• Tercie zwiadze Newtona: $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \Rightarrow$

$$\vec{J}_1 = -\vec{J}_2$$

$$J_1 \vec{n} = -J_2 \vec{n}$$

$$J_1 = -J_2$$

$$m_1 (u_{1n} - v_{1n}) = m_2 (u_{2n} - v_{2n})$$

↓

$$m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n} = m_1 u_{1n} + m_2 u_{2n} \quad \text{--- zwiadze zachowania pędu w kier. ruchu}$$

[3 zos. Newt \Rightarrow zos zach. pędu]

W kier prost. pęd w ogóle sie nie zmienia (\Rightarrow ten zoczy)

$$v_{1tb} = u_{1tb}, \quad v_{2tb} = u_{2tb}$$

• Zwiadze zachowania energii (ale niekoniecznie kinetycznej)

Straty energii kinetycznej wygenerowane mogz byc współczynnikiem restytucji

~~$$e = \frac{u_{1n} - u_{2n}}{v_{1n} - v_{2n}}$$~~

$$e = - \frac{u_{1n} - u_{2n}}{v_{1n} - v_{2n}}$$

$e=0$ - zderzenie idealnie niesprężyste $\Leftrightarrow u_{1n} = u_{2n}$

kule sie sklejaja

$$e=1 \quad - \frac{u_{1n} - u_{2n}}{v_{1n} - v_{2n}} = 1$$

$$-u_{1n} + u_{2n} = u_{1n} - u_{2n}$$

$$\boxed{v_{1n} + u_{1n} = v_{2n} + u_{2n}}$$

prędkości całkowite przed zderzeniem równa jest prędkości całkowitej po zderzeniu

Z drugiej strony założymy, że zasada zachowania energii kinetycznej jest spełniona - jeżeli to prawda - dla sil, jej sprzeczność do prawdziwości

$$\frac{m_1 u_{1n}^2}{2} + \frac{m_2 u_{2n}^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} \quad / \cdot 2$$

$$m_1 (u_{1n}^2 - u_{1n}^2) = m_2 (u_{2n}^2 - u_{2n}^2)$$

$$m_1 (u_{1n} - u_{1n})(u_{1n} + u_{1n}) = m_2 (u_{2n} - u_{2n})(u_{2n} + u_{2n})$$

$e=1$

Zostanie $m_1 (u_{1n} - u_{1n}) = m_2 (u_{2n} - u_{2n})$ czyli zas. zach. pędu

czyli $e=1 \Leftrightarrow$ zderzenie idealnie sprężyste **CBDU.**

Równanie opisujące zderzenie dwóch kul:

$$\begin{cases} 1 & J = m_1 (u_{1n} - v_{1n}) \\ 2 & -J = m_2 (u_{2n} - v_{2n}) \\ 3 & e = - \frac{u_{1n} - u_{2n}}{v_{1n} - v_{2n}} \end{cases}$$

znane: e, v_{1n}, v_{2n}
3 niewiadome: J, u_{1n}, u_{2n}

cały problem jest jednowymiarowy

zmiany prędkości jedynie w kierunku \vec{n}

1 $\rightarrow u_{1n} = v_{1n} + \frac{J}{m_1}$ - zmiana prędkości w wyniku zderzenia

2 $\rightarrow u_{2n} = v_{2n} - \frac{J}{m_2}$

Wstawiamy do e:

$$e = - \frac{(v_{1n} + \frac{J}{m_1}) - (v_{2n} - \frac{J}{m_2})}{v_{1n} - v_{2n}} = - \frac{\frac{J}{m_1} + \frac{J}{m_2} + v_{1n} - v_{2n}}{v_{1n} - v_{2n}}$$

Wprowadzimy nowe oznaczenie:

masa reduk. dwóch ciał $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$

$\Delta u_n = v_{1n} - v_{2n}$ prędkość względna przed zderzeniem

$$e = - \frac{J \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) + \Delta v_n}{\Delta v_n} = - \frac{\frac{1}{\mu} J + \Delta v_n}{\Delta v_n}$$

Wyznamy J:

niezmienne jest tylko J

$$\frac{1}{\mu} J = -e \Delta v_n - \Delta v_n = -(e+1) \Delta v_n$$

$$J = -\mu (e+1) \Delta v_n$$

Tenier mamy obliczyc u_{1n} i u_{2n} : $u_{1n} = v_{1n} + \frac{J}{m_1}$

Ogólniej (składowe styknie się nie zmieniają):

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 + \frac{J}{m_1} \vec{n}$$

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \frac{J}{m_2} \vec{n}$$

Wstawmy J do tych wzorów (bez wektorów)

$$u_{1n} = v_{1n} + \frac{J}{m_1} = v_{1n} + \frac{-\mu(e+1)(v_{1n} - v_{2n})}{m_1}$$

$$v_{1n} \frac{m_1+m_2}{m_1+m_2} - \left(\frac{\mu m_1 m_2}{m_1+m_2} \right) (e+1) \frac{v_{1n} - v_{2n}}{m_1} = \frac{m_2(e+1)v_{1n}}{m_1+m_2} + \frac{m_2(e+1)v_{2n}}{m_1+m_2}$$

$$u_{1n} = v_{1n} + \frac{J}{m_1} = v_{1n} + \frac{-\mu(e+1)(v_{1n} - v_{2n})}{m_1}$$

$$= v_{1n} \frac{m_1+m_2}{m_1+m_2} - \frac{\mu \cdot m_2}{(m_1+m_2) \cdot m_1} (e+1) (v_{1n} - v_{2n})$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

$$\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$$

$$= v_{1n} \left(\frac{m_1+m_2}{m_1+m_2} - \frac{m_2(e+1)}{m_1+m_2} \right) + v_{2n} \left(\frac{m_2(e+1)}{m_1+m_2} \right)$$

$$= v_{1n} \frac{m_1+m_2 - m_2 - m_2 e}{m_1+m_2} + v_{2n} \frac{m_2(e+1)}{m_1+m_2}$$

$$= \frac{m_1 - m_2 e}{m_1+m_2} v_{1n} + \frac{m_2(e+1)}{m_1+m_2} v_{2n}$$

Analogizacja

$$u_{zn} = \frac{m_1(e+1)}{m_1+m_2} u_{1n} + \frac{m_2-m_1e}{m_1+m_2} u_{2n}$$

Gdy $e=1$ toz, odbicie idealnie sprzeczne

$$u_{1n} = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} u_{1n} + \frac{2m_2}{m_1+m_2} u_{2n}$$

$$u_{2n} = \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2} u_{2n} + \frac{2m_1}{m_1+m_2} u_{1n}$$

wyniki znane ze szkoły
to maime do tego wyskocz
z 1) zes. zach. en. kin +
2) zes. zach. pędu

Do testowania - problem bilowchusty

zad. $\boxed{m_1=m_2}$ $\rightarrow \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{2}{m} \Rightarrow \mu = \frac{m}{2}$

$\boxed{e=1}$

$$\Rightarrow J = -\frac{m}{2} \cdot 2 \cdot \Delta v_n = -m \Delta v_n$$

Wznowes

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 + \frac{J}{m} \vec{n} = \vec{v}_1 - \Delta v_n \vec{n} = \vec{v}_1 - (v_{1n} - v_{2n}) \vec{n}$$

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \frac{J}{m} \vec{n} = \vec{v}_2 + \Delta v_n \vec{n} = \vec{v}_2 + (v_{2n} - v_{1n}) \vec{n}$$

Jaki jest kat kul po zderzeniu - cos co mowimy testu testowac

$$\begin{aligned} \cos(\angle(\vec{u}_1, \vec{u}_2)) &\Leftrightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = (\vec{v}_1 - \Delta v_n \vec{n}) \cdot (\vec{v}_2 + \Delta v_n \vec{n}) = \\ &= \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \cdot \vec{n} \Delta v_n - \Delta v_n \vec{n} \cdot \vec{v}_2 - \Delta v_n^2 \vec{n} \cdot \vec{n} \\ &= \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + \underbrace{\vec{n} \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}_{\Delta v_n} \cdot \Delta v_n - \Delta v_n^2 = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \\ &= \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + \Delta v_n^2 - \Delta v_n^2 = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{jezeli } \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \Rightarrow \vec{u}_1 \perp \vec{u}_2$$

Jeżeli jedno z kul spoczywa \Rightarrow to samo $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2$

TEST