Metody matematyczne fizyki 1

Zadania do ćwiczeń (Jacek Matulewski), wersja z dnia 26 stycznia 2006
Najnowsza wersja dostępna w sieci: http://www.phys.uni.torun.pl/~jacek/dydaktyka/mmf1.pdf
Główne źródła:
Dróbka, Szymański Zbiór zadań z matematyki dla klas III, IV liceum
Krysicki, Włodarski *Analiza matematyczna w zadaniach* cz. 1
Uwaga o notacji: . (kropka) jest używana jako symbol dziesiętny.

1. Zaokrąglij liczby do jednej liczby po przecinku: 0.54, 0.57, 0.50, 0.59, 0.55. 0.109, 0.149
2. Zapisz w formacie zmiennoprzecinkowym: 0.0124, 124
3. Oszacuj ile cząsteczek znajduje się w sali lub pokoju, w której się znajdujesz ($N_A = 6\cdot 10^{23}$, $V_0 = 22.41\ m^3/kmol$)
4. *Symbol Newtona. Dwumian Newtona i jego rozwinięcie. Trójkąt Pascala.*
5. Znaleźć siódmy wyraz rozwinięcia dwumianu $(2a + b^2)^8$.
6. Znaleźć piąty wyraz rozwinięcia dwumianu $\left(\frac{a}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{a}\right)^n$ jeżeli stosunek współczynnika przy trzecim wyrazie do współczynnika przy drugim wyrazie wynosi 11/2.
7. Dowieść, że $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}$.
8. Podać wynik sumy: $\sum_{k=1}^{n}1$, $\sum_{k=0}^{n}1$, $\sum_{k=a}^{b}1$, $\sum_{k=1}^{n}k$.
9. *Równanie kwadratowe. Miejsca zerowe. Zapis trójmianu w postaci iloczynu i w postaci kanonicznej.*
10. Wyprowadzić wartości p i q w postaci kanonicznej trójmianu kwadratowego.
11. Spróbuj znaleźć miejsca zerowe i zapisz w postaci iloczynu i w postaci kanonicznej:
    a) $y=-x^2+3x+4$, b) $y=1-2x^2+x$, c) $y=1-x+x^2$ (użyć $i=\sqrt{-1}$ i stąd $i^2=-1$).

----

12. *Funkcje elementarne: potęgowa $y = x^m$, wykładnicza $y = a^x$, logarytmiczna $y = \log_a x$ $(x > 0)$.*
13. Naszkicuj wykres funkcji x^1, x^2, $x^{1/2}$, x^{-1}.
14. Korzystając z własności potęg dowieść, że
    a) $\log_a b+\log_a c=\log_a bc$, b) $\log_a(b^p)=p\log_a b$,
    c) $\log_{a^q} b=\log_a b^{1/q}=\frac{1}{q}\log_a b$, d) $\log_a b=\frac{\log_n b}{\log_n a}$.
15. Oblicz:
    a) $\frac{2\cdot 3^{20}-5\cdot 3^{19}}{9^9}$, b) $\frac{(3^{15}+3^{13})\cdot 2^9}{(3^{14}+3^{12})\cdot 1024}$, c) $2^{\log_2 32}$, d) $8^{1-\log_2 3}$.
16. Wykonaj działania i uprość wyrażenie:
    a) $\left(x^{-2}+y^{-1}\right)^2$, b) $\frac{x^{-2}y^{-1}+x^{-1}y^{-2}}{x^{-2}-y^{-2}}+x^3(x^2-2xy+y^2)$, c) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$, d) $(\sqrt{a}+a^{\frac{3}{2}})^2$
17. Przedstaw $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$ w postaci potęgi a^x (a to liczba naturalna, a x wymierna).
18. Rozwiąż równanie $x^{-1.5}=3\frac{3}{8}$.
19. Naszkicuj wykres funkcji. Podaj dziedzinę, zbiór wartości, przedziały monotoniczności:
    a) $y=\frac{1}{x-1}$, b) $y=\frac{1}{|x|}$, c) $y=\left|\frac{1}{x}\right|$, d) $y=\sqrt{x}$, e) $y=\sqrt{(x-1)^2}$, f) $y=\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(3-x)^2}$,
    g) $y=\log_2|x|$, h) $y=|\log_2 x|$, i) $y=\log_2 x^2$, j) $y=\log_{\frac{1}{2}} x^3$.
20. Rozwiąż równania: a) $3^{x+2}-3^x=72$, b) $\frac{10^x+10^{-x}}{10^x-10^{-x}}=5$

21. Dla jakich a i b prawdziwy jest wzór $\log_2(a+b) = \log_2 a + \log_2 b$?
22. Mając dane $\log_{12} 2 = a$ oblicz $\log_6 16$.

----

23. Uprość wyrażenie $\frac{a^2-b^2}{a-b} + \frac{b^3-a^3}{a^2-b^2} - \frac{ab}{a+b}$
24. Obliczyć: $\frac{3}{2^0}\binom{n}{n} + \frac{3}{2^1}\binom{n}{n-1} + \frac{3}{2^2}\binom{n}{n-2} + \ldots + \frac{3}{2^n}\binom{n}{0}$
25. Znaleźć równania prostej równoległej i prostej prostopadłej do prostej $y = 2x+3$ przechodzącej przez punkt (–1,7).
26. Przedstawić graficznie zbiór rozwiązań równania $-\pi z + 3 \geq z - 4$.
27. Rozwiązać układ równań liniowych i podać liczbę rozwiązań w zależności od wartości parametru p
$$\begin{cases} \sqrt{3}d - 1.8f = 11 \\ pd + 2f = \sqrt{2} \end{cases}$$
28. Nie korzystając z pochodnych znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $y = \pi x^2 - \sqrt{3}x + 11$ w przedziale (–1,1].
29. Wykorzystując wzory Viete'a wyznaczyć wartości parametru k, dla których równanie $t^2 - 2t + 2 - k$ ma dwa różne rozwiązania dodatnie.
30. Podać zbiór będący rozwiązaniem nierówności
a) $-2l^2 + 4l - 5 < 0$, b) $4z^3 - 8z^2 - z \leq -2$
31. Rozwiązać równanie i podać dziedzinę
a) $\frac{z}{z-2} = \frac{z+6}{z^2-4}$, b) $\frac{x+3}{x^2+x+2} \geq -1$, c) $\frac{|x+2|}{2x-1} < 0$.
32. Wyznaczyć dziedzinę funkcji $\log_{10}(1 - \log_{10}(x^2 - 4x + 3))$.

----

33. *Funkcje trygonometryczne*
34. Naszkicuj wykres funkcji: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \sin^2 x$, $y = \sin x + |\sin x|$, $y = \frac{|\cos x|}{\cos x}$.
35. Korzystając ze wzorów na sin(x+y) i cos(x+y) oblicz sin(2x) i cos(2x).
36. Oblicz wartość funkcji sin, cos, tg, ctg dla 210°, 135°, 495°.
37. Uprościć: a) $\mathrm{arc\,ctg}(\frac{\sqrt{1-\sin^2 2x}}{-\sin 2x})$, b) $\frac{\mathrm{tg}\,a + \mathrm{tg}\,b}{\mathrm{tg}\,a - \mathrm{tg}\,b} + \frac{\mathrm{ctg}\,a + \mathrm{ctg}\,b}{\mathrm{ctg}\,a - \mathrm{ctg}\,b}$, c) cos(4arccos($x$))
38. Uprość wyrażenie $\sin\alpha - \sqrt{\mathrm{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha}$ dla $\pi < \alpha < 2\pi$.
39. Korzystając ze wzorów na sin(a+b) i cos(a+b) przedstawić tg(a+b) przez tg(a) i tg(b). Analogicznie przedstawić ctg(a+b) przez ctg(a) i ctg(b).
40. Oblicz:
$\cos 36^o \cdot \cos 72^o$, $\mathrm{tg}\,15^o + \mathrm{ctg}\,15^o$
41. Czy sin(cos(1)) jest dodatnie?
42. Czy $f(x)$ jest parzysta?
a) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, b) $f(x) = \frac{\sin x}{1+\sin^2 x}$, c) $f(x) = \mathrm{tg}\,x + \mathrm{ctg}\,x$
43. *Funkcje hiperboliczne*
44. *Funkcje odwrotne*

----

45. *Wektory: algebra wektorów, niezależność liniowa, baza przestrzeni wektorowej, rozkład wektora w bazie*
46. Czy trzy wektory, z których można zbudować trójkąt mogą być niezależne liniowo?

47. Czy podane wektory są liniowo zależne?
a) [1,1,1], [0,1,1], [0,0,1]; b) [1,2,0], [2,1,0], [1,0,1]; c) [1,1,1], [0,1,1], [1,2,2]; d) [3,0,0], [-1,-1,-1], [0,2,2]
48. Zbadaj liniową zależność wektorów:
a) $\vec{A}+\vec{B}$, $\vec{A}-\vec{B}$ b) $2\vec{A}+\vec{B}$, $m\vec{A}+4\vec{B}$
49. Dany jest wektor $\vec{x}=[\alpha_1,\alpha_2]$ w bazie $\{\vec{x}_1,\vec{x}_2\}$. Jakie są jego współrzędne w bazie $\{\vec{y}_1,\vec{y}_2\}$ jeżeli $\vec{x}_1=\vec{y}_1+\vec{y}_2$ i $\vec{x}_2=\vec{y}_1-\vec{y}_2$.
50. *Układ współrzędnych kartezjańskich. Iloczyn skalarny wektorów*
51. Dane są wektory $\vec{a}=[1,3]$ i $\vec{b}=[2,2]$ we współrzędnych kartezjańskich. Rozłóż wektor $\vec{a}$ na składowe prostopadłą i równoległą do wektora $\vec{b}$. Do obliczenia składowej prostopadłej wykorzystaj a) iloczyn wektorowy b) policzoną wcześniej składową równoległą.
52. Dane są dwa wektory $\vec{f}_1=[1,2]$ i $\vec{f}_2=[2,1]$ we współrzędnych kartezjańskich.
(Przyjmij konwencję zapisu wektorów: [] – wsp. kart, () – wsp. w bazie $\{\vec{f}_1,\vec{f}_2\}$)
a) Sprawdź czy tworzą bazę.
b) Przetransformuj do tej bazy wektory $\vec{e}_1=[1,0]$ i $\vec{e}_2=[0,1]$.
c) Do bazy kartezjańskiej przetransformuj wektor $\vec{x}_3=(\alpha_1,\alpha_2)$.
53. *Iloczyn wektorowy. Iloczyn mieszany wektorów. Podwójny iloczyn wektorowy*
54. Punkt S(0,0) jest środkiem boku AD równoległoboku ABCD. Mając dane współrzędne wektorów AB=[4,3] i BC=[6,2] wyznacz:
a) współrzędne wierzchołków A, B, C i D,
b) długości przekątnych równoległoboku,
c) pole równoległoboku.
55. Mając dane współrzędne wektora $\vec{u}=[-1,2]$, iloczyn $\vec{u}\circ\vec{v}=-11$ i długość $|\vec{v}|=5$ wyznacz współrzędne wektora $\vec{v}$.
56. Mając dane współrzędne wektorów $\vec{u}=[1,2]$ i $\vec{v}=[-2,2]$ wyznacz iloczyn skalarny $(\vec{u}-\vec{v})\circ(\vec{u}+\vec{v})$.
57. Mając wektor $\vec{u}=[1,2]$ wyznacz wektor do niego ortogonalny o długości 5.
58. Znajdź warunki, jakie muszą spełniać współrzędne jednostkowego wektora $\vec{b}=[b_x,b_y,b_z]$, aby był równoległy do wektora $\vec{a}=[a_x,a_y,a_z]$.

59. Dla wektorów $\vec{a}=[2,1,2]$, $\vec{b}=[-2,1,1]$ i $\vec{c}=[1,-2,-1]$ obliczyć $\vec{a}^2$, $\vec{b}^2$, $\vec{c}^2$, $\vec{a}\circ\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$, $\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$, $\vec{a}\times\vec{b}$, $(2\vec{a}-b)\circ(\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c})$.
60. Wykazać, że
a) wektor $\vec{p}=\vec{a}(\vec{b}\circ\vec{c})-\vec{b}(\vec{a}\circ\vec{c})$ jest prostopadły do $\vec{c}$,
b) wektor $\vec{a}$ jest prostopadły do $\vec{q}=\vec{b}-\dfrac{\vec{a}(\vec{a}\circ\vec{b})}{\vec{a}^2}$.
61. W dowolnym pięciokącie poprowadzono 5 wektorów ze środka każdego boku do przeciwległego wierzchołka. Wykazać, że suma tych wektorów jest równa zeru.
62. W trójkącie o wierzchołkach w punktach A, B i C punkty D, E i F dzielą boku trójkąta (odpowiednio BC, CA i AB) w stosunku *m* : *n*. Czy z wektorów AD, BE i CF można zbudować trójkąt?
63. Wierzchołek A czworościanu znajduje się w środku układu współrzędnych. Pozostałe wierzchołki znajdują się w punktach B = (0,-4,0), C = (0,0,-4) i D = (4,0,0). Oblicz pole powierzchni tego czworościanu.
64. Udowodnić, że przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym.
65. Udowodnić, że w przestrzeni 2D i 3D suma kwadratów cosinusów kierunkowych dowolnego wektora równa jest 1.
66. Znaleźć składowe wektora poprowadzonego z punktu P_1 = (1,2,–1) do punktu P_2 = (0,4,–3) równoległą i prostopadłą do wektora poprowadzonego z punktu P_1 do P_3 = (–1,–2,3).
67. Dane są wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Znaleźć wektor $\vec{c}$ spełniający relacje: $\vec{c}\times\vec{a}=\vec{b}$ i $\vec{c}\circ\vec{a}=\vec{0}$.
68. Wykazać słuszność następujących relacji:
a) $(\vec{a}\times\vec{b})\circ\left\{(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{c}\times\vec{a})\right\}=[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]^2$

b) $(\vec{a}\times\vec{b})^2(\vec{a}\times\vec{c})^2-\left\{(\vec{a}\times\vec{b})\circ(\vec{a}\times\vec{c})\right\}^2=\vec{a}^2[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]^2$

Definicja iloczynu mieszanego: $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]^2=\vec{a}\circ(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\circ(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\circ(\vec{a}\times\vec{b})$

69. W punktach A=(-2,-1,0) i B=(-3,2,1) zaczepione są dwa wektory AC=[2,-4,1] i BD=[0,-4,3]. Podać konstrukcję równoległościanu na podstawie powyższych danych. Czy jest ona jednoznaczna? Obliczyć jego objętość.

70. Dane są niezerowe wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ oraz parametry liczbowe α i β. Wyznaczyć wektory $\vec{x}$ i $\vec{y}$ spełniające układ równań:``

$$\begin{cases}\alpha\,\vec{x}+\vec{y}\times\vec{c}=\vec{a}\\ \beta\,\vec{y}+\vec{x}\times\vec{c}=\vec{b}\end{cases}$$

70a Dla jakiej wartości parametru *p* poniższe wektory są liniowo zależne: [4,2,-1], [0.5, *p*, -2], [1, -4, 11]?

70b Dla jakiej wartości parametru *p* punkty A = (1,-1,1), B = (4, -3, -4) oraz C = (2, 3, *p*) tworzą trójkąt prostokątny, w którym kątem prostym jest BAC.

70c Rozłożyć wektor $\vec{a}$ na składowe wzdłuż wektorów $\vec{b}$ i $\vec{c}$ (w bazie wektorów $\vec{b}$ i $\vec{c}$).
Uwaga! Nie mylić z rozkładem na składową równoległą i prostopadłą.

a) $\vec{a}=[5,1]$, $\vec{b}=[3,3]$ i $\vec{c}=[-2,1]$,

b) $\vec{a}=[5,2]$, $\vec{b}=[-2,3]$ i $\vec{c}=[-3,-3]$.

----

71. *Ciągi liczbowe. Granice*

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e=2.718,\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

72. Oblicz granice ciągów dla *n* dążącego do nieskończoności:

a) $u_n=\dfrac{2n^2-3n+5}{3+7n-6n^2}$, b) $u_n=\dfrac{4n^3-5n+1}{3n^5-2n^2-4}$, c) $u_n=\dfrac{\sqrt{4n^2+5n-7}}{n}$.

73. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach oblicz granicę ciągu $u_n=\sqrt[n]{3^n+5^n+7^n}$ dla $n\to\infty$.

74. Znajdź granice ciągów:

a) $\dfrac{n}{n+1}$, b) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$, c) $\left(\dfrac{2n-3}{3n+1}\right)^2$, d) $\sqrt{n^2+n}-n$, e) $\dfrac{4^{n-1}-5}{2^{2n}-7}$, f) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n\dfrac{2^{n+1}-1}{3^{n+1}-1}$,

g) $\sqrt[n]{100^{100}}-\sqrt[n]{\dfrac{1}{100^{100}}}$, h) $\sqrt[n]{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}$, i) $\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$.

75. *Granice i ciągłość funkcji.*

76. Korzystając z definicji granicy zbadać ciągłość funkcji *f*(*x*) = *x+2* w *x* = 2.

77. Korzystając z definicji obliczyć granicę lewo- i prawostronną funkcji *f*(*x*) = 1/*x* w *x* = 0.

78. Oblicz granice opierając się na odpowiednich twierdzeniach:

a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+4}{x+2}$, b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$, c) $\lim\limits_{x\to0^+}\ln\left(\dfrac{1+x}{x}\right)$, d) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}$.

79. Korzystając z odpowiednich twierdzeń zbadaj ciągłość funkcji
$\dfrac{x^2+x-2}{3x^2-12}$, oblicz granicę w ewentualnych punktach nieciągłości oraz granice dla $x\to\pm\infty$.

80. Wyznaczyć dziedzinę i zbadać ciągłość funkcji

a) $f(x)=\begin{cases}x+1 & x<0\\ 0 & x=0\\ -x+1 & x>0\end{cases}$,

b) $f_b(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1} & x\neq1,\\ b & x=1\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & 0\le x<1 \\ -x^2+4x-2 & 1\le x<3 \\ 4-x & x\ge 3 \end{cases}$,

d) $f(x)=\begin{cases} \frac{|x|}{x} & x\ne 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$,

e) $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-5x+6}{x-2} & x\ne 2 \\ -1 & x=2 \end{cases}$,

f) $\frac{x+|x|}{5x}$, $\frac{\sin x}{|x|}$, $\frac{x}{x^2-1}$.

----

81. *Pochodne. Interpretacja geometryczna. Pochodna funkcji odwrotnej.*
82. Korzystając z definicji (granica ilorazu różnicowego) oblicz pochodną funkcji:
    a) $f(x) = c$, b) $f(x) = ax$, c) $f(x) = ax^2$, d) $f(x) = x^n$, e) $f(x) = u(x)+v(x)$, f) $f(x) = u(x)v(x)$, g) $f(x)=u(x)/v(x)$, h) $f(x) = x/(1-x)$, i) $f(x) = \sin(x)$, j) $f(x) = \cos(x)$, k) $f(x) = e^x$,
83. Korzystając z twierdzenia o ilorazie oblicz pochodne:
    a) $f(x) = \mathrm{tg}(x) = \sin(x)/\cos(x)$, b) $f(x) = \mathrm{ctg}(x)$.
84. Oblicz pochodną:
    a) $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^4+\frac{13}{5}x^5-2x^6$, b) $y = \pi e$, c) $y=\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}-\sqrt[3]{x}$, d) $x=t^3\sqrt{t}$, e) $y = 3/(3x-2)$,

    f) $y=(4x^2-2x\sqrt{x}+x)(2x+\sqrt{x})$, g) $z=\frac{1+\sqrt{t}}{1+\sqrt{2t}}$, h) $s=(7t^2-\frac{4}{t}+6)^6$ i) $y(e) = \pi e$
85. Oblicz pochodną funkcji odwrotnej do:
    a) $y = x^2$, b) $y = \mathrm{tg}(x)$.
86. Oblicz pochodną:
    a) $y = uvw = (uv)w$, b) $y = a\sin(a/x)$, c) $z = 2x + \sin(2x)$, d) $z=\frac{\sin\alpha}{\alpha}+\frac{\alpha}{\sin\alpha}$ e) $z=\frac{x}{\sin(x)+\cos(x)}$,

    f) $y = e^{ax}(a\sin(x) - \cos(x))$, g) $y=\cos^2\sqrt{\frac{1}{x}}$, h) $z = \mathrm{tg}(u) - \mathrm{ctg}(u) - 2u$, i) $y = arc\,\mathrm{tg}(3x)$,

    j) $x=arc\sin(1-t)$ dla $0 < t < 2$, k) $y=arc\,\mathrm{tg}\frac{1+x}{1-x}$, l) $y = \ln(3x)$, m) $y=\ln(t+\sqrt{t^2+1})$,

    n) $y = \log_x a$, o) $y=\exp(\sin^2 x)-\exp(\cos^2 x)$, u) $y = x^x$.
87. Uprość i oblicz pochodną:
    a) $y=(1-x)(x+0.5)^2\frac{(2x^2-x-1)^3}{(2x+1)^5(3x-3)^2}$, b) $y=\frac{ctg(3x)ctg(2x)+1}{ctg(2x)-ctg(3x)}$

----

88. *Całki nieoznaczone i ich własności.*
89. Oblicz całki nieoznaczone następujących funkcji:
    a) $x\exp(x^2)$, b) $\sin(x)\cos(x)$, c) $1/\sqrt{2x-3}$, d) $x/\sqrt{1-x^4}$ $-1< x <1$, e) $\ln(x)$, $x > 0$,

    f) $5x^2 - 6x + 3 - 2/x + 5/x^2$, g) $x/(1+x^2)$, h) $x^2/(a^3+x^3)$, i) $x/(x^2+3)^6$, j) $(x\cdot\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})/x^2$, k) $\sqrt{3x+1}$,
    l) $\exp(1/x)/x^2$, m) $1/(2\cos^2 3x)$, n) $\cos(x)\exp(\sin(x))$, o) $\mathrm{tg}(x)/\cos^2(x)$, p) $(\ln(x))^2/x$, r) 6^{1-x},

    s) $1/x\sqrt{1-\ln^2|x|}$, t) $x\exp(x^2)(x^2+1)$, u) $x\cos(x)$, w) $e^x\cos(x)$, x) $x^n\ln(x)$, y) $\ln(x)$

----

90. *Całkowanie funkcji wymiernych – strategie.*

91. Oblicz całki nieoznaczone:

a) $\frac{x-1}{x^2-6x+5}$, b) $\frac{1}{x^2-6x+5}$, c) $\frac{7x}{4-5x^2}$ (przez podst. i przez rozkład na ułamki proste) ,

d) $\frac{1}{x^2+x+1}$, e) $\frac{x^3+x^2-10x+8}{x-5}$, f) $\frac{x^4+2x^2+4x}{3x^2+1}$, g) $\frac{3x-1}{x-3}$, h) $\frac{x^5-2}{x^2-1}$,

i) $\frac{1}{ax^2+bx+c}$, j) $\frac{1}{x^2-x+1}$, k) $\frac{1}{x^4+x^2+1}$.

----

92. Oblicz całki oznaczone:

a) $\int_0^{\pi/2} x\sin(x)dx$, b) $\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos(x)$.

93. Obliczyć pole powierzchni ograniczonej przez parabolę $y = x^2 - 1$ nad osią OX ($y = 0$) dla przedziału (-2,2).

94. Obliczyć pole powierzchni ograniczonej krzywymi:

a) $xy = 1$, $y = -1$, $x = 1$, $x = a > 1$,

b) $xy = 1$, $y/x = 1$, $y/x = a^2$, $a > 1$.

95. Oblicz całki oznaczone:

a) $\int_3^5 \frac{x}{x^2-4}dx$, b) $\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2+2x+1}$, c) $\int_0^a \frac{dx}{x^2+a^2}$, $a > 0$, d) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(x)dx$

96. Oblicz całkę oznaczoną $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx$.

97. Oblicz całki niewłaściwe (zapis powinien zawiera „lim”):

a) $\int_0^{3/5} \frac{dx}{\sqrt{3-5x}}$, b) $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}}$, c) $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}dx$, d) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}dx$.

----

98. *Szereg Taylora i Maclaurina.*

99. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcje: e^x, $\cos(x)$, $\sin(x)$.

100. Wielomian x^2+2x+1 rozwinąć w szereg Taylora wokół punktów $x = 0$, $x = -1$ i $x = 1$.

101. Rozwinąć w szereg Taylora (cztery wyrazy) funkcję $f(x) = e^x - \sqrt{1+x} - \frac{x}{2}$ wokół punktów $x = 0$ i $x = 1$.

102. Znaleźć pierwsze siedem wyrazów rozwinięcia w szereg Maclaurina funkcji:

a) $\cos^2(x)$, b) $\exp(-x^2)$, c) $\ln(x)$, d) $\mathrm{arctg}(x)$.

103. Rozwinąć w szereg Taylora wokół punktu $x = a$ funkcję $\exp(x/a)$.

104. Pokazać, że dla małego x $(1+x)^n \approx 1+nx$.

105. Obliczyć z dokładnością do 0.001 wartość $\sqrt{e}$.

106. Rozwinąć w szereg Maclaurina (3 wyrazy) $\gamma(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ wiedząc, że $|\beta| < 1$.

107. Znaleźć pierwsze dwa niezerowe wyrazy rozwinięcia w szereg Maclaurina wyrażenia na energię relatywistyczną: $E = m_0\gamma(v)c^2$.

108. Znaleźć pierwsze siedem wyrazów rozwinięcia w szereg Maclaurina funkcji:

a) $1/\cos^2(x)$, b) $\frac{-5x^4-7x^2+1}{2x^3-3x+1}$.

109. *Pochodne cząstkowe. Gradient.*

110. Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji:
a) $f(x,y) = x^2y^3 - x\sin(y)$, b) $f(x,y) = x^y$.
111. Obliczyć pochodne cząstkowe po r i φ funkcji $F(r,\varphi) = f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$ dla f danego przez
a) $f(x,y) = xy$, b) $f(x,y) = x+y$, c) $f(x,y) = x^2+y^2$, d) $f(x,y) = x/y$.
112. Znając $x = r\cos(\varphi)$, $r(t)=1/t$, $\varphi(t)=\omega t$ obliczyć pochodną $x(t)$ oraz różniczkę zupełną dx.
113. Wyznaczyć jednostkowy wektor prostopadły do powierzchni $\Phi(x,y,z)=0$ w punkcie P = (–1,–1,2) jeżeli $\Phi(x,y,z)=x^2+y^2+0.25z^2-3$ (elipsoida).
114. *Całki podwójne.*
115. Obliczyć jacobian przekształcenia ze współrzędnych kartezjańskich do sferycznych.
116. Obliczyć całkę podwójną funkcji $f(x,y)$ na obszarze D, który jest kołem o promieniu R i środku w (0,0):
a) $f(x,y) = 1$, b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, c) $f(x,y) = 1/\sqrt{x^2+y^2}$, d) $\exp(-(x^2+y^2))$.
117. Obliczyć całkę podwójną z funkcji $f(x,y) = 1$ na obszarze koła o środku w (0,0) i promieniu R bez przechodzenia do współrzędnych biegunowych.
118. Obliczyć całkę z funkcji $f(x,y)$ po obszarze D:
a) $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{5-y}}$, D to trójkąt wyznaczony przez punkty A=(1,-1), B=(3,-1), C=(1,3),
b) $f(x,y) = \dfrac{1}{x+y+1}$, D to trójkąt wyznaczony przez punkty A=(2,4), B=(4,2), C=(1,2),
c) $f(x,y) = 2x - y$, D to trójkąt wyznaczony przez punkty A=(-1,1), B=(3,1), C=(0,0),
d) $f(x,y) = x + 3y$, D to trójkąt wyznaczony przez punkty A=(0,0), B=(-2,1), C=(1,1).
119. Obliczyć całkę podwójną z funkcji $f(x,y) = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ określonej na obszarze
a) prostokąta wyznaczonego przez x z zakresu $[-a,a]$ oraz y z zakresu $[-b,b]$,
b) koła o środku w punkcie (0,0) i promieniu R w przypadku, gdy $a = b = R$.
120. *Całki potrójne.*
121. Obliczyć jacobian transformacji ze współrzędnych kartezjańskich do biegunowych.
122. Obliczyć jacobian transformacji ze współrzędnych kartezjańskich do walcowych.
123. Oblicz całki potrójne:
a) Korzystając z całek potrójnych obliczyć objętość kuli danej wzorem $x^2+y^2+z^2<R^2$.
b) Oblicz moment bezwładności kuli o promieniu R i masie M.
c) Oblicz całkę trójwymiarową funkcji $f(x,y,z) = 1$ po obszarze zadanym przez prostopadłościan wyznaczony punktami O = (0,0,0), A = (1,0,0), B = (0,2,0) i C = (0,0,3).
d) Oblicz całkę trójwymiarową funkcji $f(x,y,z) = 1$ po obszarze zadanym przez ostrosłup wyznaczony punktami O = (0,0,0), A = (1,0,0), B = (0,2,0) i C = (0,0,3).
124. *Całki krzywoliniowe IIgo rodzaju (skierowane).*
125. W przestrzeni dwuwymiarowej dana jest funkcja $F(\vec{r}) = \hat{x}(x^2+2xy) + \hat{y}(y^2-xy)$. Obliczyć całkę krzywoliniową tej funkcji po odcinku:
a) L_1 = odcinek od (0,0) do (2,2),
b) L_2 = dwa odcinki: od (0,0) do (1,0) i od (1,0) do (2,2).
126. Dane jest pole sił $\vec{F} = (x+y, y-x, 2z-x-3y)$. Obliczyć jej pracę, którą należy wykonać, aby przenieść punkt materialny po
a) łamanej OABC wytyczonej przez punkty O = (0,0,0), A = (0,a,0), B = (0,a,a) i C=(a,a,a),
b) po odcinku OC.
127. Dane są dwa pola sił $\vec{F}_1 = (x, -y, z)$ oraz $\vec{F}_2 = (x-y, x+y, 0)$. Obliczyć pracę potrzebną do przeniesienia punktu materialnego po
a) odcinku od (a,0,0) do (-a,0,0),
b) między tymi samymi punktami po półokręgu znajdującym się dodatniej części osi OY.
128. *Całka krzywoliniowa IIgo rodzaju (nieskierowana).*
129. Obliczyć całki:
a) $\int_L (x^2+y^2)\,dl$, gdzie L to krzywa sparametryzowana zmienną t zadana wzorami
$x(t) = a(\cos(t) + t\sin(t))$ i $y(t) = a(\sin(t) + t\cos(t))$ dla $0 \le t < 2\pi$.

b) $\int_L x^2 y dl$, gdzie L to ćwiartka okręgu w pierwszej ćwiartce dwuwymiarowego układu współrzędnych.

130. Znaleźć masę liny, której położenie dane jest przez $x(t) = at$, $y(t) = at^2/2$, $z(t) = at^3/3$ dla $0 < t < 1$ jeżeli gęstość liny dana jest wzorem $\rho(x, y, z) = \sqrt{2y/a}$.