Kwaterniony

i, j, k – trzy różne pierwiastki -1 w przestrzeni kwaternionów
$i = (0,1,0,0)$, $j = (0,0,1,0)$, $k = (0,0,0,1)$

$$\boxed{i^2 = j^2 = k^2 = -1}$$

$$q = [w, x, y, z] = w + ix + jy + kz$$

~~Zachodzi~~ Związek między pierwiastkami:

$$i \cdot j = -j \cdot i = k$$
$$j \cdot k = -k \cdot j = i$$
$$k \cdot i = -i \cdot k = j$$

Zapis kwaternionu w postaci podobnej do liczb zesp. + powyższe relacje pozwala na wypr. najważniejszych własności:

Operacje arytmetyczne

$$q_1 + q_2 = (w_1 + x_1 i + y_1 j + z_1 k) + (w_2 + x_2 i + y_2 j + z_2 k) =$$
$$= (w_1 + w_2) + i(x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) + k(z_1 + z_2)$$ – sumowanie po współrzędnych.
$$= [w_1 + w_2,\ x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2]$$ Tak samo odejmowanie.

$$q_1 \cdot q_2 = (w_1 + x_1 i + y_1 j + z_1 k) \cdot (w_2 + x_2 i + y_2 j + z_2 k) =$$
$$w_1 w_2 + w_1 x_2 i + w_1 y_2 j + w_1 z_2 k +$$
$$+ x_1 w_2 i + x_1 x_2 i^2 + x_1 y_2 ij + x_1 z_2 ik +$$
$$+ y_1 w_2 j + y_1 x_2 ji + y_1 y_2 j^2 + y_1 z_2 jk +$$
$$+ z_1 w_2 k + z_1 x_2 ki + z_1 y_2 kj + z_1 z_2 k^2 =$$
$$w_1 w_2 + w_1 x_2 i + w_1 y_2 j + w_1 z_2 k +$$
$$+ x_1 w_2 i - x_1 x_2 + x_1 y_2 k + x_1 z_2 (-j) +$$
$$+ y_1 w_2 j + y_1 x_2 (-k) + y_1 y_2 (-1) + y_1 z_2 i +$$
$$+ z_1 w_2 k + z_1 x_2 j + z_1 y_2 (-i) + z_1 z_2 (-1) =$$
$$= w_1 w_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2 + i(w_1 x_2 + x_1 w_2 + y_1 z_2 - y_2 z_1) +$$
$$+ j(w_1 y_2 - x_1 z_2 + w_2 y_1 + x_2 z_1) + k(w_1 z_2 + x_1 y_2 - y_1 x_2 + w_2 z_1)$$

←

Wygodniejszy zapis: ze pomocą skalare i wektore

$$s \equiv w \quad i \quad \vec{v} = [x, y, z]$$

$$q = w + ix + jy + kz = [w, x, y, z] = [s, \vec{v}]$$

Wówczas

$$q_1 + q_2 = [s_1 + s_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_2]$$

$$q_1 \cdot q_2 = [s_1 s_2 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2,\ s_1 \vec{v}_2 + s_2 \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2]$$ — hipoteza

sprawdzenie: — sprawdzamy do wzoru z poprzedniej kartki

$$q_1 q_2 = w_1 \cdot w_2 - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) + w_1 (i x_2 + j y_2 + k z_2) + w_2 (i x_1 + j y_1 + k z_1) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} =$$

$$= w_1 \cdot w_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2 + i(w_1 x_2 + w_2 x_1) + j(w_1 y_2 + w_2 y_1) + k(w_1 z_2 + w_2 z_1) + i(y_1 z_2 - y_2 z_1) - j(x_1 z_2 - x_2 z_1) + k(x_1 y_2 - x_2 y_1) =$$

$$= w_1 w_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2 + i(w_1 x_2 + w_2 x_1 + y_1 z_2 - y_2 z_1) + j(w_1 y_2 + w_2 y_1 - x_1 z_2 + x_2 z_1) + k(w_1 z_2 + w_2 z_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

O.K.

Mnożenie kwaternionów nie jest przemienne – powód to iloczyn wektorowy w części wektorowej

tak jak mówiłem!

$$q_2 \cdot q_1 = [s_2 \cdot s_1 - \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1,\ s_2\vec{v}_1 + s_1\vec{v}_2 + \vec{v}_2 \times \vec{v}_1]$$
$$= [s_1 s_2 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2,\ s_1\vec{v}_2 + s_2\vec{v}_1 - \underline{\vec{v}_1 \times \vec{v}_2}]$$

Mnożenie przez liczbę ~ mnożenie przez kwaternion, którego część wektorowa równa jest zero

$$q_1 \cdot s_2 = [s_1, \vec{v}_1] \cdot [s_2, \vec{0}] = [s_1 \cdot s_2 - \underbrace{\vec{v}_1 \cdot \vec{0}}_{0},\ \underbrace{s_1\vec{0}}_{\vec{0}} + s_2\vec{v}_1 - \underbrace{\vec{v}_1 \times \vec{0}}_{\vec{0}}] =$$
$$= [s_1 s_2, s_2 \vec{v}_1] =$$
$$= w_1 s_2 + i x_2 s_2 + j y_2 s_2 + k z_2 s_2$$ → mnożenie liczby przez wszystkie wsp. kwaternionu

Dzielenie <=> mnożenie przez $[\frac{1}{s_2}, \vec{0}]$

„Dzielenie" dwóch kwaternionów – cel.

- kwaternion sprzężony – definicja (analog sprzężenie zespol.)

$$q^* = [s, \vec{v}]^* = [s, -\vec{v}] = w - ix - jy - kz$$

$$q \cdot q^* = [s, \vec{v}] \cdot [s, -\vec{v}] = [s \cdot s + \vec{v}\vec{v},\ \underbrace{s\vec{v} - s\vec{v}}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{v} \times \vec{v}}_{\vec{0}}] =$$
$$= s^2 + \vec{v}^2 + i\vec{0} + j\vec{0} + k\vec{0} =$$
$$= s^2 + \vec{v}^2$$

$\Updownarrow$ – część wektorowa znika

$$q \cdot q^* = q^* \cdot q = s^2 + \vec{v}^2$$ – coś analogicznego do kwadratu normy liczby zespolonej

$$q \cdot q^* \equiv |q|^2 = w^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

$\Downarrow$

- def. kwaternion odwrotny

$$q^{-1} = q^* / |q|^2$$

Wówczas

$$q^{-1} \cdot q = \underbrace{\frac{q^*}{|q|^2}}_{\text{liczba}} \cdot q = \frac{1}{|q|^2} q \cdot q^* = q \cdot q^{-1} = \frac{1}{|q|^2} \underbrace{(q \cdot q^*)}_{|q|^2} = \underline{1}$$

Odwrotność kwaternionu będzie ważna operacja.

- Sprawdźmy czemu równe jest odwrotność iloczynu kwaternionów

$$(q_1 \cdot q_2)^{-1} = ([s_1, \vec{v}_1] \circ [s_2, \vec{v}_2])^{-1} =$$
$$= ([s_1 s_2 - \vec{v}_1 \circ \vec{v}_2, s_1 \vec{v}_2 + s_2 \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2])^{-1} =$$
$$= \frac{1}{|q|^2}[s_1 s_2 - \vec{v}_1 \circ \vec{v}_2, -s_1 \vec{v}_2 - s_2 \vec{v}_1 \underbrace{- \vec{v}_1 \times \vec{v}_2}_{+\vec{v}_2 \times \vec{v}_1}] =$$
$$= \frac{1}{|q|^2}[s_2, -\vec{v}_2] \circ [s_1, -\vec{v}_1] = q_2^{-1} \circ q_1^{-1} \cdot \frac{1}{|q|^2}$$

Odwrotność iloczynu to iloczyn odwrotności ze zmienioną kolejn. (z odpowiednią do normy)

Uwaga!

Mnożenie kwaternionu przez kwaternion bez części wektorowej (czysty kwaternion) jest jak mnożenie kwaternionu (składowych) przez liczbę

Tak nie jest w przypadku kwaternionów bez części skalarnej:

$$q_1 \cdot \vec{v}_2 = [s_1, \vec{v}_1] \cdot [0, \vec{v}_2] = [-\vec{v}_1 \circ \vec{v}_2, s_1 \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2]$$
$$\vec{v}_1 \cdot q_2 \underset{\uparrow}{=} [0, \vec{v}_1] \cdot [s_2, \vec{v}_2] = [-\vec{v}_1 \circ \vec{v}_2, s_2 \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2]$$

zapis wobec którego należy być ostrożnym

Iloczyn dwóch kwaternionów bez części skalarnej $\neq$ iloczynu skal. lub wekt. dwóch wekt.

$$[0, \vec{v}_1] \cdot [0, \vec{v}_2] = [0 \cdot 0 - \vec{v}_1 \circ \vec{v}_2, \vec{v}_1 \times \vec{v}_2]$$
$$[0, \vec{v}] \cdot [0, \vec{v}] = [-\vec{v}^2, \vec{0}]$$

Kwaterniony jednostkowe i obroty

$|q|^2 = 1 \iff$ kwaternion jednostkowy

Ich własnością jest zapis:

$$q = [s, \vec{v}] = \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{u}\right] \quad , |\vec{u}|^2 = \vec{u}^2 = \underline{1}$$

$$\begin{aligned} s &= \cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right) \\ \vec{v} &= \sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\vec{u} \end{aligned} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{aligned} \theta &= 2\arccos(s) \\ \vec{u} &= \frac{\vec{v}}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \end{aligned}$$

$$|q|^2 = s^2 + \vec{v}^2 = \underbrace{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}_{\text{tożsamościowo}} \underbrace{\vec{u}^2}_{=1} = 1$$

Dwie własności kwaternionów jednostkowych

1) $q_1 \cdot q_2 = \left[\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\vec{u}\right] \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\vec{u}\right] =$

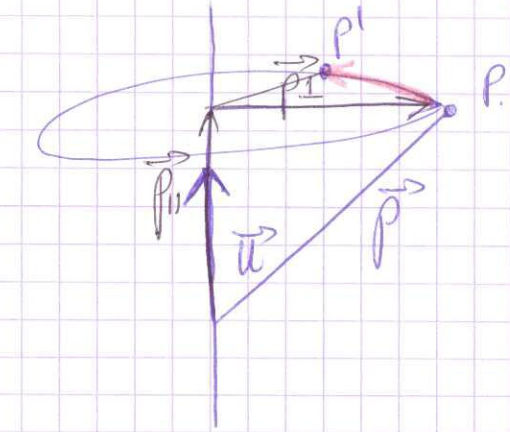
mnożenie dwóch kwaternionów o tej samej osi $\vec{u}$

$$= \Bigg[\overbrace{\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\underbrace{\vec{u}\cdot\vec{u}}_{1}}^{\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)},$$

$$\underbrace{\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\vec{u} + \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\vec{u}}_{\sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\vec{u}} + \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\underbrace{\vec{u}\times\vec{u}}_{\vec{0}}\Bigg]$$

$$= \left[\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\vec{u}\right] \quad \text{— złożenie kątów } \theta_1 \text{ i } \theta_2$$

2) Obrót punktu $\vec{p}$ wokół osi $\vec{u}$ o kąt θ



W wyniku obrotu części wektora $\vec{p}$, która jest równoległa do $\vec{u}$ nie zmienia się

$$\vec{p_\parallel}' = \vec{p_\parallel}$$

Natomiast części prostopadłe → obrót w przestrzeni 2D

$$\vec{p_\perp}' = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}}_{\text{macierz obrotu 2D}} \vec{p_\perp}$$

Jeżeli $\vec{p_\perp} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$ to $\vec{p_\perp}' = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta \cdot p_x - \sin\theta \cdot p_y \\ \sin\theta \cdot p_x + \cos\theta \, p_y \end{pmatrix} =$$

$$= \cos\theta \underbrace{\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}}_{= \vec{p_\perp}} + \sin\theta \underbrace{\begin{pmatrix} -p_y \\ p_x \end{pmatrix}}_{= \vec{u} \times \vec{p_\perp}}$$

$\vec{u} \times \vec{p_\perp}$ – wektor w przestrzeni obrotu prostopadły do $\vec{p_\perp}$ – drugi wektor bazy.

Cały obrócony wektor:

$$\vec{p}' = \vec{p}'' + \cos(\theta)\, \vec{p_\perp} + \sin(\theta)\, (\vec{u} \times \vec{p_\perp})$$

Ten sam wynik możemy uzyskać obkładając ów wektor $\vec{p}$ jednostkowym kwaternionem i jego odwrotnością!

Hipoteza $\vec{p}' = q \cdot \vec{p} \cdot q^{-1}$

Dowód

$$q\cdot\vec{p}\cdot q^{-1} = \left[\cos\tfrac{\theta}{2}, \sin\tfrac{\theta}{2}\vec{u}\right]\cdot\underbrace{\left[0,\vec{p}\right]\cdot\left[\cos\theta/2, -\sin\tfrac{\theta}{2}\vec{u}\right]}_{\text{pierwsze mnożenie}} =$$

$$= \left[\cos\tfrac{\theta}{2}, \sin\tfrac{\theta}{2}\vec{u}\right]\cdot\left[\cancel{\cos\tfrac{\theta}{2}\vec{p}}\, 0 + \vec{p}\sin\tfrac{\theta}{2}\circ\vec{u},\ \cos\tfrac{\theta}{2}\vec{p} - \vec{p}\times\sin\tfrac{\theta}{2}\vec{u}\right] =$$

$$= \left[\cos\tfrac{\theta}{2}, \sin\tfrac{\theta}{2}\vec{u}\right]\cdot\left[\sin\tfrac{\theta}{2}\vec{p}\circ\vec{u}, \cos\tfrac{\theta}{2}\vec{p} - \sin\tfrac{\theta}{2}(\vec{p}\times\vec{u})\right]$$

$$= \Big[\cos\tfrac{\theta}{2}\sin\tfrac{\theta}{2}(\vec{p}\circ\vec{u}) - \sin\tfrac{\theta}{2}\vec{u}\circ\left\{\cos\tfrac{\theta}{2}\vec{p} - \sin\tfrac{\theta}{2}(\vec{p}\times\vec{u})\right\},$$

$$\cos\tfrac{\theta}{2}\cdot\left\{\cos\tfrac{\theta}{2}\vec{p} - \sin\tfrac{\theta}{2}(\vec{p}\times\vec{u})\right\} + \sin\tfrac{\theta}{2}(\vec{p}\circ\vec{u})\cdot\sin\tfrac{\theta}{2}\vec{u} +$$

$$+ \sin\tfrac{\theta}{2}\vec{u}\times\left\{\cos\tfrac{\theta}{2}\vec{p} - \sin\tfrac{\theta}{2}(\vec{p}\times\vec{u})\right\}\Big] =$$

$$= \Big[\cancel{\cos\tfrac{\theta}{2}\sin\tfrac{\theta}{2}(\vec{p}\circ\vec{u})} - \cancel{\sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}(\vec{u}\circ\vec{p})} + \sin^2\tfrac{\theta}{2}\underbrace{\vec{u}\circ(\vec{p}\times\vec{u})}_{0},$$

$$\cos^2\tfrac{\theta}{2}\vec{p} - \sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}(\vec{p}\times\vec{u}) + \sin^2\tfrac{\theta}{2}(\vec{p}\circ\vec{u})\vec{u} +$$

$$+ \sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}(\vec{u}\times\vec{p}) - \sin^2\tfrac{\theta}{2}\underbrace{\vec{u}\times(\vec{p}\times\vec{u})}_{\vec{p}(\vec{u}\circ\vec{u}) - \vec{u}(\vec{u}\circ\vec{p})}\Big] =$$

$\vec{p}(\vec{u}\circ\vec{u}) = \vec{p}\cdot 1$, $\vec{u}(\vec{u}\circ\vec{p}) = \vec{p}_{\parallel}$, $\vec{p} - \vec{p}_{\parallel} = \vec{p}_{\perp}$

$\vec{p} = \vec{p}_{\parallel} + \vec{p}_{\perp}$
$\vec{u}(\vec{u}\circ\vec{p}) = \vec{p}_{\parallel}$
$\vec{u}\times\vec{p} = \vec{u}\times\vec{p}_{\perp}$

$$= \Big[0, \cos^2\tfrac{\theta}{2}\vec{p}_{\perp} + \cos^2\tfrac{\theta}{2}\vec{p}_{\parallel} + 2\sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}(\vec{u}\times\vec{p}_{\perp}) +$$

$$+ \sin^2\tfrac{\theta}{2}\vec{p}_{\parallel} - \sin^2\tfrac{\theta}{2}\vec{p}_{\perp}\Big] =$$

$$= \Big[0, \underbrace{\left(\cos^2\tfrac{\theta}{2} - \sin^2\tfrac{\theta}{2}\right)}_{\cos\theta}\vec{p}_{\perp} + \underbrace{\left(\sin^2\tfrac{\theta}{2} + \cos^2\tfrac{\theta}{2}\right)}_{1}\vec{p}_{\parallel} + \underbrace{2\sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}}_{\sin\theta}(\vec{u}\times\vec{p}_{\perp})\Big]$$

$$= \left[0, \vec{p}_{\parallel} + \cos(\theta)\vec{p}_{\perp} + \sin(\theta)\vec{p}\,(\vec{u}\times\vec{p}_{\perp})\right]$$

Część wektorowa tego kwaternionu taka sama jak przy obrocie

$\Updownarrow$

kwaternion może reprezentować obrót

Złożenie kwaternionów - obrotów

$$(q_2 \cdot q_1)\vec{p}(q_2 \cdot q_1)^{-1} = (q_2 q_1)\vec{p}(q_1^{-1} \cdot q_2^{-1}) = q_2 \cdot (q_1 \vec{p} q_1^{-1}) q_2^{-1}$$

Pierwszy obrót o q_1, potem q_2

Niejednoznaczność?

$\Theta \to \Theta + 2\pi$ (kąt pełny)

$$\left[\cos\left(\frac{\Theta+2\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{\Theta+2\pi}{2}\right)\vec{u}\right] = \left[\cos\left(\frac{\Theta}{2}+\pi\right), \sin\left(\frac{\Theta}{2}+\pi\right)\vec{u}\right] =$$

$$= \left[-\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right), -\sin\left(\frac{\Theta}{2}\right)\vec{u}\right] = -q$$

$\Rightarrow q$ i $-q$ reprezentują te same obroty (o ile obrót o 2π względny to ten sam obrót)

Test: $\Theta \to -\Theta$ i $\vec{u} \to -\vec{u}$ - powinno być to samo

$$\left[\cos\left(-\frac{\Theta}{2}\right), \sin\left(-\frac{\Theta}{2}\right)(-\vec{u})\right] = \left[\cos\frac{\Theta}{2}, +\sin\frac{\Theta}{2}\vec{u}\right]$$

Pochodna kwaternionu

Konstruujemy iloraz różnicowy:

$$\dot{q}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(t_0+\Delta t) - q(t_0)}{\Delta t}$$

$$q(t_0+\Delta t) = \underbrace{\left[\cos\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right), \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)\frac{\vec{\omega}(t_0)}{\omega(t_0)}\right]}_{\text{obrót w czasie } \Delta t} \cdot \underbrace{q(t_0)}_{\text{obrót do chwili } t_0}$$

$\Theta = \omega(t_0) \cdot \Delta t$

$\vec{u} = \frac{\vec{\omega}(t_0)}{\omega(t_0)}$

Wstawmy to do ilorazu różnicowego

$$\frac{q(t_0+\Delta t)-q(t_0)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\left\{\left[\cos\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right), \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)\frac{\vec{\omega}}{\omega}\right]\cdot q(t_0) - q(t_0)\right\} =$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\left\{\left(\left[\cos\frac{\omega\Delta t}{2}, \sin\frac{\omega\Delta t}{2}\frac{\vec{\omega}}{\omega}\right] - 1\right) q(t_0)\right\} =$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\left[\cos\frac{\omega\Delta t}{2} - 1, \sin\frac{\omega\Delta t}{2}\frac{\vec{\omega}}{\omega}\right] q(t_0) =$$

- $$\frac{\overset{\nearrow\left(1-\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)^2\right)}{\cos\frac{\omega\Delta t}{2}} - 1}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} 0$$

$$\text{IIS}$$

$$\frac{-\omega^2\Delta t^{\cancel{2}}}{4\cancel{\Delta t}}$$

- $$\frac{\sin\frac{\omega\Delta t}{2}}{\Delta t} \cong \frac{\frac{\omega\cancel{\Delta t}}{2}}{\cancel{\Delta t}} \xrightarrow[\Delta t]{} \frac{\omega}{2}$$

$$= \left[0, \frac{\cancel{\omega}}{2}\frac{\vec{\omega}}{\cancel{\omega}}\right] q(t_0)$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\dot{q}(t) = \frac{1}{2}\vec{\omega}(t)\cdot q(t)}$$

Komentarz na temat implementacji w C++ i C# (XNA). Przy okazji Wektor i Macierz