Fizyka kwantowa I

Zadania do ćwiczeń, wersja z dnia 10 października 2002
Najnowsza wersja dostępna w sieci: http://www.phys.uni.torun.pl/~jacek/dydaktyka/fk1.pdf

01. **Zjawisko fotoelektryczne:**
Promieniowanie o natężeniu $I = 3 \cdot 10^{-9}$ W/cm^2 i długości fali 400nm pada na metal, w którym praca wyjścia fotoelektronu wynosi 2eV. Znaleźć energię fotoelektronów, liczbę elektronów emitowanych w jednostce czasu przez jednostkę powierzchni oraz energię absorbowaną w jednostce czasu przez jednostkę powierzchni.

02. **Zjawisko Comptona:**
Foton o energii 10^4 eV rozprasza się na spoczywającym elektronie pod kątem 60^o. Znaleźć przyrost częstości fali, przyrost jej długości oraz energię kinetyczną i pęd elektronu.

03. **Ciało doskonale czarne:**
Stała słoneczna, czyli powierzchniowa gęstość mocy w pobliżu Ziemi (poza atmosferą) wynosi $I = 1.35$ kW/m^2. Zakładając, że mamy do czynienia z ciałem doskonale czarnym obliczyć temperaturę promieniującej powierzchni. Odległość Ziemi od Słońca $R = 1.5 \cdot 10^{11}$ m, promień Słońca $r = 6.95 \cdot 10^{8}$ m.

04. Wykazać, że swobodny elektron nie może pochłonąć fotonu.

05. **Model atomu Bohra:**
Obliczyć promień, prędkość oraz energię potencjalną, kinetyczną i całkowitą dozwolonych orbit w modelu atomu Bohra.

06. Znaleźć prędkość, którą uzyskał nieruchomy atom wodoru, w wyniku przejścia z pierwszego stanu wzbudzonego do podstawowego. Znaleźć częstość wysłanego fotonu z uwzględnieniem odrzutu.

07. Rozwiązań zagadnienie dwóch ciał. Wyprowadzić tor względnego ruchu.

1. **Rozpraszanie Rutheforda:**
Zbadać klasyczne rozproszenie cząstki o ładunku q = +e na nieruchomym centrum siły o ładunku Q = +Ze. Wyprowadzić wzór Rutheforda na przekrój czynny

2. Podać rozkład prawdopodobieństwa dla rzutu prawidłową kostką oraz kostką fałszywą, dla której prawdopodobieństwo wyrzucenia jedynki i szóstki są równe, dwukrotnie mniejsze od równych prawdopodobieństw wyrzucenia dwójki i piątki i trzykrotnie mniejsze od równych prawdopodobieństw wyrzucenia trójki i czwórki. Obliczyć w każdym przypadku wartość średnią i wariancję rozkładu.

3. Cząstka w jednym wymiarze opisana jest funkcją Gaussa:
$$\Psi(x) = C\exp(-\frac{(x-a)^2}{4\sigma^2} + ikx)$$
Znaleźć stałą normalizacyjną C, wartość średnią i wariancję rozkładu położeń, a także prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w przedziale $(a - \sigma, a + \sigma)$.
Znaleźć wartość oczekiwaną dla operatora $-ih\frac{d}{dx}$ tzn. $\int \Psi^*(x)(-i\hbar\frac{d}{dx})\Psi(x)dx$.

4. Elektron w najniższych stanach atomu wodoru opisany jest funkcjami:
$$\Psi_{100}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}\exp(-\frac{r}{a}),$$
$$\Psi_{200}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{32\pi a^3}}(2-\frac{r}{a})\exp(-\frac{r}{2a}),$$
$$\Psi_{210}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{32\pi a^3}}\frac{r}{a}\exp(-\frac{r}{2a})\cos\vartheta,$$

gdzie $a = 0.529 \cdot 10^{-10}$ m, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $z = \arccos(z/r)$.
a) Sprawdzić unormowanie funkcji dla stanu $nlm = 100$
b) Znaleźć dla tych stanów najbardziej prawdopodobną wartość odległości r elektronu od jądra $r_{\max,nlm}$ (maksimum w rozkładzie prawdopodobieństwa względem r, czyli
$$\rho_{nlm}(r)dr = \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\Theta\, r^2 \sin\theta \left|\Psi_{nlm}(r,\theta,\varphi)\right|^2\right)dr),$$
c) wartość średnią (oczekiwaną) $\langle r \rangle_{nlm}$,
d) wariancję rozkładu $\rho_{nlm}(r)$
e) prawdopodobieństwo znalezienia elektronu w odległości mniejszej niż $0.1a$ od wartości najbardziej prawdopodobnej $r_{\max,nlm}$.
f) Wartość oczekiwaną wektora położenia $\langle \vec{r} \rangle_{nlm}$,
g) wartość oczekiwaną $\langle r^2 \rangle$. Czy $\langle r^2 \rangle = \langle r \rangle^2$?

5. Rozwinąć w szereg funkcji $\varphi_m(x) = \frac{1}{\sqrt{2l}} e^{\frac{im\pi x}{l}}$, gdzie m – całkowite, funkcję
$$\Psi(x) = C\begin{cases} x + l, & -l < x < 0 \\ -x + l, & 0 < x < l \end{cases}$$
Stałą C wyznaczyć z warunku normalizacji.

6. **Wielomiany Legendre'a** (zob. I. Białynicki-Birula *Teoria kwantów*, M6)**:**
   a) Zortonormalizować metodą Gramma-Schimdta jednomiany $\varphi_n(x) = x^n$ na odcinku (–1,1). Uzyskane wielomiany przenormować uwzględniając warunek:
   $$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$$
   b) Obliczyć trzy najniższe współczynniki rozwinięcia w szereg potęgowy względem t funkcji $P(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$ (tzw. funkcji tworzącej): $P(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$
   c) Pokazać, że dla obliczonych w b) wielomianów prawdziwy jest wzór Rodriguesa
   $$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$
   d) Wykazać, że obliczone w b) wielomiany Legendre'a spełniają równanie różniczkowe
   $$[(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} + n(n+1)]P_n(x) = 0$$

7. W szeregu Fouriera z zad. 5 wykonać przejście graniczne $l \to \infty$ i otrzymać całkę Fouriera:
   $$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \Psi(k)e^{ikx}dk$$
   $$\Psi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \Psi(x)e^{-ikx}dx$$
   (Uwaga! Nieco nieformalny zapis: $\Psi(x)$ i $\Psi(k)$ to dwie różne funkcje!)
   Często na oznaczenie transformaty Fouriera stosuje się zapis operatorowy $\Psi(k) = \hat{F}\Psi(x)$ lub $\Psi(x) \leftrightarrow \Psi(k)$.
   Warto zauważyć, że podobne, jak dla położenia i wektora falowego (pędu), relacje można otrzymać dla czasu i częstości (energii) (por. zasady nieoznaczoności dla tych wielkości). Różne bywają również definicje transformaty (znak funkcji eksponencjalnej i współczynnik przed całką).

   Dowieść własności transformaty Fouriera (dla odmiany w zmiennych czas – częstość):
   a)
   – skalowanie czasu: $h(at) \leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}|a|}H(\dfrac{\omega}{a})$
   – skalowanie częstości: $\dfrac{1}{|b|}h(\dfrac{t}{b}) \leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}H(b\omega)$
   – przesunięcie w czasie: $h(t-t_0) \leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}H(\omega)e^{-i\omega t_0}$
   – przesunięcie w częstości: $h(t)e^{i\omega_0 t} \leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}H(\omega-\omega_0)$

   b)
   – Jeżeli $h(t)$ jest funkcją rzeczywistą, to $H(-\omega) = [H(\omega)]^*$
   – Jeżeli $h(t)$ jest funkcją czysto urojoną, to $H(-\omega) = -[H(\omega)]^*$
   – Jeżeli $h(t)$ jest funkcją parzystą, to $H(t)$ jest również parzysta
   – Jeżeli $h(t)$ jest funkcją nieparzystą, to $H(t)$ jest również nieparzysta

c)

- Wykazać, że $g * h \leftrightarrow G(\omega)H(\omega)$,

  gdzie $g * h = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau\, g(\tau)h(t-\tau)$ (splątanie funkcji *g* i *h*)
- Wykazać, że $Corr(g,h) \leftrightarrow G(\omega)H(-\omega)$,

  gdzie $Corr(g,h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau\, g(\tau)h(t+\tau)$ (korelacja funkcji *g* i *h*)
- Wykazać, że autokorelacja funkcji $Corr(g,g) \leftrightarrow G(\omega)G(-\omega)$, a ponadto, jeżeli *g* jest funkcją rzeczywistą $Corr(g,g) \leftrightarrow |G(\omega)|^2$ (twierdzenie Wienera-Khinchina).

8. Znaleźć transformatę Fouriera funkcji

   a) $\Psi(x) = C\exp(-\gamma|x|)$,

   b) $\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{(x-a)^2}{4\sigma^2} + ikx)$.

   W drugim przypadku obliczyć wartość oczekiwaną $\langle k \rangle$, wariancję δ_k^2 rozkładu $|\Psi(k)|^2 dk$ oraz iloczyn $\delta_x^2 \delta_k^2$.

9. Zauważyć, że z relacji uzyskanej w zad. 7 wynika, że wyrażenie $\frac{1}{2\pi}\int e^{ik(x-x_0)}dk$ posiada własność δ-Diraca, tzn. $\int \Psi(x)\delta(x-x_0)dx = \Psi(x_0)$.

   Pokazać, że taką własność mają również wyrażenia graniczne funkcji

   a) $\frac{1}{\pi}\lim\limits_{a\to\infty}\frac{\sin(ax)}{x}$,

   b) $\lim\limits_{\sigma\to 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2})$

10. Udowodnić najważniejsze własności δ-Diraca:

    a) $\int\limits_{+\infty}^{-\infty} f(x)\delta(x)dx = -f(0)$,

    b) $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$,

    c) $x\delta(x) = 0$,

    d) pokazać działanie $\delta(x-a)$ i $\frac{d}{dx}\delta(x)$,

    e) $\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|}\left[\delta(x-a) + \delta(x+a)\right]$,

    f) $\delta(f(x)) = \sum\limits_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$, gdzie *i* numeruje wszystkie miejsca zerowe $f(x_i) = 0$

    g) $\delta(x) = \frac{d}{dx}\Theta(x)$, gdzie $\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$.

11. Pokazać, że (A, B, C – macierze lub operatory):
    a) $[A+B, C] = [A, C] + [B, C]$
    b) $[A\cdot B, C] = A\cdot[B, C] + [A, C]\cdot B$
    c) $[B^{-1}, A] = B^{-1}\cdot[A, B]\cdot B^{-1}$

12. Obliczyć
    a) $[f(x), p_x] = i\hbar f_x(x)$
    b) $[x, p_x]$
    c) $[f(x), p_x^2]$
    d) $[x^2, [x, p_x^2]]$
    e) $[H, p_x]$, gdzie H to hamiltonian elektronu w potencjale $V(x)$: $H = \frac{p_x^2}{2m} + V(x)$

13. Obliczyć komutatory operatorów:
    (p – pęd, L – moment pędu, r – położenie, i oraz j przebiegają po $\{x, y, z\}$)
    a) $[L_i, L_j]$
    b) $[L_i, L^2]$
    c) $[L_i, p_j]$
    d) $[L_i, r_j]$

14. Obliczyć komutator $[V(x,y,z), p_i]$, gdzie $V(x,y,z)$ jest energią potencjalną.

15. Obliczyć komutatory $[H, L_i]$ oraz $[H, L^2]$, gdzie H jest operatorem energii cząstki o masie m znajdującej się w polu potencjalnym o symetrii sferycznej.

16. Udowodnić, że $[A, [B, C]]+ [B, [C, A]]+ [C, [A, B]] = 0$

17. Sprawdzić kiedy iloczyn dwóch operatorów hermitowskich jest operatorem hermitowskim.

18. Pokazać dla funkcji normowalnych do jedności, że w jednym wymiarze operatory położenia x oraz pędu p są operatorami hermitowskimi.

19. Napisać hamiltonian dla oscylatora harmonicznego. Zapisać go przy pomocy operatorów a i a^+, gdzie $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x + \frac{ip}{m\omega})$. Znaleźć relacje komutacji dla operatorów a i a^+: $[a, a^+]$, $[a, (a^+)^n]$, $[a^+a, a]$, $[a^+a, a^+]$

20. Udowodnić, że wartość średnia pędu cząsteczki w stanie o określonej energii (widmo dyskretne) jest równe zeru. (Podpowiedź: rozważyć komutator $[H, x]$.)

21. Pokazać, że dla stanów własnych hamiltonianu H zachodzi własność (reguła sum) $\sum_j \left|\langle j|x|n\rangle\right|^2 (E_j - E_n) = \hbar^2/2m$. (Wskazówka: rozważyć komutator $[x,[H,x]]$ oraz element $\langle n|[x,[H,x]]|m\rangle$).

22. Cząstka opisana jest funkcją falową $\Psi(x) = C\exp(-\gamma x + ikx)\Theta(x)$. Znaleźć prawdopodobieństwo, że pomiar pędu da wynik z przedziału ($\hbar(k-\gamma), \hbar(k+\gamma)$).

23. **Cząstka swobodna:**
Znaleźć rozwiązanie równania Schrödingera bez czasu dla swobodnego elektronu:
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) = E\Psi(x)$$
(co można przepisać: $(\frac{d^2}{dx^2} + \gamma^2)\Psi(x) = 0$, gdzie $\gamma = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$).
Porównaj je do równania nietłumionego oscylatora harmonicznego:
$(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2)x(t) = 0$, gdzie $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.
Porównaj rozwiązania i ich sens fizyczny.

24. Znaleźć funkcje i wartości własne operatora pędu.

25. **Zasada nieoznaczoności:**
a) Wyprowadzić zasadę nieoznaczoności na przykładzie pędu i położenia (zob. Schiff *Mechanika kwantowa*)
b) Wykazać, że w zasadzie nieoznaczoności dla położenia i pędu równość $\Delta x \cdot \Delta p_x = \hbar / 2$ zachodzi tylko dla paczki gaussowskiej.

Jednowymiarowe zagadnienia własne (stany związane)

26. Znaleźć poziomy energetyczne dla $E < 0$ i funkcje falowe cząstki o masie *m.* umieszczonej wewnątrz jednowymiarowej, płaskiej, symetrycznej studni potencjału:
$$V(x) = -V_0\Theta(|x| < a) = \begin{cases} 0, & x < -a \\ -V_0, & -a \le x \le a \\ 0, & x > a \end{cases},$$
gdzie $V_0 > 0$ i $a > 0$.

27. Cząstka w jednowymiarowej, nieskończonej, płaskiej studni potencjału
$$V(x) = \begin{cases} \infty, |x| > a \\ 0, |x| \le a \end{cases}$$
opisana jest funkcją $\Psi(x) = C\cos^2(\pi x/2a)$. Jakich wyników i z jakim prawdopodobieństwem, należy oczekiwać przy pomiarze energii?

28. Znaleźć poziomy energetyczne ($E < 0$) i funkcje falowe cząstki o masie *m* umieszczonej wewnątrz jednowymiarowej, płaskiej studni potencjału:
$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ -V_0, & 0 \le x \le a \\ 0, & x > a \end{cases}.$$
W jakich warunkach istnieje tylko jeden stan związany?

29. Rozwiązać zadanie 9.3 z książki Haken, Wolf *Atomy i kwanty* Wydawnictwo Naukowe PWN: Potencjał V(x) dany jest w jednym wymiarze w postaci $-\beta\delta(x)$, gdzie $\delta(x)$ jest funkcją δ–Diraca. Rozwiąż równanie Schrödingera dla stanów związanych, tzn. dla $E < 0$.

30. Korzystając z wyników zadania 19 znaleźć wartości własne energii oscylatora harmonicznego i odpowiednie funkcje własne.

31. Wykazać, że w stanach oscylatora harmonicznego o określonej energii wartość średnia energii kinetycznej jest równa wartości średniej energii potencjalnej (skorzystać z własności operatorów kreacji i anihilacji).

32. Znaleźć funkcje własne operatora anihilacji (funkcje tzw. stanów koherentnych).

33. Oscylator harmoniczny znajduje się w stanie koherentnym o wartości własnej operatora anihilacji równej a (liczba zespolona). Jakie wyniki i z jakimi prawdopodobieństwami można otrzymać przy pomiarze energii?

34. Oscylator harmoniczny znajduje się w stanie opisanym funkcją
    $$\Psi(x) = C\left(\frac{x^4}{\alpha^4} + \frac{x}{\alpha}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\alpha^2}\right),$$
    gdzie C – stała normalizacyjna, $\alpha^2 = \hbar/\sqrt{mk}$. Jakie wyniki z jakimi prawdopodobieństwami można otrzymać przy pomiarze energii?

35. Znaleźć energie widma dyskretnego metodą wielomianów Sommerfelda dla potencjałów:
    a) oscylatora harmonicznego $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$
    b) kulombowskiego $V(x) = -\alpha/|x|$
    c) Morse'a $V(x) = V_0(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x})$

36. Dla skończonej, symetrycznej, płaskiej studni potencjału (zob. zad. 26) oblicz rzut oraz elementy macierzowe operatora położenia:
    a) $\langle 1|2\rangle$,
    b) $\langle 1|x|1\rangle$,
    c) $\langle 1|x|2\rangle$.

37. **Ewolucja swobodna pakietu gaussowskiego:**
Zbadać ewolucję w czasie cząstki swobodnej opisanej w chwili początkowej funkcją Gaussa:

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{4\sigma^2} + ikx\right).$$

Oszacować czas potrzebny do podwojenia szerokości pakietu dla elektronu ($\sigma = 10^{-10}\,m$, $m = 10^{-30}\,kg$) oraz dla pyłu ($\sigma = 10^{-5}\,m$, $m = 10^{-12}\,kg$).

Jednowymiarowe zagadnienia własne (widmo ciągłe)

38. Zbadać rozproszenie cząstki o masie *m* na progu potencjału ($U > 0$)

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ U, & x > 0 \end{cases}.$$

Obliczyć prawdopodobieństwo przepuszczenia dla cząstki o energii $E > U$ oraz $E < U$.
Dla energii $E = 0.99U$ oszacować głębokość wnikania w obszar bariery o potencjale $U = 10V$ dla elektronu i dla cząstki pyłu o masie $10^{-15}\,kg$ i ładunku $10^9 e$.

39. Zbadać rozproszenie cząstki na symetrycznej barierze potencjału

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, x > a \\ U, & 0 < x < a \end{cases}$$

Obliczyć gęstość prądu cząstek padających i odbitych. Obliczyć prawdopodobieństwo odbicia i przepuszczenia dla przypadków gdy $E > U$ oraz $E < U$.
Dla energii $E = 0.99U$ oszacować prawdopodobieństwo przepuszczenia przez barierę o potencjale $10V$ i szerokości $1nm$ dla elektronu i dla cząstki pyle o masie i ładunku odpowiednio $10^{-15}\,kg$ i $10^9 e$.

40. Znaleźć postać (bez normowania) funkcji stanów rozproszeniowych ($E \ge 0$) prostokątnej skończonej studni potencjału i wyrazić ją funkcjami trygonometrycznymi (por. zadanie 23).

41. Rozwiąż zadanie 9.5 z książki Haken, Wolf – stany rozproszeniowe potencjału opisanego funkcją δ–Diraca (por. zadanie 29). Stany rozproszeniowe można zbudować dodając lub odejmując rozwiązania zagadnienia rozproszeniowego dla fali padającej z lewej i z prawej strony.

42. Oblicz i naszkicuj zależności od energii pozadiagonalnych elementów macierzy operatora położenia $\langle 1|x|E,p\rangle$ oraz $\langle 1|x|E,np\rangle$ (czyli dla parzystych i nieparzystych stanów continuum) dla skończonej, symetrycznej, płaskiej studni potencjału (zob. zadania 28 i 40).

43. Pokazać, że dla operatora momentu pędu $\vec{L} \times \vec{L} \neq \vec{0}$.

44. Znaleźć postać operatorów $\vec{\nabla}$, ∇^2, L^2, L_z oraz L_+ i L_- we współrzędnych sferycznych.

45. Obliczyć funkcje własne operatora rzutu momentu pędu L_z i unormować je do jedynki.

46. Wykazać, że w stanach własnych operatora L_z wartości średnie operatorów L_x i L_y są równe zeru.
   a) korzystając, z tego że $i\hbar L_x = [L_y, L_z]$ (i podobnie dla L_y) oraz z tego, że L_z jest operatorem hermitowskim
   b) korzystając z jawnej postaci funkcji własnej L_z oraz operatorów L_x i L_y we współrzędnych kulistych.

47. Spośród stanów własnych operatorów L^2 i L_z znaleźć te, w których niedokładność łącznego pomiaru L_x i L_y (tzn. suma wariacji $W(L_x) + W(L_y)$) jest najmniejsza.

48. Rotator płaski o masie *M* i ramieniu *R* opisany jest funkcją
   $\Psi(\varphi) = C\cos^3\varphi$,
   gdzie *C* jest stałą i $0 \leq \varphi < 2\pi$.
   a) Jakich wyników i z jakimi prawdopodobieństwami należy oczekiwać przy pomiarze energii i momentu pędu?
   b) Znaleźć wartość średnią i wariancję rozkładu.

49. **Funkcje kuliste**
   a) Znaleźć funkcje własne operatorów $\hat{L}^2$ (harmoniki sferyczne $Y_{lm}(\theta, \varphi)$).
   b) Oblicz $L_z Y_{lm}(\theta, \varphi)$.
   c) Pokazać, że dla hamiltonianu ze sferycznie symetrycznym potencjałem zależności kątowe funkcji w stanach związanych i rozproszeniowych opisuje funkcja własne operatora kwadratu momentu pędu. Wykorzystując wartości własne operatora momentu pędu napisz równanie radialne i znajdź warunek na podstawienie, dla którego równanie przyjmuje postać znaną z rozważań jednowymiarowych (brak pierwszej pochodnej)
   d) Korzystając z ortogonalności funkcji kulistych oraz ze związków M8.23 i M8.24 w Białynicki-Birula *Teoria kwantów* wyznaczyć niezerowe elementy macierzowe operatorów *x*, *y*, *z*, *x+iy, x-iy* bazie funkcji kulistych (por. reguły wyboru dla sprzężenia dipolowego).

50. Cząstka znajduje się w stanie, w którym moment pędu i jego rzut na oś *z* opisane są liczbami kwantowymi $l = 1$, $m = 1$. Jakich wyników i z jakimi prawdopodobieństwami można oczekiwać przy pomiarze rzutu momentu pędu na oś z' leżącą w płaszczyźnie *yz* i tworzącą kąt α z osią *z*.

51. Znaleźć funkcje własne stanu związanego $l = 0$ kulistosymetrycznej studni potencjału $V(\vec{r}) = V(r) = -V_0\theta(a - r)$.

52. Znaleźć potencjał w punkcie określonym przez wektor wodzący $\vec{R}$ pochodzący od nieodkształconego atomu wodoru w stanie podstawowym.

53. **Oscylacje Rabiego:**
Cząstka opisana jest hamiltonianem H_0, którego funkcje i wartości własne są znane ($H_0\Psi_n = E_n\Psi_n$), i znajduje się w stanie podstawowym Ψ_1. Włączono zaburzenie *V*, które ma tę własność, że spośród elementów macierzowych $V_{ij} = \langle i|V|j\rangle = \int \Psi_i^* V \Psi_j d\vec{r}$ tylko V_{12} i V_{21} są różne od zera. Z jakim prawdopodobieństwem znajdziemy cząstkę w stanach energetycznych po czasie *t*?

54. **Macierze Pauliego** (macierze spinowe 2×2):

a) analiza spektralna operatorów/macierzy

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wektory własne unormować do jedynki.

b) Wykazać, że macierze te spełniają równości:

$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \mathrm{I}^2 = \mathrm{I}$

$\sigma_x \sigma_y = -\sigma_x \sigma_y = i\sigma_z$, podobnie dla pozostałych macierzy

Stąd wyprowadzić komutator i antykomutator $\{\sigma_x, \sigma_y\} = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_x$ dla poszczególnych macierzy Pauliego.

c) Wykazać, że cztery macierze Pauliego stanowią bazę wszystkich macierzy 2×2.

d) Korzystając z reguły komutacji macierzy Pauliego znaleźć operator w przestrzeni 2×2 $\hat{\vec{S}} = (S_x, S_y, S_z)$ o wymiarze momentu pędu, którego składowe będą spełniały reguły komutacji identyczne jak składowe operatora momentu pędu $\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$.

Znaleźć reprezentację macierzową operatora $\hat{S}^2$.

e) Znaleźć macierze reprezentujące operatory $\hat{\sigma}_\pm = \hat{\sigma}_x \pm i\hat{\sigma}_y$.

Sprawdzić działanie macierzy σ_+ i σ_- na unormowane stany własne operatora σ_z (wykorzystaj oznaczenia $\Psi_{z,+1} \equiv |+1\rangle \equiv |+\rangle$ oraz $\Psi_{z,-1} \equiv |-1\rangle \equiv |-\rangle$).

Znaleźć relacje komutacji dla operatorów σ_+, σ_- i σ_z.

f) Pokazać, że $|-\rangle\langle+| = \sigma_-$, $|+\rangle\langle-| = \sigma_+$, $|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-| = \mathrm{I}$, $|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-| = \sigma_z$.

Obliczyć $|+\rangle\langle+|$ i $|-\rangle\langle-|$

55. Dla $s = 1/2$ znaleźć funkcje własne i wartości własne rzutu spinu $\hat{\vec{S}}$ na kierunek $\vec{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ czyli

$$\hat{\sigma}_n = \frac{\hat{\vec{S}} \circ \vec{n}}{|\vec{n}|}.$$

Jeśli cząstka jest przygotowana tak, że rzut spinu na oś z wynosi $\hbar/2$ (stan $|+\rangle$), to

a) jaka jest wartość oczekiwana operatora w tym stanie $\langle + | \hat{\sigma}_{\vec{n}} | + \rangle$,

b) jakie są prawdopodobieństwa otrzymania poszczególnych wyników przy pomiarze rzutu spinu na kierunek $\vec{n}$?

56.

a) Znaleźć operatory spinu dla cząstki o spinie $s = 1$.
(Podpowiedź: Z teorii operatorów momentu pędu wynika, że

$\hat{K}_\pm |k, m_k\rangle = \hbar\sqrt{(k \pm m_k + 1)(k \mp m_k)}\, |k, m_k \pm 1\rangle = \hbar\sqrt{k(k+1) - m_k(m_k \pm 1)}\, |k, m_k \pm 1\rangle$,

gdzie $|k, m_k\rangle$ to funkcje własne operatorów $\hat{K}^2$ i $\hat{K}_z$ ($\hat{K}^2 |k, m_k\rangle = \hbar^2 k(k+1) |k, m_k\rangle$, $\hat{K}_z |k, m_k\rangle = \hbar m_k |k, m_k\rangle$). Żądając takich relacji dla $\hat{S}_\pm$ znajdź składową x i y spinu.

b) Cząstka znajduje się w stanie o rzucie spinu na oś z wynoszącym $+\hbar$. Jakich wyników i z jakimi prawdopodobieństwami można oczekiwać przy pomiarze rzutu spinu na oś x?

57. Udowodnić, że potencjał Vlecka $\vec{A}_V(\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r}$, gdzie $\vec{B}$ to jednorodne (niezależne od położenia) pole magnetyczne jest poprawnym potencjałem dla tego pola (tzn. $\nabla\times\vec{A}_V(\vec{r}) = \vec{B}$) oraz, że spełnia cechowanie Coulomba $div\vec{A}(\vec{r}) = \nabla\circ\vec{A}(\vec{r}) = 0$.

58. Wykorzystując potencjał Vlecka znaleźć hamiltonian swobodnej cząstki naładowanej (bez uwzględnienia jej spinu) w jednorodnym polu magnetycznym. Następnie zapisać hamiltonian we współrzędnych walcowych dobranych tak, że pole magnetyczne jest skierowane w kierunku $\hat{z}$. (Zob. Białynicki-Birula *Teoria kwantów*, rozdział 22).

59. W poprzednim zadaniu uzupełnić hamiltonian o część opisującą spin cząstki.

60. Cząstka o spinie 1/2 znajduje się w silnym polu magnetycznym $\vec{B}$ równoległym do osi z i słabym polu magnetycznym $\vec{b}$ równoległym do osi x. Znaleźć perturbacyjne poprawki do energii związane z oddziaływaniem spinu z tymi polami.

61. Cząstka o masie m znajduje się w polu o potencjale $V(x) = kx^2/2 + Ax^3 + Bx^4$. Znaleźć perturbacyjne poprawki do energii (należy użyć operatorów kreacji i anihilacji)

62. Dwa atomy wodoru w stanie podstawowym znajdują się w odległości R. Znaleźć poprawkę perturbacyjną do energii (przyciąganie van der Waalsa).

63. Oszacować poprawkę do energii stanu podstawowego atomu wodoru wynikającą ze skończonych rozmiarów jądra. Przyjąć, że jądro jest jednorodnie naładowaną kulą o promieniu R.

64. Oszacować poprawkę do energii stanu podstawowego atomu wodoru wynikającą z relatywistycznego przyrostu masy (zaburzenie jest postaci $-b^4/8m^3c^2$).

65. Rozwiązać naładowany rotator płaski w polu elektrycznym. Znaleźć poprawki do energii wynikające z obecności pola elektrycznego korzystając z rachunku zaburzeń.