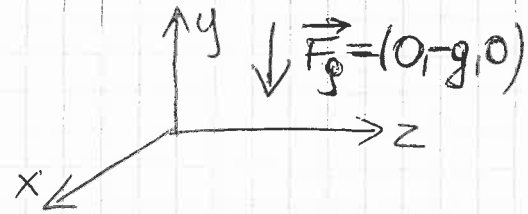


①

RUCH W STAŁYM POLU SIŁ GRAWITACYJNYCH

$$\vec{F}_g = m\vec{g} = -mg \hat{y}$$

stała siła

Szukamy $\vec{r}(t)$

Isaac Newton XVII w

Równanie ruchu

$$m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}}(t) = m\vec{g} = m(0, -g, 0)$$

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = m\vec{g}$$

maso
bawędne = maso
"grawitacyjne"

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{g}$$

Ruch w polu sił grawitacyjnych
nie zależy od masy ciała.
Od masy nadal zależy energia ciała.

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = -g \\ \ddot{z}(t) = 0 \end{cases}$$

Przypomnienie

$$\int dt(ax^n) = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + C$$

$$\frac{d}{dt}(ax^n) = an x^{n-1}$$

$$\dot{x}(t) = \int dt g_x = \int dt (0) = C$$

$$x(t) = \int dt (C) = Ct + D$$

W kier. x i z - ruch jednostajny
(ze stałą prędkością)

Potrzebujemy dwóch informacji do wyznaczenia stałych C i D

Może to być warunki początkowe w $t=0$: $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$

Ogólniej założymy

$$\vec{r}(0) = \vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\vec{v}_x(0) = \vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$$

$$x(0) = C \cdot 0 + D = D \stackrel{!}{=} x_0$$

$$\dot{x}(0) = C \stackrel{!}{=} v_{0x}$$

Rozwiązanie w kier x: $x(t) = v_{0x} t + x_0$

$$v_x(t) = v_{0x}$$

Jeżeli $v_{0x} = 0$ to $x = x_0$
 \Rightarrow ciało porusza się
w spoczynku

2)

Kierunek y

$$\ddot{y}(t) = -g$$

$$\dot{y}(t) = \int dt(-g) = -gt + C$$

$$y(t) = \int dt(-gt + C) = -\frac{1}{2}gt^2 + Ct + D$$

Warunki początkowe: $y(0) = y_0$
 $\dot{y}(0) = v_{y0}$

$$y(0) = -\frac{1}{2}g \cdot 0^2 + C \cdot 0 + D \stackrel{!}{=} y_0 \rightarrow D = y_0$$

$$\dot{y}(0) = -g \cdot 0 + C = C \stackrel{!}{=} v_{y0} \rightarrow C = v_{y0}$$

Rozszerzenie!

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{y0} \cdot t + y_0 \quad \text{spr. } [-\frac{1}{2}gt^2] = \frac{m}{s^2} \cdot s^2 = m$$

$$\vec{r}(t) = (v_{0x} \cdot t + x_0, -\frac{1}{2}gt^2 + v_{y0} \cdot t + y_0, v_{0z} \cdot t + z_0) = +\frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$$

$$\vec{v}(t) = (v_{0x}, -gt + v_{y0}, v_{0z}) = \vec{g} \cdot t + \vec{v}_0$$

Ogólne rozwiązanie
zgodnie z p.m.
w stałym polu graw.

Bez utraty ogólności możemy założyć

$$\vec{r}_0 = (0, h, 0)$$

Wówczas położenie w funkcji czasu możemy zapisać

$$\vec{r}(t) = (v_{x0} \cdot t, -\frac{1}{2}gt^2 + v_{y0} \cdot t + h, v_{z0} \cdot t)$$

$$\vec{v}(t) = (v_{x0}, -gt + v_{y0}, v_{z0})$$

Zmiany prędkości tylko w kier. siły
To nie znaczy, że nie ma prędkości
w kier., w którym siła nie działa
↓ Aristoteles

③ Spadek swobodny

$$\vec{v}_0 = (0, 0, 0) = \vec{0} \quad \text{zerowe prędkości początkowe}$$

$$\vec{r}(t) = (0, -\frac{1}{2}gt^2 + h, 0) \quad \text{Problem stał się 1D}$$

$$\vec{v}(t) = (0, -gt, 0)$$

Pytanie: Po jakim czasie ciało spadnie z wysokości h ?
Zad.: podane jest na wysokości $y \neq 0$.

$$t_k: y(t_k) = 0$$

$$-\frac{1}{2}gt_k^2 + h = 0$$

$$t_k = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \text{spr } \left[\sqrt{\frac{2h}{g}} \right] = \sqrt{\frac{\frac{m}{s^2} \cdot m}{\frac{m}{s^2}}} = \sqrt{s^2} = s$$

Wniosek: czas upadku nie zależy od masy

Pokaz: zrzućmy 2 ciała (monety o różnych nominacjach)
i słuchamy
20gr - 3,2g; 1zł - 4,9g; 5zł - 6,5g

Wniosek: $t_k \sim \sqrt{h}$

$$g = 9,81 \frac{m}{s^2}$$

	h	t_k	$ v_k $	$E_k (m=5g)$
	1	0,45s	4,43 $\frac{m}{s}$	
wąsł wykielc.	1,81	1,75s		
Kujwo Wieno	15	1,75s		
Wieno kolone	40	2,85s	28,01 $\frac{m}{s}$	



Pytanie: Jaka prędkość będzie miało ciało w momencie upadku?

$$v_k = v(t_k) = -gt_k = -g \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh} \quad \text{spr } \left[\sqrt{2gh} \right] = \sqrt{\frac{m}{s^2} \cdot m} = \sqrt{\frac{m^2}{s^2}} = \frac{m}{s}$$

4) Rzut poziomy

$$\vec{v}_0 = (v_0, 0, 0)$$

$$\vec{r}(t) = (v_0 t, -\frac{1}{2} g t^2 + h, 0)$$

$$\vec{v}(t) = (v_0, -g t, 0)$$

Problem jest 2D

Motywacja:
 rzut poziomy spadek sw.

Jak wystrzelić strelbę, aby trafić w swobodnie spadający cel?

Uwaga: ruch w kierunku ~~poziomym~~ ^{pionowym} to nadal spadek swobodny!

⇒ Czas spadku nie zmienia się, $t_k = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Pokaż Oscar i strelba pneumatyczna — Gdzie celować?

Pytanie: Jak daleko poleci ciało w kier x zanim dotknie poziomu?

$$t_k = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

musi dać 0, ale sprawdzamy

$$\vec{r}(t_k) = (v_0 \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}, -\frac{1}{2} g \left(\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^2 + h, 0) =$$

$$(v_0 \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}, -\frac{1}{2} g \frac{2h}{g} + h, 0) =$$

$$(v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}, 0, 0)$$

$$\text{spr. } [v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}] = \frac{m}{s} \cdot \sqrt{\frac{m}{s^2}} = \frac{m}{s} \sqrt{s^2} = m$$

Zasięg $\sim v_0 \sqrt{h}$

$$\sqrt{\frac{2 \cdot 1}{9.81}} = \sqrt{0.20} = 0.45 \text{ s (} t_k \text{ z poprzedniej tabeli)}$$

Zał $h = 1 \text{ m}$

v_0

zasięg x_k

skok z wbiegnięciem $10 \frac{m}{s}$

4,5 m

$100 \frac{km}{h}$

rzut piłki (lewno) $30 \frac{m}{s}$

13,5 m

$200 \frac{km}{h}$

kopnięte piłki $60 \frac{m}{s}$

27 m

pocisk z karabinu $1000 \frac{m}{s}$

450 m

⑤ Rzut ukośny

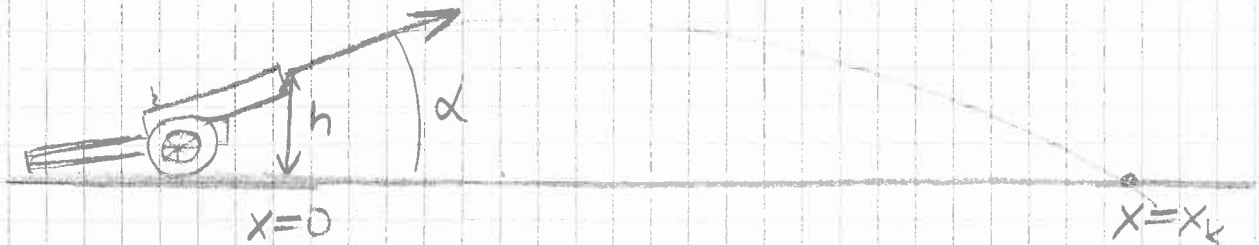
$|\vec{v}_0| = v_0$, kąt względem poziomu α

$$\vec{v}_0 = (v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha, 0)$$

$$\vec{v}(t) = (v_0 \cos \alpha \cdot t, -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha \cdot t + h, 0)$$

$$\vec{v}(t) = (v_0 \cos \alpha, -gt + v_0 \sin \alpha, 0)$$

Nadal zapominanie 2D



Trajektorja pocisku:

$$x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t \rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha \cdot t + h =$$

$$= -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha}\right)^2 + v_0 \sin \alpha \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha}\right) + h$$

$$= -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \operatorname{tg} \alpha \cdot x + h$$

dwukrotna parabola

Pytanie: Po jakim czasie pocisk spadnie na podłoże?

Równanie zapewnienia null pionowego (kier. y) z pr. por.

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \underbrace{v_0 \sin \alpha}_{v_{0y}} \cdot t + h$$

$$t_k: y(t_k) = 0$$

$$\left(-\frac{1}{2}g\right)t_k^2 + v_{0y} \cdot t_k + h = 0$$

$$\Delta = v_{0y}^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}g\right) \cdot h = v_{0y}^2 + 2gh$$

$$t_{1,2} = \frac{-v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 + 2gh}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}g\right)} = \frac{v_{0y}}{g} \pm \sqrt{\frac{v_{0y}^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}$$

$$t_k = \frac{v_{0y}}{g} + \sqrt{\frac{v_{0y}^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}$$

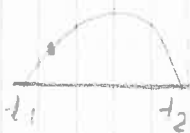
$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$t_1 < 0$$

$$t_k = t_2$$



⑥

Spr. $y(t_k) \stackrel{?}{=} 0$



$$t_k = \frac{v_{0y}}{g} + \sqrt{\frac{v_{0y}^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}$$

$$\begin{aligned} y(t_k) &= -\frac{1}{2}gt_k^2 + v_{0y} \cdot t_k + h = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_{0y}}{g} + \sqrt{\frac{v_{0y}^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}\right)^2 + v_{0y}\left(\frac{v_{0y}}{g} + \sqrt{\frac{v_{0y}^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}\right) + h = \\ &= -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_{0y}^2}{g^2} + 2\frac{v_{0y}}{g}\sqrt{\frac{v_{0y}^2}{g^2} + \frac{2h}{g}} + \frac{v_{0y}^2}{g^2} + \frac{2h}{g}\right) + \frac{v_{0y}^2}{g} + v_{0y}\sqrt{\frac{v_{0y}^2}{g^2} + \frac{2h}{g}} + h \neq 0 \\ &= -\frac{v_{0y}^2}{2g} - v_{0y}\sqrt{\frac{v_{0y}^2}{g^2} + \frac{2h}{g}} - \frac{v_{0y}^2}{2g} - h + \frac{v_{0y}^2}{g} + v_{0y}\sqrt{\frac{v_{0y}^2}{g^2} + \frac{2h}{g}} + h = 0 \end{aligned}$$

Pytanie: Jaka jest prędkość pocisku w momencie uderzenia?

$$\vec{v}(t_k) = (v_0 \cos \alpha, -gt_k + v_0 \sin \alpha, 0)$$

Z zas. zach. energii: energia kinetyczna na wys. h jest taka sama, w momencie wystąpienia. Będą speed swobodny z wys. h.

$$\begin{aligned} v_y(t_k) &= -g\left(\frac{v_{0y}}{g} + \sqrt{\frac{v_{0y}^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}\right) + v_{0y} = -v_{0y} - \sqrt{v_{0y}^2 + 2gh} + v_{0y} = \\ &= -\sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh} \end{aligned}$$

$$\vec{v}(t_k) = (v_0 \cos \alpha, -\sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh}, 0)$$

$$|v(t_k)|^2 = \underbrace{v_0^2 \cos^2 \alpha + v_0^2 \sin^2 \alpha}_{v_0^2} + 2gh = \underbrace{v_0^2}_{\text{pr. pow.}} + \underbrace{2gh}_{\text{mały dodatek}}$$

$$|v(t_k)| = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

Pytanie: Jaki jest zasięg pocisku?

$$x(t_k) = v_0 \cos \alpha \cdot t_k = v_0 \cos \alpha \cdot \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2} + \frac{2h}{g}}\right)$$

Jeżeli armata stoi na poziomie, to wysokość h nie jest ważna.

Zat. $h=0$

$$x(t_k) = v_0 \cos \alpha \left(2 \cdot \frac{v_0 \sin \alpha}{g}\right) = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin 2\alpha$$

7) Dla $h=0$

$$t_k = \frac{v_{0y}}{g} + \sqrt{\frac{v_{0y}^2}{g^2} + 0} = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

$$v(t_k) = \sqrt{v_0^2 + 0} = v_0 \text{ prędkość końcowa}$$

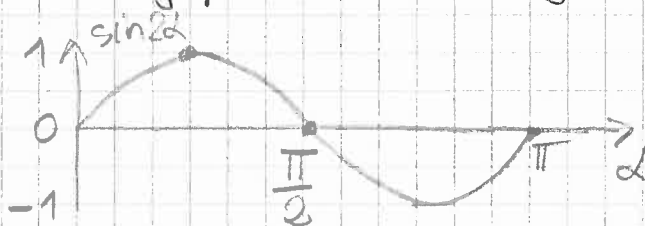
$$x(t_k) = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \text{ zasięg}$$

Pytanie: Dla jakiego kąta α zasięg pocisku jest maksymalny?

$$x(t_k) = x_k = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

$$\sin(2\alpha) = 1 \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$



Wówczas $x(t_k) = \frac{v_0^2}{g} \sim v_0^2$

Por. zasięg w ruchu
poziomym z h
 $x_k \sim v_0 \sqrt{h}$

v_0	x_k	nut poziomy
$10 \frac{m}{s}$	10,2 m	4,5 m
$30 \frac{m}{s}$	91,74 m	13,5 m
$60 \frac{m}{s}$	366,97 m	27 m
$1000 \frac{m}{s}$	$\approx 100 \text{ km}$	450 m

Do wzoru ten
Inaczej wychodzi g

$$\text{spr } \left[\frac{v_0^2}{g} \right] = \frac{\left(\frac{m}{s} \right)^2}{\frac{m}{s^2}} = \frac{m^2}{s^2} \cdot \frac{s^2}{m} = m$$

Pytanie: Odwrotny problem. Chcemy trafić w cel oddległy o x_{cel} .
Jaki powinniśmy ustawić kąt?

$$x_k = x(t_k) = x_{\text{cel}}$$

$$\frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha = x_{\text{cel}}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{g \cdot x_{\text{cel}}}{v_0^2}$$

$$2\alpha = \arcsin\left(\frac{g \cdot x_{\text{cel}}}{v_0^2}\right)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{g \cdot x_{\text{cel}}}{v_0^2}\right)$$

Chcemy trafić w punkt oddległy o 5m

$$v_0 = 10 \frac{m}{s}$$

Jaki powinniśmy ustawić kąt?



Zrobić w domu! Czy stawimy miejsce
do sufitu?

8) Energia

Wrócimy do ogólnego przypadku dla $\vec{F}_g = (0, -g, 0)$

$$\vec{r}_0 = (0, h, 0)$$

$$\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) \quad v_0^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_{0z}^2$$

$$\vec{r}(t) = (v_{0x} \cdot t, -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y} \cdot t + h, v_{0z} \cdot t)$$

$$\vec{v}(t) = (v_{0x}, -gt + v_{0y}, v_{0z})$$

Energia kinetyczna

$$E_{kin} = \frac{m v^2(t)}{2} \quad E_{kin}(0) = \frac{m v_0^2}{2}$$

$$\begin{aligned} v^2(t) &= v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t) = v_{0x}^2 + (-gt + v_{0y})^2 + v_{0z}^2 = \\ &= v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_{0z}^2 - 2v_{0y}gt + g^2t^2 = \\ &= v_0^2 - 2v_{0y}gt + g^2t^2 \end{aligned}$$

$$E_{kin}(t) = \frac{m(v_0^2 - 2v_{0y}gt + g^2t^2)}{2} = E_{kin}(0) + \frac{m(g^2t^2 - 2gtv_{0y})}{2}$$

Energia potencjalna

$$E_{pot} : \vec{F} = -\text{grad } V(x, y, z) = -\left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}\right) V(x, y, z)$$

$$\vec{F}_g = (0, -g, 0)$$

$$x: 0 = -\frac{\partial}{\partial x} V(x, y, z) \Rightarrow V \text{ nie zależy od } x \text{ i } z$$

$$y: -mg = -\frac{\partial}{\partial y} V(y)$$

$$\frac{d}{dy} V(y) = mg$$

$$V(y) = mgy + C$$

Ważne zwołanie ma pochodna V ,
a nie samo $V \rightarrow$ stała, możemy
dobrać wartość swojej wyprawy

$E_{pot} = V$ wartość energii potencjalnej
jest równa potencjalnej pole
w danym punkcie

$$C = 0$$

$$E_{pot}(0) = \int_{y=h}^0 mgy \, dy = mg \cdot h$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{9} \quad E_{\text{pot}}(t) &= mg \cdot y(t) = mg \left(-\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + h \right) = \\
 &= m \left(-\frac{gt^2}{2} + g v_{0y}t + gh \right) = \cancel{E_{\text{pot}}(0)} + \\
 &= E_{\text{pot}}(0) + m \left(-\frac{gt^2}{2} + v_{0y}g \cdot t \right)
 \end{aligned}$$

Energia całkowita (mechaniczna)

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$$

$$\begin{aligned}
 E(t) &= E_{\text{kin}}(0) + \frac{m(gt^2 - 2gtv_{0y})}{2} + E_{\text{pot}}(0) + \frac{m(-gt^2 + 2gtv_{0y})}{2} = \\
 &= E_{\text{kin}}(0) + E_{\text{pot}}(0) = E(0) = \text{const}
 \end{aligned}$$

całka ruchu \Leftrightarrow równomierność
w stałym polu \Leftrightarrow względem przes.
w czasie

• Czy spełniona jest zasada zachowania pędu?

Nie, bo układ nie jest izolowany (działa zewnętrzne siła)

10) OSCYLATOR HARMONICZNY

$$\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) = -k(\vec{r} - \vec{r}_{\text{rown}}) = (-k\Delta x, -k\Delta y, -k\Delta z)$$

Prawo Hooke'a

$$\Delta \vec{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

Ruch w każdym kierunku jest niezależny \rightarrow 3 oscylatory 1D

$$F_x \equiv F = -k(x - x_{\text{rown}})$$

Równanie ruchu 1D:

$$m\ddot{x} = -k(x - x_{\text{rown}})$$

$$m\ddot{x} + kx = kx_{\text{rown}} = \text{const}$$

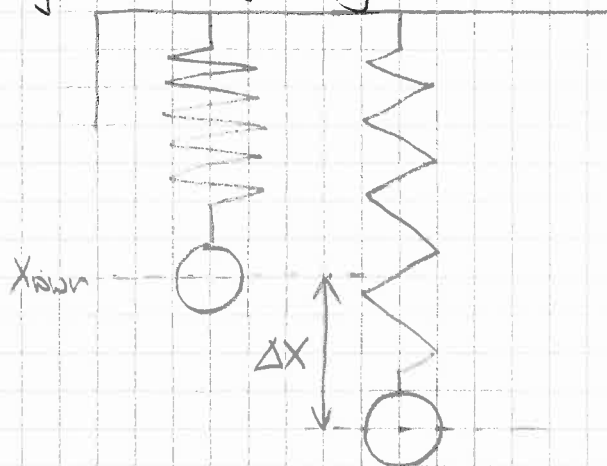
Rozwiązaniem będzie $x(t)$

Zgadujemy ~~z~~ postać rozwiązania:

$$x(t) = A \cos(\omega_1 t + \varphi) + x_1$$

$$\dot{x}(t) = -\omega_1 A \sin(\omega_1 t + \varphi)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega_1^2 A \cos(\omega_1 t + \varphi)$$



\leftarrow 4 parametry (pozostaje 2)

A - amplituda

ω - częstość drgań

φ - faza

x_1 - położenie średnie

Wstawiamy do równania

$$m(-\omega_1^2 A \cos(\omega_1 t + \varphi)) + k(A \cos(\omega_1 t + \varphi) + x_1) = kx_{\text{rown}}$$

$$(-m\omega_1^2 + k)A \cos(\omega_1 t + \varphi) - k(x_{\text{rown}} - x_1) = 0$$

Spełnione \Leftrightarrow

$$\begin{cases} -m\omega_1^2 + k = 0 \rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ x_{\text{rown}} - x_1 = 0 \rightarrow x_1 = x_{\text{rown}} \end{cases}$$

- oscylator oscyluje z częstością, które nie zależą od warunków początkowych.

Pozostałe 2 parametry (A i φ) wyznacza, warunki początkowe - 2 stałe całkowania

Oraz. $\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

Pokaz Sprawdźmy z zaleszonymi ciężarkami o różnych masach

11) Energia oscylatora

Energia kinetyczna:

$$E_{\text{kin}}(t) = \frac{m v^2(t)}{2}$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{m \omega^2}_{k} A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

Energia potencjalna:

$$\vec{F}_{\text{spr}} = -\frac{\partial}{\partial x} V(x)$$

$$V(\vec{r}) = V(x) + V(y) + V(z)$$

$$-k(x - x_{\text{rown}}) = -\frac{\partial}{\partial x} V(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} V(x) = k(x - x_{\text{rown}})$$

$$V(x) = \frac{1}{2} k x^2 - k x_{\text{rown}} x + C$$

Ustalimy $C = \frac{1}{2} k x_{\text{rown}}^2$, wówczas $V(x) = \frac{1}{2} k x^2 - k x_{\text{rown}} x + \frac{1}{2} k x_{\text{rown}}^2 = \frac{1}{2} k (x - x_{\text{rown}})^2$

Spr. $-\frac{\partial}{\partial x} V(x) = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} k (x - x_{\text{rown}})^2 = -\frac{1}{2} \cdot 2k (x - x_{\text{rown}}) \cdot 1 = -k(x - x_{\text{rown}})$

$$E_{\text{pot}}(t) = \frac{1}{2} k (A \cos(\omega t + \varphi) + x_{\text{rown}} - x_{\text{rown}})^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

Energia całkowita

$$E_{\text{kin}}(t) + E_{\text{pot}}(t) = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} k A^2 = \text{const}$$

12

Wyznaczenie amplitudy i fazy z warunków początkowych

$$x(0) = A \cos(\omega \cdot 0 + \varphi) + x_{\text{wibn}} \stackrel{!}{=} X_0 \quad \text{- położenie początkowe}$$

$$\Rightarrow A \cos \varphi = X_0 - x_{\text{wibn}} = \Delta X_0 \quad \text{- wychylenie początkowe}$$

$$v(0) = -\omega A \sin(\omega \cdot 0 + \varphi) = v_0 \quad \text{- prędkość początkowa}$$

$$\Rightarrow -\omega A \sin \varphi = v_0$$

$$A \cos \varphi = \Delta X_0 \rightarrow A = \frac{\Delta X_0}{\cos \varphi}$$

$$-\omega \left(\frac{\Delta X_0}{\cos \varphi} \right) \cdot \sin \varphi = v_0$$

$$\text{tg } \varphi = -\frac{v_0}{\omega \Delta X_0}$$

Zał. $\Delta X_0 \neq 0, v_0 = 0$ - nalegamy sprężynę i puszcamy

$$v_0 = 0 \rightarrow \varphi = 0 \rightarrow A = \frac{\Delta X_0}{\cos 0} = \Delta X_0$$

$$x(t) = A \cos(\omega t) + x_{\text{wibn}} = \Delta X_0 \cos(\omega t) + x_{\text{wibn}}$$

W domu: Rozwiązać zagadnienie ruchu ładunku w polu elektromagnetycznym (wznie tylko pole elektr.)



$$\vec{F}_e = \cancel{q} \cdot \vec{E}$$

$$\cancel{\vec{d} = q \vec{x}}$$

$$\vec{E} = \hat{x} E_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Dalej dla elektronu, tzn. $q = -e$

$$\vec{F} = (-e \cdot E_0 \cos(\omega t + \varphi), 0, 0) \quad \text{zagadnienie 1D}$$

$$F = -e E_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad \omega \text{ i } \varphi \text{ są zwrane}$$

Przyjąć warunki początkowe

$$x(0) = 0$$

$$v(0) = 0$$

Obliz $x(t)$, wpływ fazy φ na ruch ładunku, kiedy $\overline{v(t)} = 0$

Może być na egzaminie

(13)

Ciekawostka - Rozwiązanie zgodniście ruchu w stałym polu pól zgodniście wzrastające

Równanie

$$\ddot{y}(t) = -g$$

Zgadujemy rozwiązanie: wielomian $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n t^n$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n t^n \right) = -g$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \frac{d^2}{dt^2} (t^n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \frac{d}{dt} (n t^{n-1}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n n(n-1) t^{n-2} = -g$$

$P = \text{stała} \Rightarrow L = \text{stała} \Rightarrow$ tylko wyraz $n=2 \Rightarrow \forall n \neq 2, b_n = 0$
lub $n(n-1) = 0$

To oznacza, że nieliczne współczynniki mogą być tylko dla $n=0, 1, 2$: b_0, b_1, b_2

$$y(t) = b_0 t^0 + b_1 t^1 + b_2 t^2$$

$$n=2: b_2 \cdot 2(2-1) t^{2-2} = -g$$

$$2b_2 = -g$$

$$b_2 = -\frac{1}{2}g$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + b_1 t + b_0$$

b_1 i b_0 wyznaczymy z warunków początkowych

(14)

OSCYLATOR TŁUMIONY

Siła oporu (światła) lub niesprężyste prąże Hooke

$$\vec{F}_{op} = -b\vec{v}$$

$$3D: \vec{F} = -k(\vec{r} - \vec{r}_{w\ddot{o}wn}) - b\vec{v}$$

$$m(\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)) + b(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) + k(x(t), y(t), z(t)) = k\vec{r}_{w\ddot{o}wn}$$

Nadal tny oscylatorowy jednowymiarowe - nie ma mieszanie współrzędnych

$$\begin{cases} m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = kx_{w\ddot{o}wn} \\ m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = ky_{w\ddot{o}wn} \\ m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = kz_{w\ddot{o}wn} \end{cases}$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = kx_{w\ddot{o}wn}$$

$$\ddot{x} + 2\left(\frac{b}{2m}\right)\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}x_{w\ddot{o}wn}$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2x = \omega^2x_{w\ddot{o}wn}$$

b. ważne zapamiętanie w perspektywie symulacji ciał z elastycznością (ciał miękkich) np. symulacji tkanin, ciał sprężystych itp. → gry

Znane parametry oscylatorowe: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\beta = \frac{b}{2m}$

Zgadujemy rozwiązanie

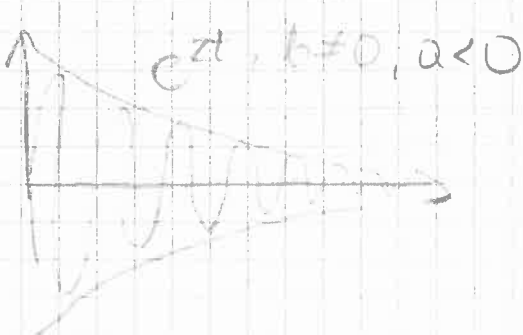
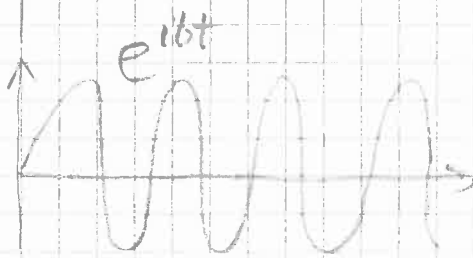
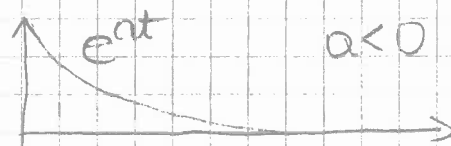
$$x(t) = Ae^{zt} + x_1 \quad \begin{matrix} A \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{C} \end{matrix}$$

$$\dot{x}(t) = zAe^{zt}$$

$$\ddot{x}(t) = z^2Ae^{zt}$$

$$z = a + bi$$

$$e^{zt} = e^{at+ibt} = e^{at}e^{ibt}$$



Ustawiamy do równania

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2x = \omega^2x_{w\ddot{o}wn}$$

$$(z^2Ae^{zt}) + 2\beta(zAe^{zt}) + \omega^2(Ae^{zt} + x_1) = \omega^2x_{w\ddot{o}wn}$$

$$= \omega^2x_{w\ddot{o}wn} = \omega^2x_{w\ddot{o}wn}$$

$$Ae^{zt}(z^2 + 2\beta z + \omega^2) + \omega^2(x_1 - x_{w\ddot{o}wn}) = 0$$

$$z^2 + 2\beta z + \omega^2 = 0 \quad \text{ci} \quad x_1 - x_{w\ddot{o}wn} = 0$$

$$\Delta = (2\beta)^2 - 4\omega^2$$

$$= 4(\beta^2 - \omega^2)$$

$$x_1 = x_{w\ddot{o}wn}$$

(15)

$$z_{1,2} = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4(\beta^2 - \omega^2)}}{2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega^2}$$

Dwa warunki, które należy uwzględnić

$$x(t) = A_1 e^{z_1 t} + A_2 e^{z_2 t} + x_{\text{wzwn}}$$

Oscylacje pojawiają się, gdy $\beta^2 < \omega^2$: $z_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{-(\omega^2 - \beta^2)} = -\beta \pm i\sqrt{\omega^2 - \beta^2}$
 ozn. $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}$

W przypadku pojawienia się oscylacji $\tilde{\omega} < \omega$ (częstota oscylacji jest mniejsza niż w oscylatorze tłumionym bez tłumienia).

Ustalanie parametrów warunków z warunków początkowych

$$\dot{x}(t) = z_1 A_1 e^{z_1 t} + z_2 A_2 e^{z_2 t} + x_{\text{wzwn}} \quad \square$$

$$x(0) = A_1 e^0 + A_2 e^0 + x_{\text{wzwn}} \stackrel{!}{=} x_0$$

$$A_1 + A_2 = x_0 - x_{\text{wzwn}} = \Delta x_0$$

$$A_1 = \Delta x_0 - A_2$$

$$\dot{x}(0) = z_1 A_1 e^0 + z_2 A_2 e^0 + x_{\text{wzwn}} = v_0$$

$$z_1 (\Delta x_0 - A_2) + z_2 A_2 + x_{\text{wzwn}} = v_0$$

$$A_2 (z_2 - z_1) = v_0 - z_1 \Delta x_0$$

$$A_2 = \frac{v_0 - z_1 \Delta x_0}{z_2 - z_1}$$

$$A_1 = \Delta x_0 - \left(\frac{v_0 - z_1 \Delta x_0}{z_2 - z_1} \right) = \frac{\Delta x_0 (z_2 - z_1) - v_0 + z_1 \Delta x_0}{z_2 - z_1} =$$

$$= \frac{-v_0 + \Delta x_0 z_2}{z_2 - z_1}$$

$$z_1 = -\beta - i\tilde{\omega}$$

$$z_2 = -\beta + i\tilde{\omega}$$

$$z_2 - z_1 = 2i\tilde{\omega}$$

$$z_2 - z_1 = +2\beta i\tilde{\omega}$$

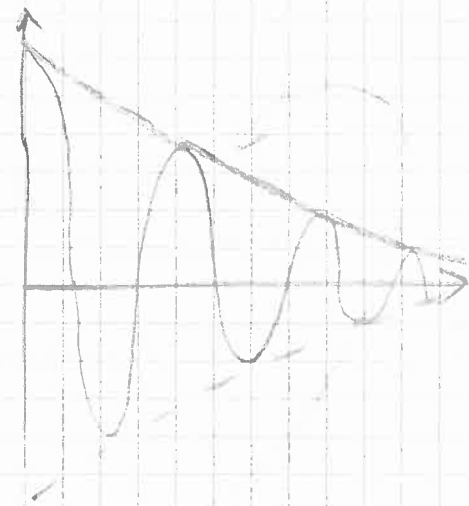
16

- Przypadek 1° $\omega^2 > \beta^2$

$$z_{1,2} = -\beta \pm i\tilde{\omega}$$

$$x(t) = A_1 e^{(-\beta + i\tilde{\omega})t} + A_2 e^{(-\beta - i\tilde{\omega})t} + x_{\text{wzwn}}$$

$$= e^{-\beta t} (A_1 e^{i\tilde{\omega}t} + A_2 e^{-i\tilde{\omega}t}) + x_{\text{wzwn}}$$



- Przypadek 2° $\omega^2 = \beta^2$

$$z_1 = z_2 = -\beta$$

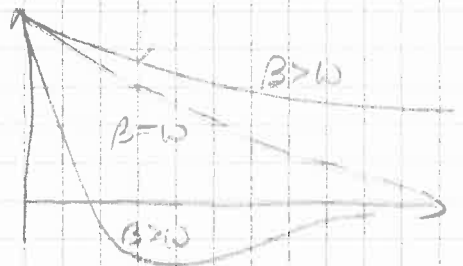
$$x(t) = A_1 e^{-\beta t} + A_2 t e^{-\beta t} + x_{\text{wzwn}} = A e^{-\beta t} + x_{\text{wzwn}}$$

- Przypadek 3° $\omega^2 < \beta^2$

$$z_{1,2} = -\beta \pm \tilde{\omega}$$

$$x(t) = A_1 e^{(-\beta - \tilde{\omega})t} + A_2 e^{(-\beta + \tilde{\omega})t} + x_{\text{wzwn}}$$

$$= e^{-\beta t} (A_1 e^{-\tilde{\omega}t} + A_2 e^{\tilde{\omega}t}) + x_{\text{wzwn}}$$



kombinacje dwóch f. wykładniczych.

NUMERYCZNE CAŁKOWANIE RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE

$$\frac{d\vec{y}}{dt} \left[\frac{dy}{dt} = f(y, t) \right] \quad y = \{y_i\} \quad y - \text{stan układu}$$

Równania wyższych rzędów (np. równanie Newtona) można zawsze sprowadzić do wielu równań pierwszego rzędu

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{1}{m} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \quad \begin{matrix} \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 \\ \dot{\vec{r}}(t_0) = \dot{\vec{r}}_0 \end{matrix}$$

Stosujemy podstawienie

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

Zagadnienie typu "initial value problem"

uzyskamy

$$\begin{cases} \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{1}{m} \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) \\ \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}(t) \end{cases}$$

$$y = \{x, v_x, y, v_y, z, v_z\} - \text{stan ukł.}$$

Algorytm Eulera - najprostsz y algorytm całkowania ODE

Trzy wyproachenie

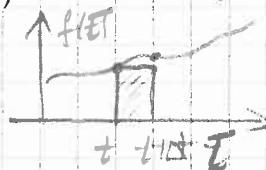
1° Iloraz różnicowy

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = f(y, t) \Rightarrow y(t+\Delta t) = y(t) + f(t) \cdot \Delta t$$

2° Całkowanie przy założeniu, że f -state w $(t, t+\Delta t)$

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t)$$

$$[y(t)]_t^{t+\Delta t} = \int_t^{t+\Delta t} f(y, t) dt$$



$$y(t+\Delta t) - y(t) = f(y, t) \int_t^{t+\Delta t} dt = f(y, t) \Delta t \Rightarrow y(t+\Delta t) = y(t) + f(t) \Delta t$$

Metoda Eulera jest równoważna całkowaniu, że $f(y, t)$ jest state podczas kroku i równe wartości z początku każdego przedziału

3° Szereg Taylora - b. ważny w metodach numerycznych

Pozwala obliczyć wartości funkcji w jakimś punkcie na podstawie wartości i ich pochodnych (zmiennosci) w innym punkcie

$$y(t+\Delta t) = y(t) + \frac{\dot{y}(t)}{1!} \Delta t + \frac{\ddot{y}(t)}{2!} \Delta t^2 + \frac{\dddot{y}(t)}{3!} \Delta t^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(t)}{n!} \Delta t^n$$

obliczamy na dwóch węzłach $O(\Delta t^2)$

$$y(t+\Delta t) = y(t) + \underset{f(y,t)}{\dot{y}(t)} \Delta t \rightarrow \underline{y(t+\Delta t) = y(t) + f(y,t) \Delta t}$$

Zastosujemy „Eulera” do równań Newtona

waż jak w nich jednost. przyp.

$$\int \frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{1}{m} \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) = \vec{a}(t) \rightarrow \vec{v}(t+\Delta t) = \vec{v}(t) + \vec{a}(t) \Delta t \quad (1)$$

$$\left\{ \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(t) \right. \rightarrow \vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \vec{v}(t) \Delta t \quad (2)$$

waż jak w nich jednost.

Sztuczka: zamiast $\vec{v}(t)$ w (2) wzięjemy $\vec{v}(t+\Delta t)$ z (1)

Wówczas:

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \vec{v}(t+\Delta t) \Delta t$$

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + (\vec{v}(t) + \vec{a}(t) \Delta t) \Delta t$$

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \vec{v}(t) \Delta t + \vec{a}(t) \Delta t^2$$

bud. $\frac{1}{2}$ w porównaniu do wzoru na nich jedn. przyp.

Algorytm Verleta (podstawowy / potonienowy)

Pierwszy wybór w przypadku równań Newtona

Szereg Taylora dla $\vec{r}(t+\Delta t)$ i $\vec{r}(t-\Delta t)$

- $$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{1!} \Delta t + \frac{\ddot{\vec{r}}(t)}{2!} \Delta t^2 + \frac{\overset{\circ}{\ddot{\vec{r}}}(t)}{3!} \Delta t^3 + O(\Delta t^4)$$
$$= \vec{r}(t) + \dot{\vec{r}}(t) \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\vec{r}}(t) \Delta t^2 + \frac{1}{6} \overset{\circ}{\ddot{\vec{r}}}(t) \Delta t^3 + O(\Delta t^4)$$
- $$\vec{r}(t-\Delta t) = \vec{r}(t) - \dot{\vec{r}}(t) \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\vec{r}}(t) \Delta t^2 - \frac{1}{6} \overset{\circ}{\ddot{\vec{r}}}(t) \Delta t^3 + O(\Delta t^4)$$

Dodajemy stronami $\bullet + \bullet$

$$\vec{r}(t+\Delta t) + \vec{r}(t-\Delta t) = 2\vec{r}(t) + 2 \cdot \frac{1}{2} \ddot{\vec{r}}(t) \Delta t^2 + O(\Delta t^4)$$

$$\vec{r}(t+\Delta t) = -\vec{r}(t-\Delta t) + 2\vec{r}(t) + \ddot{\vec{a}}(t) \Delta t^2$$

- Do obliczenia most potrzebne dwa poprzednie położenia (praktycznie są w opole ładunku)
- Pierwszy krok wymaga dwóch potonien \Rightarrow pierwszy krok np. Eulera

Odpowiadając dobry przepis na obliczenie drugiej pochodnej

$$\overset{\circ}{\ddot{\vec{r}}}(t) = \frac{\vec{r}_{n-1} - 2\vec{r}_n + \vec{r}_{n+1}}{\Delta t^2}$$

Odejmujemy stronami $\bullet - \bullet$

$$\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t-\Delta t) = 2\overset{\parallel}{\dot{\vec{r}}}(t) \Delta t + O(\Delta t^3)$$

$$\overset{\parallel}{\dot{\vec{v}}}(t) = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t-\Delta t)}{2\Delta t} \longrightarrow$$

- Praktycznie linijny tylko, gdy jest do niego potrzebne (mniejsza dokładność)

Ogólny przepis na pierwszą pochodną (lepszy niż iloraz różnicowy)

$$\overset{\parallel}{\dot{\vec{v}}}(t) = \frac{\vec{r}_{n+1} - \vec{r}_{n-1}}{2\Delta t}$$

Zwykle szukamy pierwszych potonien obiektów (ewolucja w czasie).
Mnie to jednakże zadaje pytanie "jakie muszą być warunki powstania, aby końcowy stan był taki, jak chcemy?"
Wówczas istnieje wybór odpowiedniej wersji algorytmu Verleta

$$\vec{r}(t-\Delta t) = -\vec{r}(t+\Delta t) + 2\vec{r}(t) + \ddot{\vec{a}}(t) \Delta t^2$$

w pierwszym kroku Euler: $y(t) = y(t+\Delta t) - f(y, t) \Delta t$

Algorytm Verleta (praktyczny)

Szereg Taylora dla $\vec{r}(t+\Delta t)$

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \dot{\vec{r}}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{\vec{r}}(t)\Delta t^2 + \frac{1}{6}\dddot{\vec{r}}(t)\Delta t^3$$

② $\vec{r}(t+\Delta t) \approx \vec{r}(t) + \dot{\vec{r}}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{\vec{r}}(t)\Delta t^2$

Gdyby $\vec{a}(t) = \vec{a} = \text{const}$ - dokładny wzór na położenie w ruchu jednostajnie przyspieszonym

Analogicznie

$$\vec{v}(t+\Delta t) \approx \vec{v}(t) + \dot{\vec{v}}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{\vec{v}}(t)\Delta t^2$$

↑ przyspieszenie ↑ szarpnięcie (zryw)

$$\vec{a}(t+\Delta t) \approx \vec{a}(t) + \dot{\vec{a}}(t)\Delta t \longrightarrow \dot{\vec{a}}(t) = \frac{\vec{a}(t+\Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t}$$

wszysty iloraz różnicowy

$$\vec{v}(t+\Delta t) \approx \vec{v}(t) + \vec{a}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{a}(t+\Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t}\right)\Delta t^2 =$$

$$= \vec{v}(t) + \vec{a}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}(t)\Delta t - \frac{1}{2}\dot{\vec{a}}(t)\Delta t^2$$

$$= \vec{v}(t) + \vec{a}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}(t+\Delta t)\Delta t - \frac{1}{2}\dot{\vec{a}}(t)\Delta t^2$$

$$\vec{v}(t+\Delta t) = \underbrace{\vec{v}(t) + \frac{1}{2}\vec{a}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}(t+\Delta t)\Delta t}_{\vec{v}(t+\frac{\Delta t}{2})} = \vec{v}(t+\frac{\Delta t}{2}) + \vec{a}(t+\frac{\Delta t}{2})\Delta t$$

② $\vec{v}(t+\Delta t) = \vec{v}(t) + \frac{1}{2}(\vec{a}(t+\Delta t) + \vec{a}(t)) \cdot \Delta t$

① $\vec{a}(t+\Delta t) = \frac{\vec{F}(t+\Delta t)}{m}$

siła z sąsiednich

kadrów czasowych \rightarrow aby nie obliczać dwukrotnie należy przechowywać obliczone przyspieszenie

↓
przechowywanie 3 tablic $\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$

Podsumowanie

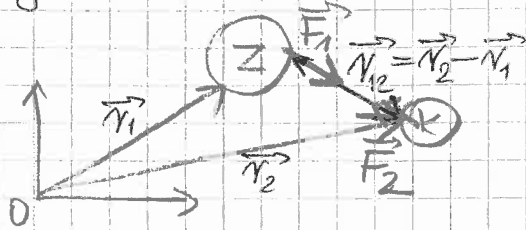
1. Obliczenie $\vec{a}(t+\Delta t)$ - kosztowne, jeżeli do obliczeń potrzebne $\vec{r}(t+\Delta t)$ lub $\vec{v}(t+\Delta t)$!

2. Obliczenie $\vec{v}(t+\Delta t)$

③ 3. Obliczenie $\vec{r}(t+\Delta t)$

Zagadnienie dwóch ciał - rozpisanie wektora stanu

np. Ziemia-Księżyc w 2D



III zasada dynamiki

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1 \quad F = \frac{GMm}{r_{12}}$$

Równania ruchu

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_1 = F \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \\ m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_2 = -F \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{F}{m_1} \frac{(x_2 - x_1)}{r_{12}} \\ \frac{d^2 y_1}{dt^2} = \frac{F}{m_1} \frac{(y_2 - y_1)}{r_{12}} \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\frac{F}{m_2} \frac{(x_2 - x_1)}{r_{12}} \\ \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -\frac{F}{m_2} \frac{(y_2 - y_1)}{r_{12}} \end{cases}$$

$$r_{12} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Mamy 4 równania 2-go rzędu

↳ 8 równań 1-go rzędu (N=8)

$$\frac{dx_1}{dt} = v_{x1}, \quad \frac{dv_{x1}}{dt} = \frac{F}{m_1} \frac{(x_2 - x_1)}{r_{12}}$$

$$\frac{dy_1}{dt} = v_{y1}, \quad \frac{dv_{y1}}{dt} = \frac{F}{m_1} \frac{(y_2 - y_1)}{r_{12}}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = v_{x2}, \quad \frac{dv_{x2}}{dt} = -\frac{F}{m_2} \frac{(x_2 - x_1)}{r_{12}}$$

$$\frac{dy_2}{dt} = v_{y2}, \quad \frac{dv_{y2}}{dt} = -\frac{F}{m_2} \frac{(y_2 - y_1)}{r_{12}}$$

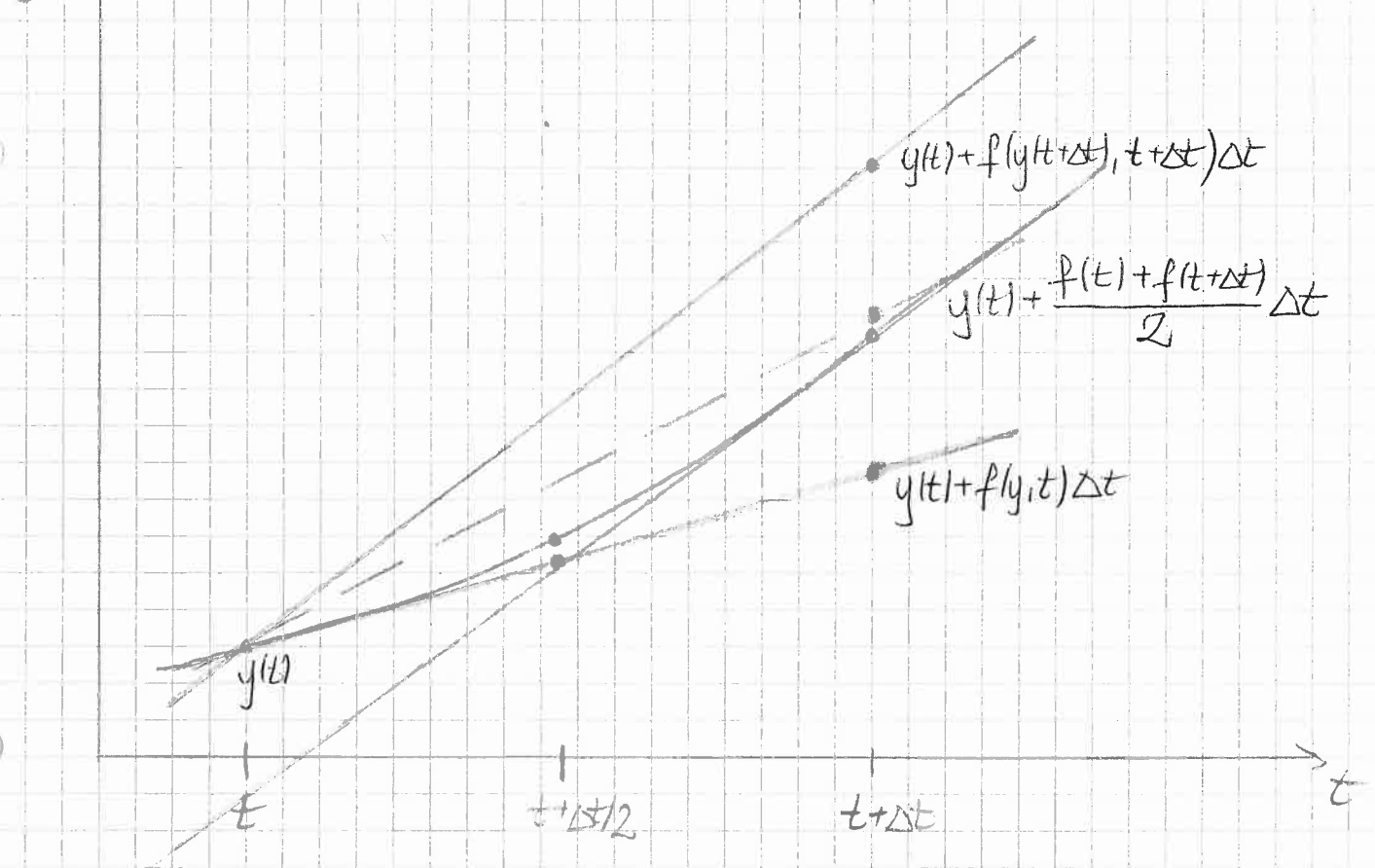
$$y_0 = x_1, \quad y_1 = v_{x1}, \quad y_2 = y_1, \quad y_3 = v_{y1}, \quad y_4 = x_2, \quad y_5 = v_{x2}, \quad y_6 = y_2, \quad y_7 = v_{y2}$$

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(\{y_i\}_{i=0}^7, t)$$

Algorytm MidPoint

1. Euler: $y(t+\Delta t) = y(t) + f(y(t), t) \cdot \Delta t$ metoda **explicit** (jawna) wartości wzięte z początku przedziału całkowania - wartość z poprzedniego kroku
2. Modyfikacja: $y(t+\Delta t) = y(t) + f(y(t+\Delta t), t+\Delta t) \Delta t$ metoda **implicit** (niejawna) wartości f z końca przed.

3. Można też wziąć średniej obu powyższych



4. Inny pomysł: wziąć nachylenie ze środka przedziału $t + \frac{\Delta t}{2}$.
 Ale to zwykle niemożliwe, bo nie znamy $y(t + \frac{\Delta t}{2})$
 \Rightarrow Obliczymy próbnie wartości $y(t + \frac{\Delta t}{2})$ metodą Eulera

$$y(t + \frac{\Delta t}{2}) = y(t) + f(y(t), t) \frac{\Delta t}{2} \quad \text{- wszędzie metoda Eulera explicit}$$

Następnie obliczymy f korzystając z tej wartości $f(y(t + \frac{\Delta t}{2}), t + \frac{\Delta t}{2})$
 i obliczymy wartość na końcu:

$$y(t + \Delta t) = y(t) + f(y(t + \frac{\Delta t}{2}), t + \frac{\Delta t}{2}) \Delta t$$

Podwójne obliczenie, ale znacznie lepsze dokładności

Algorytm Runge-Kutty

Metoda explicit!

Ogólne sformułowanie metody RK

$$y(t+\Delta t) = y(t) + \sum_{i=1}^s \omega_i K_i$$

Treba w każdym kroku s-rang obliczyć $f(\cdot)$

$$K_1 = f(y, t) \cdot \Delta t$$

$$K_i = f\left(y + \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} K_j, t + a_i \Delta t\right)$$

$$0 \leq a_i \leq 1$$

$$s=1: y(t+\Delta t) = y(t) + \omega_1 K_1 = y(t) + f(y, t) \Delta t$$

Metoda Eulera
" RK1

$$s=2: y(t+\Delta t) = y(t) + \omega_1 K_1 + \omega_2 K_2$$

$$K_1 = f(y(t), t) \cdot \Delta t$$

treba znaleźć $\omega_1, \omega_2, b_{21}, a_2$

$$K_2 = f\left(y(t) + b_{21} K_1, t + a_2 \Delta t\right)$$

to wstawimy w szeregi Taylora $w(y, t)$

$$f(y + b_{21} f(y, t) \Delta t, t + a_2 \Delta t) = f(y, t) + \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{(y, t)} \cdot a_2 \Delta t + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(y, t)} \cdot b_{21} f(y, t) \Delta t$$

Różniczka zupełna

$$df(y, t) = \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

Wstawiamy do wzoru na $y(t+\Delta t)$

$$y(t+\Delta t) = y(t) + \omega_1 f(y, t) \Delta t + \omega_2 \left\{ f(y, t) + \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{(y, t)} a_2 \Delta t + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(y, t)} \cdot b_{21} f(y, t) \Delta t \right\} \Delta t =$$

$$y(t+\Delta t) = y(t) + (\omega_1 + \omega_2) f(y, t) \Delta t + \omega_2 \left(a_2 \frac{\partial f}{\partial t} + b_{21} \frac{\partial f}{\partial y} \cdot f \right) \Delta t^2$$

Dziewięć do powiornienia jest wprowadzenie w szeregi Taylora względem t :

$$y(t+\Delta t) = y(t) + \dot{y}(t) \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{y}(t) \Delta t^2 + \frac{1}{6} \dddot{y}(t) \Delta t^3 + \dots$$

$$\textcircled{2}-\textcircled{2} \quad (\omega_1 + \omega_2) f(y(t), t) \Delta t = \dot{y}(t) \Delta t$$

\parallel
 $f(y, t)$ pierwsze równanie

$$\omega_1 + \omega_2 = 1$$

$$\textcircled{2}-\textcircled{2} \quad \omega_2 \left(a_2 \frac{\partial f}{\partial t} + b_{21} \frac{\partial f}{\partial y} \cdot f \right) \Delta t^2 = \frac{1}{2} \ddot{y}(t) \Delta t^2$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \ddot{y}(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{y}(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (f(y, t)) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} f \right) \end{aligned}$$

\parallel
 $\dot{y} = f(y, t)$

$$\omega_2 \left(a_2 \frac{\partial f}{\partial t} + b_{21} \frac{\partial f}{\partial y} \cdot f \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} f \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_2 a_2 = \frac{1}{2} \\ \omega_2 b_{21} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a_2 = b_{21}$$

Otrzymaliśmy układ równań na $\omega_1, \omega_2, a_2, b_{21}$ - 4 niewiadome, a tylko 3 równania!

$$\begin{cases} \omega_1 + \omega_2 = 1 \\ \omega_2 = \frac{1}{2a_2} & a_2 \neq 0 \\ b_{21} = a_2 \end{cases}$$

\downarrow
silnie wzajemnie-
wzajemnie
niech parametrem będzie
 a_2

$$\omega_1 = 1 - \frac{1}{2a_2}$$

Dobór wartości wzajemnie:

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2a_2}\right)}_{\omega_1} f(y, t) \Delta t + \underbrace{\frac{1}{2a_2}}_{\omega_2} \cdot f\left(y + a_2 f(y, t) \Delta t, t + a_2 \Delta t\right)$$

Można dodatkowo przeprowadzić minimalizację błędów \rightarrow wyznaczenie a_2

Przyjmujemy $a_2 = 1 \Rightarrow \omega_2 = \omega_1 = \frac{1}{2}, b_{21} = 1$

$$y(t + \Delta t) = y(t) + f(y, t) \frac{\Delta t}{2} + f\left(y + \frac{f(y, t) \Delta t}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}\right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{k_1}$

Inna możliwość $a_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega_2 = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 1, \omega_1 = 1 - \omega_2 = 0, b_{21} = \frac{1}{2}$

$$y(t + \Delta t) = y(t) + 0 + 1 \cdot f\left(y + \frac{f(y, t) \Delta t}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}\right)$$

— metoda MidPoint
(jedna z metod RK2)

$\underbrace{\hspace{10em}}_{y(t + \frac{\Delta t}{2})}$

$S=4$ ze zoptymalizowanymi współczynnikami \rightarrow „optymalne RK4”

$$K_1 = f(y, t) \Delta t$$

$$K_2 = f\left(y + \frac{K_1}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}\right) \Delta t$$

$$K_3 = f\left(y + \frac{K_2}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}\right) \Delta t$$

$$K_4 = f(y + K_3, t + \Delta t) \Delta t$$

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) + O(\Delta t^5)$$

Bawno nasto uijwane metoda!

Automatyczne dopasowywanie kroku

- Step doubling – dowolna metoda

Co pewna ilosc krokow (nawet w kazdym) przeprowadzamy obliczenie raznowo dla Δt , jak i dla $\Delta t/2$. Jeieli wyniki sa wnie (wznie sa wieksze niz zalozony prog) to zmniejszamy krok. Jeieli sa „zbyt takie same” – mamy krok wydluzony.

Sprawdzanie w kazdym kroku – podwojne obliczenie.
Sprawdzenie rzadziej – moimoz przepokt krytyczny moment

- Uijcie metody kontrolnej

Zamiast zmniejszac krok moimoz uijc innej metody, ktora jest dokladniejsza i powinnac wyniki. Dobre postepowanie – rzadziej.
Metoda kontrolna, dla RK2 (MidPoint) moimoz byc RK4

- Runge-Kutta – Fehlberg

1960

1968

Dla RK z $S > 4$ ^{moimoz} potrzeba wiecej niz S wymerow K_i :
RK5 – 6, RK6 – 7, ~~RK8 – 11~~, RK7 – 9, RK8 – 11. Dlatego RK4 jest popularne

Fehlberg odkryl taki zestaw $\{K_i\}$, ktorej podwalie na obliczenie RK4 i jednoczesnie RK5 (niektoremy jako metoda kontrolna).
Ang. „embedded RK formula”. Znaczn wiec takich zestawow

Algorytm Runge-Kutta-4-Fehlberg 5 (RK4F5)

RK4 (orwedeg wadu $O(\Delta t^5)$) z p'acowne wynowom:

$$K_1 = f(y, t) \Delta t$$

$$K_2 = f\left(y + \frac{1}{4}K_1, t + \frac{\Delta t}{4}\right) \Delta t$$

$$K_3 = f\left(y + \frac{3}{32}K_1 + \frac{9}{32}K_2, t + \frac{3}{8}\Delta t\right) \Delta t$$

$$K_4 = f\left(y + \frac{1932}{2197}K_1 - \frac{7200}{2197}K_2 + \frac{7296}{2197}K_3, t + \frac{12}{13}\Delta t\right) \Delta t$$

$$K_5 = f\left(y + \frac{439}{216}K_1 - 8K_2 + \frac{3680}{513}K_3 - \frac{845}{4104}K_4, t + \Delta t\right) \Delta t$$

$$\text{RK4: } y(t + \Delta t) = y(t) + \frac{25}{216}K_1 + \frac{1408}{2565}K_3 + \frac{2197}{4104}K_4 - \frac{1}{5}K_5$$

Dokładając jeden wyraz

$$K_6 = f\left(y - \frac{8}{27}K_1 + 2K_2 - \frac{3544}{26565}K_3 + \frac{1859}{4104}K_4 - \frac{11}{40}K_5, t + \frac{\Delta t}{2}\right) \Delta t$$

można obliczyć RK5

$$\text{RK5: } y(t + \Delta t) = y(t) + \frac{16}{135}K_1 + \frac{6656}{12825}K_3 + \frac{28561}{56430}K_4 - \frac{9}{50}K_5 + \frac{2}{55}K_6$$

⇒ Niezłym dodatkowym kosztem obliczamy RK4 i RK5.
Należy powożać wyzniki i dobierać krok maksymalny → zap. 3 ord

Procedura RK4F5 lub RKF4(5)

- 1) Obliczamy wszystkie stety K_1/K_6 w₁-w₆
ustalamy wartości graniczne bładu (E_{\min}, E_{\max}) $E = |y_{\text{RK4}} - y_{\text{RK5}}|$
- 2) Obliczamy następną krok dla RK4 i RK5, obliczamy wartość E
- 3) Jeżeli $E_{\min} \leq E \leq E_{\max}$, to Δt pozostawiamy bez zmian → 2)
- 4) Jeżeli $E < E_{\min}$: $\Delta t \rightarrow \Delta t \cdot 2$ → następną krok
Jeżeli $E > E_{\max}$: $\Delta t \rightarrow \Delta t / 2$ → jeszcze ten ten sam krok

Można bardziej elastycznie dobierać krok np. $\Delta t_{\text{next}} = \Delta t \cdot S \cdot \left(\frac{1}{E}\right)^{1/5}$
 $\Delta t_{\text{next}} = \Delta t \cdot \left(\frac{S}{2E}\right)^{1/4}$