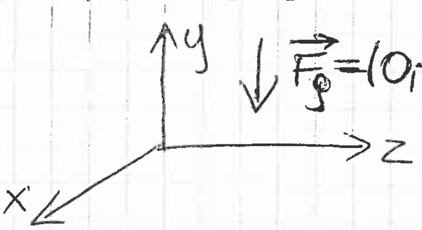
①

RUCH W STAŁYM POLU SIŁ GRAWITACYJNYCH

$$\vec{F}_g = m\vec{g} = -mg\hat{z}$$

<u>stała</u> siła



$\downarrow \vec{F}_g = (0, -g, 0)$

Isaac Newton $\overline{XVII}$ w

Szukamy $\vec{r}(t)$

Równanie ruchu

$$m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}}(t) = m\vec{g} = m(0, -g, 0)$$

$$\cancel{m}\ddot{\vec{r}}(t) = \cancel{m}\vec{g}$$

masa bezwładna = masa „grawitacyjna"

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{g}$$

Ruch w polu sił grawitacyjnych nie zależy od masy ciała. Od masy natomiast zależy <u>energia</u> ciała.

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = -g \\ \ddot{z}(t) = 0 \end{cases}$$

Przypomnienie

$$\int dt (ax^n) = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + C$$

$$\frac{d}{dt}(ax^n) = anx^{n-1}$$

$$\dot{x}(t) = \int dt\, g_x = \int dt (0) = C$$

$$x(t) = \int dt (C) = Ct + D$$

w kier. x i z – ruch jednostajny (ze stałą prędkością)

Potrzebujemy dwóch informacji do wyznaczenia stałych C i D

Mogą to być warunki początkowe w $t=0$: $x(0) = x_0$, $v_x(0) = v_0$

Ogólniej zażądamy

$$\vec{r}(0) = \vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\vec{v}_x(0) = \vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$$

$$x(0) = C \cdot 0 + D = D \stackrel{!}{=} x_0$$

$$\dot{x}(0) = C \stackrel{!}{=} v_{0x}$$

Rozwiązanie w kier. x: $\quad x(t) = v_{0x}\, t + x_0$

$$v_x(t) = v_{0x}$$

Jeżeli $v_{0x} = 0$ to $x = x_0$ ⇒ ciało pozostaje w spoczynku

(2)

Kierunek y

$$\ddot{y}(t) = -g$$

$$\dot{y}(t) = \int dt(-g) = -gt + C$$

$$y(t) = \int dt(-gt + C) = -\frac{1}{2}gt^2 + Ct + D$$

Warunki początkowe: $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = v_{y0}$

$$y(0) = -\frac{1}{2}g \cdot 0^2 + C \cdot 0 + D \overset{!}{=} y_0 \rightarrow D = y_0$$

$$\dot{y}(0) = -g \cdot 0 + C = C \overset{!}{=} v_{y0} \rightarrow C = v_{y0}$$

Rozwiązanie:

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{y0} \cdot t + y_0 \qquad \text{spr.} \left[-\frac{1}{2}gt^2\right] = \frac{m}{s^2} \cdot s^2 = m$$

$$\vec{r}(t) = \left(v_{0x} \cdot t + x_0, -\frac{1}{2}gt^2 + v_{y0} \cdot t + y_0, v_{0z} \cdot t + z_0\right) = +\frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$$

$$\vec{v}(t) = \left(v_{0x}, -gt + v_{y0}, v_{z0}\right) = \vec{g} \cdot t + \vec{v}_0$$

Ogólne rozwiązanie zagadnienia p.m. w stałym polu graw.

Bez utraty ogólności możemy założyć

$$\vec{r}_0 = (0, h, 0)$$

Wówczas położenie w funkcji czasu możemy zapisać

$$\vec{r}(t) = \left(v_{x0} \cdot t, -\frac{1}{2}gt^2 + v_{y0}t + h, v_{z0} \cdot t\right)$$

$$\vec{v}(t) = \left(v_{x0}, -gt + v_{y0}, v_{z0}\right)$$

Zmiany prędkości <u>tylko</u> w kier. siły
To nie znaczy, że nie ma prędkości w kier., w którym siła nie działa
↯ Arystoteles

③ Spadek swobodny

$\vec{v}_0=(0,0,0)=\vec{0}$ zerowe prędkości początkowe

$\vec{r}(t)=(0,-\frac{1}{2}gt^2+h,0)$
$\vec{v}(t)=(0,-gt,0)$ Problem stał się 1D

Pytanie: Po jakim czasie ciało spadnie z wysokości h?
Zał.: podłoże jest na wysokości $y=0$.

t_k: $y(t_k)=0$

$-\frac{1}{2}gt_k^2+h=0$

$t_k=\sqrt{\frac{2h}{g}}$ spr $\left[\sqrt{\frac{2h}{g}}\right]=\sqrt{\frac{m}{\frac{m}{s^2}}}=\sqrt{s^2}=s$

Wniosek: czas upadku nie zależy od masy

$\boxed{\text{Pokaz}}$: zrzucamy 2 ciała (monety o różnych nominałach) i słuchamy

20gr – 3,2g; 1zł – 4,9g; 5zł – 6,5g

Wniosek: $t_k \sim \sqrt{h}$

$\boxed{g=9{,}81\,\frac{m}{s^2}}$

	h	t_k	$\lvert v_k \rvert$	$E_k\ (m=5g)$
	1	0,45s	4,43 $\frac{m}{s}$	
wzrost wykład.	1,81	~~1,75s~~		
Krzywa Wieża	15	1,75s		
Wieża Kościoła	40	2,85s	28,01 $\frac{m}{s}$	

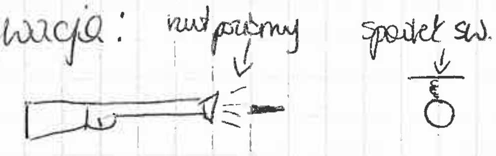
Pytanie: Jaką prędkość będzie miało ciało w momencie upadku?

$v_k=v(t_k)=-gt_k=-g\sqrt{\frac{2h}{g}}=-\sqrt{2gh}$ spr $\left[\sqrt{2gh}\right]=\sqrt{\frac{m}{s^2}m}=\sqrt{\frac{m^2}{s^2}}=\frac{m}{s}$

(4) Rzut poziomy

$$\vec{v}_0 = (v_0, 0, 0)$$

Motywacja:



Jak wycelować strzelbę, aby trafić w swobodnie padający cel?

$$\vec{r}(t) = \left(v_0 t, -\tfrac{1}{2} g t^2 + h, 0\right)$$
$$\vec{v}(t) = (v_0, -gt, 0)$$

Problem jest 2D

Uwaga: Ruch w kierunku poziomym to nadal spadek swobodny!
$\Rightarrow$ Czas spadku nie zmienia się, $t_k = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

$\boxed{\text{Pokaz}}$ Oscar i strzelba pneumatyczna – Gdzie celować?

Pytanie: Jak daleko poleci ciało w kier x zanim dotknie podłoża?

$$t_k = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\vec{r}(t_k) = \left(v_0 \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}, \overbrace{-\frac{1}{2} g \left(\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^2 + h}^{\text{musi dać } 0, \text{ ale sprawdzamy}}, 0\right) =$$

$$\left(v_0 \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}, -\frac{1}{\cancel{2}} \cancel{g} \frac{\cancel{2}h}{\cancel{g}} + h, 0\right) =$$

$$\left(v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}, 0, 0\right)$$

spr. $\left[v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}\right] = \frac{m}{s} \cdot \sqrt{\frac{m}{\frac{m}{s^2}}} = \frac{m}{s} \sqrt{s^2} = m$

Zasięg $\sim v_0 \sqrt{h}$

$\sqrt{\frac{2 \cdot 1}{9{,}81}} = \sqrt{0{,}20} = 0{,}45\,s$ (t_k z pop. tabeli)

Zał $\underline{\underline{h = 1m}}$

	v_0	zasięg x_k
	skok z wybiegiem $10\frac{m}{s}$	$4{,}5m$
$100\frac{km}{h}$	rzut piłką (ręczne) $30\frac{m}{s}$	$13{,}5m$
$200\frac{km}{h}$	kopnięta piłka $60\frac{m}{s}$	$27m$
	pocisk z karabinu $1000\frac{m}{s}$	$450m$

5. Rzut ukośny

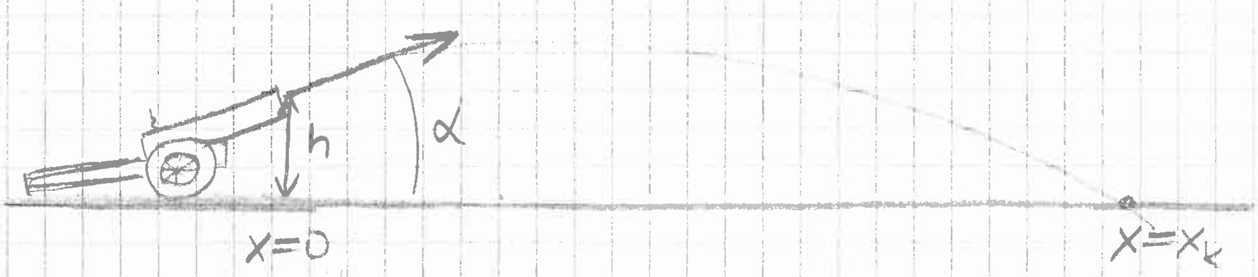
$|\vec{v}_0| = v_0$, kąt względem podłoża α

$\vec{v}_0 = (v_0 \cos\alpha, v_0 \sin\alpha, 0)$

$\vec{r}(t) = (v_0\cos\alpha \cdot t, -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\alpha\cdot t + h, 0)$

$\vec{v}(t) = (v_0\cos\alpha, -gt + v_0\sin\alpha, 0)$

Nadal zagadnienie 2D



Trajektoria pocisku: $x(t) = v_0\cos\alpha \cdot t \rightarrow t = \frac{x}{v_0\cos\alpha}$

$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\alpha\cdot t + h =$

$= -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + v_0\sin\alpha\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right) + h$

$= -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + \operatorname{tg}\alpha\cdot x + h$ odwrócona parabola

<u>Pytanie</u>: Po jakim czasie pocisk spadnie na podłoże?

Równoważne zagadnieniu rzutu pionowego (kier. y) z pr. pocz.

$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \underbrace{v_0\sin\alpha}_{v_{oy}}\cdot t + h$

t_k: $y(t_k) = 0$

$\left(-\frac{1}{2}g\right)t_k^2 + v_{oy}\cdot t_k + h = 0$

$\Delta = v_{oy}^2 - 4\cdot\left(-\frac{1}{2}g\right)\cdot h = v_{oy}^2 + 2gh$

$$\boxed{\begin{array}{c} ax^2+bx+c=0 \\ \Delta = b^2-4ac \\ x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \end{array}}$$

$t_{1,2} = \frac{-v_{oy} \pm \sqrt{v_{oy}^2 + 2gh}}{2\left(-\frac{1}{2}g\right)} = \frac{v_{oy}}{g} \mp \sqrt{\frac{v_{oy}^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}$

$t_1 < 0$

$\boxed{t_k = t_2}$

$t_k = \frac{v_{oy}}{g} + \sqrt{\frac{v_{oy}^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}$

⑥ Spr. $y(t_k) \stackrel{?}{=} 0$

$$t_k = \frac{v_{0y}}{g} + \sqrt{\frac{v_{0y}^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}$$

$$y(t_k) = -\frac{1}{2} g t_k^2 + v_{0y} \cdot t_k + h = -\frac{1}{2} g \left(\frac{v_{0y}}{g} + \sqrt{\ }\right)^2 + v_{0y}\left(\frac{v_{0y}}{g} + \sqrt{\ }\right) + h =$$

$$= -\frac{1}{2} g \left(\frac{v_{0y}^2}{g^2} + 2\frac{v_{0y}}{g}\sqrt{\ } + \frac{v_{0y}^2}{g^2} + \frac{2h}{g}\right) + \frac{v_{0y}^2}{g} + v_{0y}\sqrt{\ } + h =$$

$$= -\frac{v_{0y}^2}{2g} - v_{0y}\sqrt{\ } - \frac{v_{0y}^2}{2g} - \cancel{h} + \frac{v_{0y}^2}{g} + v_{0y}\sqrt{\ } + \cancel{h} = 0$$

Pytanie: Jaka jest prędkość pocisku w momencie uderzenia?

$$\vec{v}(t_k) = (v_0 \cos\alpha,\ -g t_k + v_0 \sin\alpha,\ 0)$$

Z zas. zach. energii: energia kinetyczna na wys. h jest taka sama, jak w momencie wystrzelenia. Potem spadek swobodny z wys. h.

$$v_y(t_k) = -g\left(\frac{v_{0y}}{g} + \sqrt{\frac{v_{0y}^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}\right) + v_{0y} = -\cancel{v_{0y}} - \sqrt{v_{0y}^2 + 2gh} + \cancel{v_{0y}} =$$

$$= -\sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}$$

$$\vec{v}(t_k) = \left(v_0 \cos\alpha,\ -\sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh},\ 0\right)$$

$$|v(t_k)|^2 = \underbrace{v_0^2 \cos^2\alpha + v_0^2 \sin^2\alpha}_{v_0^2} + 2gh = v_0^2 + 2gh$$

v_0^2 ← pr. pocz. ; $2gh$ ← mały dodatek

$$|v(t_k)| = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

Pytanie: Jaki jest zasięg pocisku?

$$x(t_k) = v_0 \cos\alpha \cdot t_k = v_0 \cos\alpha \cdot \left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2} + \frac{2h}{g}}\right)$$

Jeżeli armata stoi na podłożu, to wysokość h nie jest ważna.

Zał. $h=0$

$$x(t_k) = v_0 \cos\alpha \left(2 \cdot \frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right) = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin 2\alpha$$

(7) Dla $h=0$

$$t_k = \frac{v_{0y}}{g} + \sqrt{\frac{v_{0y}^2}{g^2} + 0} = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$$

$v(t_k) = \sqrt{v_0^2 + 0} = v_0$ prędkość końcowa

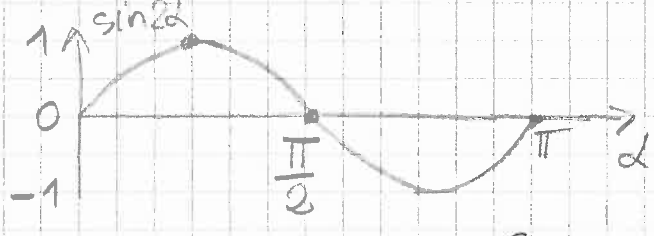
$x(t_k) = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$ zasięg

Pytanie: Dla jakiego kąta α zasięg pocisku jest maksymalny?

$$x(t_k) \equiv x_k = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$$

$$\sin(2\alpha) = 1 \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$



Do wzoru też inaczej wchodzi g

Wówczas $x(t_k) = \frac{v_0^2}{g} \sim v_0^2$

Por. zasięg w rzucie poziomym z h

$x_k \sim v_0\sqrt{h}$

v_0	x_k	rzut poziomy
$10\frac{m}{s}$	10,2 m	4,5m
$30\frac{m}{s}$	91,74m	13,5m
$60\frac{m}{s}$	366,97m	27m
$1000\frac{m}{s}$	≈100 km	450m

spr $\left[\frac{v_0^2}{g}\right] = \frac{\left(\frac{m}{s}\right)^2}{\frac{m}{s^2}} = \frac{m^2}{s^2}\cdot\frac{s^2}{m} = m$

Pytanie: Odwrotny problem. Chcemy trafić w cel odległy o x_{cel}. Jaki powinniśmy ustawić kąt?

$$x_k = x(t_k) = x_{cel}$$

$$\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha = x_{cel}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{g \cdot x_{cel}}{v_0^2}$$

$$2\alpha = \arcsin\left(\frac{g\, x_{cel}}{v_0^2}\right)$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{g \cdot x_{cel}}{v_0^2}\right)$$

Chcemy trafić w punkt odległy o 5m

$v_0 = 10\frac{m}{s}$

Jaki powinniśmy ustawić kąt?

Zrobić w domu! Czy starczy miejsca do sufitu?

(8) Energia

Wróćmy do ogólnego przypadku dla $\vec{F_g}=(0,-g,0)$

$$\vec{r_0}=(0,h,0)$$
$$\vec{v_0}=(v_{ox},v_{oy},v_{oz}) \qquad v_0^2=v_{ox}^2+v_{oy}^2+v_{oz}^2$$

$$\vec{r}(t)=(v_{ox}\cdot t,\ -\tfrac{1}{2}gt^2+v_{oy}\cdot t+h,\ v_{zo}\cdot t)$$
$$\vec{v}(t)=(v_{ox},\ -gt+v_{oy},\ v_{oz})$$

Energia kinetyczna

$$E_{kin}=\frac{mv^2(t)}{2} \qquad E_{kin}(0)=\frac{mv_0^2}{2}$$

$$v^2(t)=v_x^2(t)+v_y^2(t)+v_z^2(t)=v_{ox}^2+(-gt+v_{oy})^2+v_{oz}^2=$$
$$=v_{ox}^2+v_{oy}^2+v_{oz}^2-2v_{oy}gt+g^2t^2=$$
$$=v_0^2-2v_{oy}gt+g^2t^2$$

$$E_{kin}(t)=\frac{m(v_0^2-2v_{oy}gt+g^2t^2)}{2}=E_{kin}(0)+\frac{m(g^2t^2-2gtv_{oy})}{2}$$

Energia potencjalna

$$E_{pot}: \quad \vec{F}=-\mathrm{grad}\,V(x,y,z)=-\left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)V(x,y,z)$$
$$\vec{F_g}=(0,-g,0)$$

$x:\ 0=-\frac{\partial}{\partial x}V(x,y,z) \Rightarrow V$ niezależny od x i z

$$y:\ -mg=\frac{-\partial}{\partial y}V(y)$$
$$\frac{d}{dy}V(y)=mg$$
$$V(y)=mgy+C$$

fizyczne znaczenie ma pochodna V, a nie samo V → stałą można dobrać wedle swojej wygody

$C=0$

$E_{pot}=V$ wartość energii potencjalnej jest równa potencjałowi pola w danym punkcie

$$E_{pot}(0)\underset{y=h}{=}mg\cdot h$$

(9) $E_{pot}(t) = mg \cdot y(t) = mg\left(-\frac{1}{2}gt^2 + v_{oy}t + h\right) =$

$$= m\left(-\frac{g^2t^2}{2} + gv_{oy} \cdot t + gh\right) = \cancel{E_{pot}(0)} +$$

$$= E_{pot}(0) + m\left(\frac{-g^2t^2}{2} + v_{oy} \cdot g \cdot t\right)$$

Energia całkowita (mechaniczna)

$$E = E_{kin} + E_{pot}$$

$$E(t) = E_{kin}(0) + \frac{m(g^2t^2 - 2gtv_{oy})}{2} + E_{pot}(0) + \frac{m(-g^2t^2 + 2gtv_{oy})}{2} =$$

$$= E_{kin}(0) + E_{pot}(0) = E(0) = \text{const}$$

całka ruchu w stałym polu $\Longleftrightarrow$ niezmienniczości względem przes. w czasie

- Czy spełniona jest zasada zachowania pędu?
  Nie, bo układ nie jest izolowany (działa zewnętrzna siła)

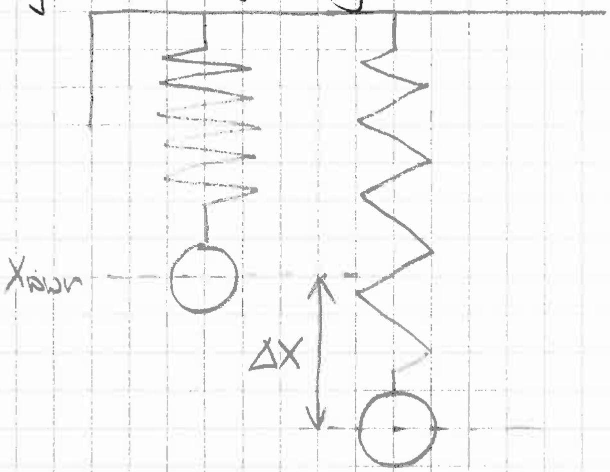
10 OSCYLATOR HARMONICZNY

$$\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t) = -k(\underbrace{\vec{r}-\vec{r}_{równ}}_{\Delta\vec{r}=(\Delta x,\Delta y,\Delta z)}) = (-k\Delta x, -k\Delta y, -k\Delta z)$$

Prawo Hooka

Ruch w każdym kierunku jest niezależny → 3 oscylatory 1D

$$F_x \equiv F = -k(x - x_{równ})$$



Równanie ruchu 1D:

$$m\ddot{x} = -k(x - x_{równ})$$

$$m\ddot{x} + kx = kx_{równ} = \text{const}$$

Rozwiązaniem będzie $x(t)$

Zgadujemy ~~...~~ postać rozwiązania:

$$x(t) = A\cos(\omega_1 t + \varphi) + x_1$$ ← 4 parametry (powinny zostać 2)

$$\dot{x}(t) = -\omega_1 A\sin(\omega_1 t + \varphi)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega_1^2 A\cos(\omega_1 t + \varphi)$$

A - amplituda
ω - częstość drgań
φ - faza
x_1 - położenie średnie

Wstawiamy do równania

$$m(-\omega_1^2 A\cos(\omega_1 t + \varphi)) + k(A\cos(\omega_1 t + \varphi) + x_1) = kx_{równ}$$

$$(-m\omega_1^2 + k)\cdot A\cos(\omega_1 t + \varphi) - k(x_{równ} - x_1) = 0$$

Spełnione $\iff$

$$\begin{cases} -m\omega_1^2 + k = 0 & \rightarrow \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ x_{równ} - x_1 = 0 & \quad\quad x_1 = x_{równ} \end{cases}$$

- oscylator oscyluje z częstością, która nie zależy od warunków początkowych.

Pozostałe 2 parametry (A i φ) wyznaczają warunki początkowe - - 2 stałe całkowania

Ozn. $\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$\boxed{\text{Pokaz}}$ Sprężyny z zawieszonymi ciężarkami o różnych masach

(11) Energia Oscylatora

Energia kinetyczna:

$$E_{kin}(t) = \frac{m v^2(t)}{2} \qquad v(t) = \dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{m\omega^2}_{k} A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

Energia potencjalna:

$$\vec{F}_{spr} = -\frac{\partial}{\partial x} V(x) \qquad \vec{V}(\vec{r}) = V(x) + V(y) + V(z)$$

$$-k(x - x_{równ}) = -\frac{\partial}{\partial x} V(x)$$

$$\frac{d}{dx} V(x) = k(x - x_{równ})$$

$$V(x) = \frac{1}{2} k x^2 - k x_{równ} \cdot x + C$$

Ustalmy $C = \frac{1}{2} k x_{równ}^2$, wówczas $V(x) = \frac{1}{2} k x^2 - k x_{równ} \cdot x + \frac{1}{2} k x_{równ}^2 =$

$$= \frac{1}{2} k (x - x_{równ})^2$$

Spr. $-\frac{\partial}{\partial x} V(x) = \frac{-\partial}{\partial x} \frac{1}{2} k (x - x_{równ})^2 = -\frac{1}{2} \cdot 2k(x - x_{równ}) \cdot 1 = -k(x - x_{równ})$

$$E_{pot}(t) = \frac{1}{2} k \left(A\cos(\omega t + \varphi) + \cancel{x_{równ}} - \cancel{x_{równ}}\right)^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

Energia całkowita

$$E_{kin}(t) + E_{pot}(t) = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} k A^2 = const$$

(12) Wyznaczenie amplitudy i fazy z warunków początkowych

$x(0) = A\cos(\omega \cdot 0 + \varphi) + x_{równ} \overset{!}{=} x_0$ – położenie początkowe

$\Rightarrow \quad A\cos\varphi = x_0 - x_{równ} = \Delta x_0$ – wychylenie początkowe

$v(0) = -\omega A \sin(\omega \cdot 0 + \varphi) = v_0$ – prędkość początkowa

$\Rightarrow \quad -\omega A \sin\varphi = v_0$

$$A\cos\varphi = \Delta x_0 \rightarrow A = \frac{\Delta x_0}{\cos\varphi}$$

$$-\omega\left(\frac{\Delta x_0}{\cos\varphi}\right)\cdot \sin\varphi = v_0$$

$$tg\,\varphi = -\frac{v_0}{\omega \Delta x_0}$$

Zał. $\Delta x_0 \neq 0$, $v_0 = 0$ – naciągamy sprężynę i puszczamy

$$v_0 = 0 \rightarrow \varphi = 0 \rightarrow A = \frac{\Delta x_0}{\cos 0} = \Delta x_0$$

$$x(t) = A\cos(\omega t) + x_{równ} = \Delta x_0 \cos(\omega t) + x_{równ}$$

W domu: Rozwiązać zagadnienie ruchu ładunku w polu elektromagnetycznym (ważne tylko pole elektr.)

$$\vec{F}_{el} = \vec{d} \circ \vec{E} \qquad \vec{d} = q\vec{v}$$

$$\vec{E} = \hat{x} E_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$\vec{F} = (-exE_0\cos(\omega t + \varphi), 0, 0)$ zagadnienie 1D

$F = -exE_0\cos(\omega t + \varphi)$ $\quad\omega$ i φ są znane

Przyjąć warunki początkowe

$x(0) = 0$

$v(0) = 0$

Oblicz $x(t)$, wpływ fazy φ na ruch ładunku, kiedy $\overline{v(t)} = 0$

Może być na egzaminie

(13) Ciekawostka - Rozwiązywanie zagadnienia ruchu w stałym polu przez zgadnięcie rozwiązania

Równanie

$$\ddot{y}(t) = -g$$

Zgadujemy rozwiązanie: wielomian $y(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n t^n$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n t^n\right) = -g$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \frac{d^2}{dt^2}(t^n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \frac{d}{dt}(n t^{n-1}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n\, n(n-1) t^{n-2} = -g$$

$P=\text{stała} \Rightarrow L=\text{stała} \Rightarrow$ tylko wyraz $n=2 \Rightarrow \forall_{n\neq 2}\ b_n = 0$

lub $n(n-1)=0$

To oznacza, że niezerowe współczynniki mogą być tylko dla $n=0,1,2$: b_0, b_1, b_2

$$y(t) = b_0 t^0 + b_1 t^1 + b_2 t^2$$

$n=2$: $b_2 \cdot 2(2-1)\, t^{2-2} = -g$

$$2b_2 = -g$$

$$b_2 = -\frac{1}{2}g$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + b_1 t + b_0$$

b_1 i b_0 wyznaczymy z warunków początkowych

(14)

OSCYLATOR TŁUMIONY

Siła oporu (ośrodka) lub niespełnione prawo Hooke

$$\vec{F}_{op} = -b\vec{v}$$

3D: $$\vec{F} = -k(\vec{r} - \vec{r}_{równ}) - b\vec{v}$$

$$m(\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)) + b(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) + k(x(t), y(t), z(t)) = k\vec{r}_{równ}$$

Nadal trzy oscylatory jednowymiarowe - nie ma mieszania współrzędnych

$$\begin{cases} m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = kx_{równ} \\ m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = ky_{równ} \\ m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = kz_{równ} \end{cases}$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = kx_{równ}$$

$$\ddot{x} + 2\left(\frac{b}{2m}\right)\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}x_{równ}$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = \omega^2 x_{równ}$$

b: ważne zagadnienie w perspektywie symulacji ciał z odkształceniami (ciał miękkich) np. symulacji tkanin, ciał sprężystych itp → gry

Znane parametry oscylatora: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\beta = \frac{b}{2m}$

Zgadujemy rozwiązanie

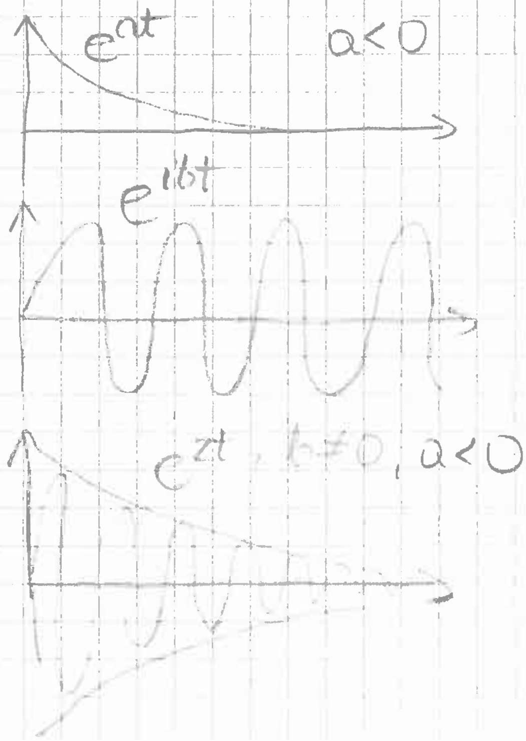
$$x(t) = Ae^{zt} + x_1 \qquad A \in \mathbb{R}, \; z \in \mathbb{C}$$

$z = a + bi$

$$e^{zt} = e^{at+ibt} = e^{at}e^{ibt}$$

$$\dot{x}(t) = zAe^{zt}$$

$$\ddot{x}(t) = z^2Ae^{zt}$$



Wstawiamy do równania

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = \omega^2 x_{równ}$$

$$(z^2Ae^{zt}) + 2\beta(zAe^{zt}) + \omega^2(Ae^{zt} + x_1) = \omega^2 x_{równ}$$

$$Ae^{zt}(z^2 + 2\beta z + \omega^2) + \omega^2(x_1 - x_{równ}) = 0$$

$$z^2 + 2\beta z + \omega^2 = 0 \quad i \quad x_1 - x_{równ} = 0$$

$$\Delta = (2\beta)^2 - 4\omega^2 \qquad x_1 = x_{równ}$$

$$= 4(\beta^2 - \omega^2)$$

(15)

$$z_{1,2} = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4(\beta^2-\omega^2)}}{2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2-\omega^2}$$

Dwa rozwiązania, które należy uwzględnić

$$x(t) = A_1 e^{z_1 t} + A_2 e^{z_2 t} + X_{równ}$$

Oscylacje pojawią się, gdy $\beta^2 < \omega^2$: $z_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{-(\omega^2-\beta^2)} =$

$= -\beta \pm i\sqrt{\omega^2-\beta^2}$

ozn. $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2-\beta^2}$

W przypadku pojawienia się oscylacji $\tilde{\omega} < \omega$ (częstość oscylacji jest mniejsza niż w oscylatorze harmonicznym bez tłumienia).

Ustalanie parametrów rozwiązania z warunków początkowych.

$$\dot{x}(t) = z_1 A_1 e^{z_1 t} + z_2 A_2 e^{z_2 t} + X_{równ}$$

$$x(0) = A_1 e^0 + A_2 e^0 + X_{równ} \stackrel{!}{=} X_0$$

$$A_2 + A_2 = X_0 - X_{równ} = \Delta X_0$$

$$A_1 = \Delta X_0 - A_2$$

$z_1 = -\beta - i\tilde{\omega}$

$z_2 = -\beta + i\tilde{\omega}$

$z_2 - z_1 = 2i\tilde{\omega}$

$$\dot{x}(0) = z_1 A_1 e^0 + z_2 A_2 e^0 + X_{równ} = v_0$$

$$z_1(\Delta X_0 - A_2) + z_2 A_2 + X_{równ} = v_0$$

$$A_2(z_2 - z_1) = v_0 - z_1 \Delta X_0$$

$z_2 - z_1 = +2\cancel{\beta} i\tilde{\omega}$

$$A_2 = \frac{v_0 - z_1 \Delta X_0}{z_2 - z_1}$$

$$A_1 = \Delta X_0 - \left(\frac{v_0 - z_1 \Delta X_0}{z_2 - z_1}\right) = \frac{\Delta X_0 (z_2 - z_1) - v_0 + z_1 \Delta X_0}{z_2 - z_1} =$$

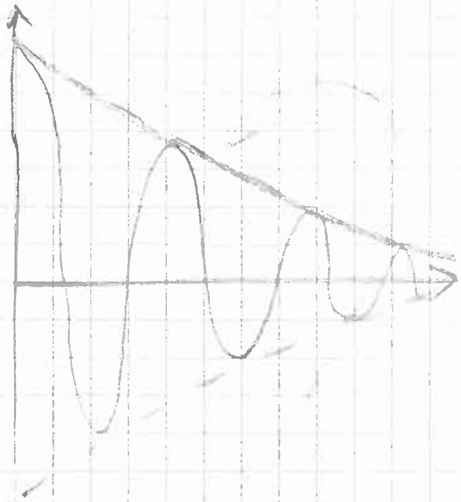
$$= \frac{-v_0 + \Delta X_0 z_2}{z_2 - z_1}$$

(16)

- Przypadek 1° $\omega^2 > \beta^2$

$$Z_{1,2} = -\beta \pm i\tilde{\omega}$$

$$X(t) = A_1 e^{(-\beta + i\tilde{\omega})t} + A_2 e^{(-\beta - i\tilde{\omega})t} + X_{\text{równ}}$$
$$= e^{-\beta t}\left(A_1 e^{i\tilde{\omega}t} + A_2 e^{-i\tilde{\omega}t}\right) + X_{\text{równ}}$$



- Przypadek 2° $\omega^2 = \beta^2$

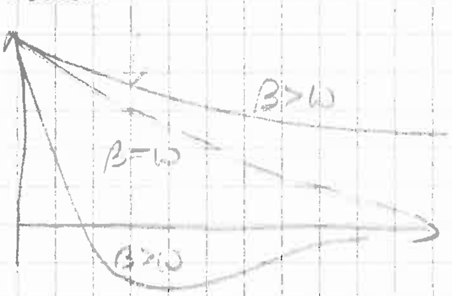
$$Z_1 = Z_2 = -\beta$$

$$X(t) = A_1 e^{-\beta t} + A_2 e^{-\beta t} + X_{\text{równ}} = A e^{-\beta t} + X_{\text{równ}}$$

- Przypadek 3° $\omega^2 < \beta^2$

$$Z_{1,2} = -\beta \mp \tilde{\omega}$$

$$X(t) = A_1 e^{(-\beta - \tilde{\omega})t} + A_2 e^{(-\beta + \tilde{\omega})t} + X_{\text{równ}}$$
$$= e^{-\beta t}\left(A_1 e^{-\tilde{\omega}t} + A_2 e^{\tilde{\omega}t}\right) + X_{\text{równ}}$$



kombinacje dwóch f. wykładn.

NUMERYCZNE CAŁKOWANIE

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE

$\cancel{\frac{d\vec{y}}{dt}}$ $\boxed{\frac{dy}{dt} = f(y,t)}$ $y=\{y_i\}$ y – stan układu

Równania wyższych rzędów (np. równanie Newtona) można zawsze sprowadzić do wielu równań pierwszego rzędu

$$\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{1}{m}\vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) \qquad \begin{aligned}\vec{r}(t_0)&=\vec{r}_0\\ \vec{v}(t_0)&=\vec{v}_0\end{aligned}$$

Stosujemy podstawienie

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

Zagadnienie typu „initial value problem"

uzyskamy

$$\begin{cases} \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{1}{m}\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t) \\ \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}(t) \end{cases} \qquad y=\{x, v_x, y, v_y, z, v_z\} \text{ – stan ukł.}$$

Algorytm Eulera – najprostszy algorytm całkowania ODE

Trzy wyprowadzenia

1° Iloraz różnicowy

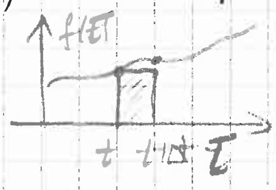
$$\frac{dy}{dt} = \frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t} = f(y,t) \Rightarrow \boxed{y(t+\Delta t) = y(t) + f(t)\cdot\Delta t}$$

2° Całkowanie przy założeniu, że f – stałe w $(t, t+\Delta t)$

$$\frac{dy}{dt} = f(y,t)$$

zał. $f(y,\tau) = f(y,t)$ – wartość z początku przedziału

$$\left[y(\tau)\right]_t^{t+\Delta t} = \int_t^{t+\Delta t} f(y,\tau)\,d\tau$$



$$y(t+\Delta t) - y(t) = f(y,t)\int_t^{t+\Delta t} dt = f(y,t)\Delta t \Longrightarrow y(t+\Delta t) = y(t) + f(t)\Delta t$$

Metoda Eulera jest równoważna założeniu, że $f(y,t)$ jest stałe podczas kroku i równe wartości z początku każdego przedziału

3° Szereg Taylora – b. ważny w metodach numerycznych

Pozwala obliczyć wartość funkcji w jakimś punkcie na podstawie wartości i informacji o zmienności (pochodne) w innym punkcie

$$y(t+\Delta t) = y(t) + \frac{\dot{y}(t)}{1!}\Delta t + \frac{\ddot{y}(t)}{2!}\Delta t^2 + \frac{\dddot{y}(t)}{3!}\Delta t^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(t)}{n!}\Delta t^n$$

obcinamy na dwóch wyrazach $O(\Delta t^2)$

$$y(t+\Delta t) = y(t) + \underbrace{\dot{y}(t)}_{f(y,t)}\Delta t \rightarrow y(t+\Delta t) = y(t) + f(y,t)\Delta t$$

Zastosujmy „Eulera" do równań Newtona

wzór jak w ruchu jednost.-przysp.

$$\begin{cases} \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m}\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t) = \vec{a}(t) & \rightarrow \vec{v}(t+\Delta t) = \vec{v}(t) + \vec{a}(t)\cdot\Delta t \quad (1) \\ \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(t) & \rightarrow \vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \vec{v}(t)\Delta t \quad (2) \end{cases}$$

wzór jak w ruchu jednost.

Sztuczka: zamiast $\vec{v}(t)$ w (2) użyjmy $\vec{v}(t+\Delta t)$ z (1)

Wówczas:

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \vec{v}(t+\Delta t)\Delta t$$

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + (\vec{v}(t) + \vec{a}(t)\Delta t)\Delta t$$

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \vec{v}(t)\Delta t + \vec{a}(t)\Delta t^2$$

brak $\frac{1}{2}$ w porównaniu do wzoru na ruch jedn.-przysp.

Algorytm Verleta (podstawowy / położeniowy)

Pierwszy wybór w przypadku równań Newtona

Szereg Taylora dla $\vec{r}(t+\Delta t)$ i $\vec{r}(t-\Delta t)$

- $$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{1!}\Delta t + \frac{\ddot{\vec{r}}(t)}{2!}\Delta t^2 + \frac{\dddot{\vec{r}}(t)}{3!}\Delta t^3 + O(\Delta t^4)$$
$$= \vec{r}(t) + \dot{\vec{r}}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{\vec{r}}(t)\Delta t^2 + \frac{1}{6}\dddot{\vec{r}}(t)\Delta t^3 + O(\Delta t^4)$$

- $$\vec{r}(t-\Delta t) = \vec{r}(t) - \dot{\vec{r}}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{\vec{r}}(t)\Delta t^2 - \frac{1}{6}\dddot{\vec{r}}(t)\Delta t^3 + O(\Delta t^4)$$

Dodajemy stronami • + •

$$\vec{r}(t+\Delta t) + \vec{r}(t-\Delta t) = 2\vec{r}(t) + 2\cdot\frac{1}{2}\ddot{\vec{r}}(t)\Delta t^2 + O(\Delta t^4)$$

$$\vec{r}(t+\Delta t) = -\vec{r}(t-\Delta t) + 2\vec{r}(t) + \vec{a}(t)\Delta t^2$$

- Do obliczenia nast. położenia potrzebne dwa poprzednie położenia (prędkości są w ogóle zbędne)
- Pierwszy krok wymaga dwóch położeń ⇒ pierwszy krok np. Eulerem

Odwracając ten przepis na obliczenie drugiej pochodnej

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \frac{\vec{r}_{n-1} - 2\vec{r}_n + \vec{r}_{n+1}}{\Delta t^2}$$

Odejmujemy stronami • − •

$$\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t-\Delta t) = 2\underbrace{\dot{\vec{r}}(t)}_{=\vec{v}(t)}\Delta t + O(\Delta t^3)$$

$$\vec{v}(t) = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t-\Delta t)}{2\Delta t} \longrightarrow$$

Ogólny przepis na pierwszą pochodną (lepszy od ilorazu różnicowego)

$$\dot{\vec{r}}(t) = \frac{\vec{r}_{n+1} - \vec{r}_{n-1}}{2\Delta t}$$

- Prędkości liczymy tylko, gdy jest do tego potrzebne (mniejsza dokładność)

Zwykle szukamy przyszłych położeń obiektów (ewolucja w przód). Można jednak zadać pytanie „jakie muszą być warunki początkowe, aby końcowy stan był taki, jak chcemy?" Wówczas możemy użyć odwróconej wersji algorytmu Verleta

$$\vec{r}(t-\Delta t) = -\vec{r}(t+\Delta t) + 2\vec{r}(t) + \vec{a}(t)\Delta t^2$$

W pierwszym kroku Euler: $y(t) = y(t+\Delta t) - f(y,t)\Delta t$

Algorytm Verleta (prędkościowy)

Szereg Taylora dla $\vec{r}(t+\Delta t)$

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \dot{\vec{r}}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{\vec{r}}(t)\Delta t^2 + \frac{1}{6}\dddot{\vec{r}}(t)\Delta t^3$$

(3) $$\boxed{\vec{r}(t+\Delta t) \cong \vec{r}(t) + \vec{v}(t)\Delta t + \frac{1}{2}a(t)\Delta t^2}$$

Gdyby $\vec{a}(t)=\vec{a}=\mathrm{const}$ – dokładny wzór na położenie w ruchu jednostajnie przyspieszonym

Analogicznie

$$\vec{v}(t+\Delta t) \cong \vec{v}(t) + \dot{\vec{v}}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{\vec{v}}(t)\Delta t^2$$

przyspieszenie szarpnięcie (zryw)

$$\vec{a}(t+\Delta t) \cong \vec{a}(t) + \dot{\vec{a}}(t)\Delta t \longrightarrow \dot{\vec{a}}(t) = \frac{\vec{a}(t+\Delta t)-\vec{a}(t)}{\Delta t}$$

zwykły iloraz różnicowy

$$\vec{v}(t+\Delta t) \cong \vec{v}(t) + \vec{a}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{a}(t+\Delta t)-\vec{a}(t)}{\Delta t}\right)\Delta t^2 =$$

$$\cancel{= \vec{v}(t) + \frac{1}{2}\vec{a}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}(t)\Delta t}$$

$$= \vec{v}(t) + \vec{a}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}(t+\Delta t)\Delta t - \frac{1}{2}\vec{a}(t)\Delta t$$

$$\vec{v}(t+\Delta t) = \underbrace{\vec{v}(t) + \frac{1}{2}\vec{a}(t)\Delta t}_{\vec{v}(t+\frac{\Delta t}{2})} + \frac{1}{2}\vec{a}(t+\Delta t)\Delta t = \cancel{\vec{v}(t) + \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{a}(t+\Delta t)+\vec{a}(t)}{\Delta t}\right)\Delta t}$$

(2) $$\boxed{\vec{v}(t+\Delta t) = \vec{v}(t) + \frac{1}{2}\underbrace{\left(\vec{a}(t+\Delta t) + \vec{a}(t)\right)}_{\text{średnia sił z sąsiednich kroków czasowych}}\cdot\Delta t}$$

(1) $$\vec{a}(t+\Delta t) = \frac{\vec{F}(t+\Delta t)}{m}$$

→ aby nie obliczać dwukrotnie należy przechowywać obliczone przyspieszenie

↓

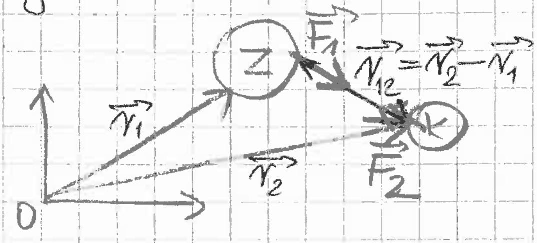
przechowywanie 3 tablic $\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$

Podsumowanie

1. Obliczenie $\vec{a}(t+\Delta t)$ – kłopotliwe, jeżeli do obliczeń potrzebne $\vec{r}(t+\Delta t)$ lub $\vec{v}(t+\Delta t)$!
2. Obliczenie $\vec{v}(t+\Delta t)$ (2)
3. Obliczenie $\vec{r}(t+\Delta t)$ (3)

Zagadnienie dwóch ciał – rozpisanie wektora stanu

np. Ziemia–Księżyc w 2D



III zasada dynamiki

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1 \qquad F = \frac{GMm}{r_{12}}$$

Równania ruchu

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_1 = F\dfrac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \\[2ex] m_2 \dfrac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_2 = -F\dfrac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = \dfrac{F}{m}\dfrac{(x_2-x_1)}{r_{12}} \\[2ex] \dfrac{d^2y_1}{dt^2} = \dfrac{F}{m}\dfrac{(y_2-y_1)}{r_{12}} \\[2ex] \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = -\dfrac{F}{m}\dfrac{(x_2-x_1)}{r_{12}} \\[2ex] \dfrac{d^2y_2}{dt^2} = -\dfrac{F}{m}\dfrac{(y_2-y_1)}{r_{12}} \end{cases}$$

$$r_{12} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

Mamy 4 równania 2-go rzędu

↳ 8 równań 1-go rzędu $(N=8)$

$$\frac{dx_1}{dt} = v_{x1}, \quad \frac{dv_{x1}}{dt} = \frac{F}{m}\frac{(x_2-x_1)}{r_{12}}$$

$$\frac{dy_1}{dt} = v_{y1}, \quad \frac{dv_{y1}}{dt} = \frac{F}{m}\frac{(y_2-y_1)}{r_{12}}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = v_{x2}, \quad \frac{dv_{x2}}{dt} = -\frac{F}{m}\frac{(x_2-x_1)}{r_{12}}$$

$$\frac{dy_2}{dt} = v_{y2}, \quad \frac{dv_{y2}}{dt} = -\frac{F}{m}\frac{(y_2-y_1)}{r_{12}}$$

$$y_0 = x_1,\ y_1 = v_{x1},\ y_2 = y_1,\ y_3 = v_{y1},\ y_4 = x_2,\ y_5 = v_{x2},\ y_6 = y_2,\ y_7 = v_{y2}$$

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(\{y_i\}_{i=0}^{7}, t)$$

Algorytm MidPoint

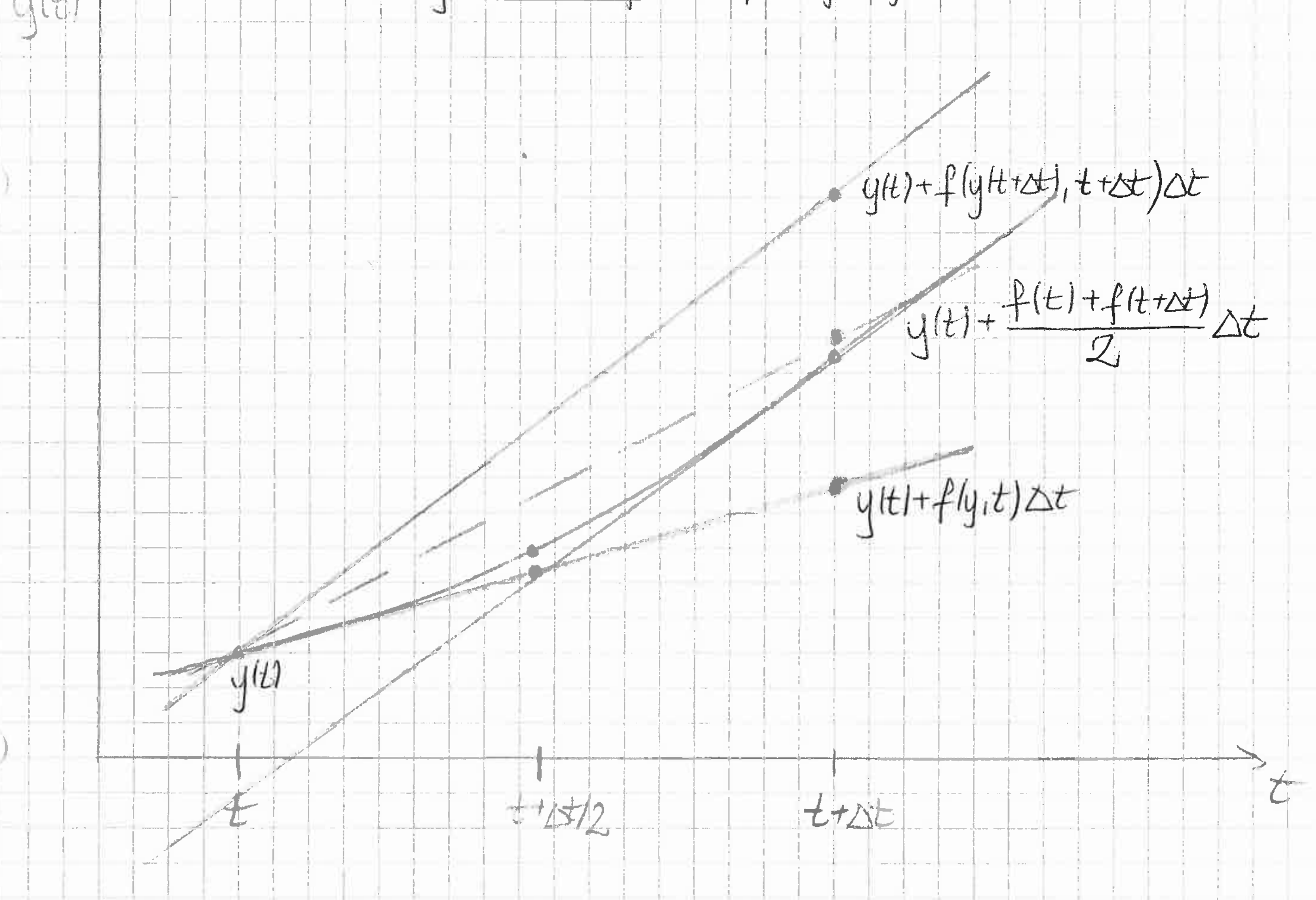
1. Euler: $y(t+\Delta t) = y(t) + f(y(t), t)\cdot\Delta t$

metoda explicit (jawna) wartości wzięte z początku przedziału całkowania – wzięte z poprzedniego kroku

2. Modyfikacja: $y(t+\Delta t) = y(t) + f(y(t+\Delta t), t+\Delta t)\,\Delta t$

metoda implicit (niejawna) wartości f z końca przedz.

3. Można też użyć średniej obu powyższych



4. Inny pomysł: użyć nachylenia ze środka przedziału $t+\frac{\Delta t}{2}$.
Ale to zwykle niemożliwe, bo nie znamy $y(t+\frac{\Delta t}{2})$
⇒ Obliczamy ~~pośrednie~~ wartości $y(t+\frac{\Delta t}{2})$ metodą Eulera

$$y\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right) = y(t) + f(y(t),t)\frac{\Delta t}{2}$$ – zwykła metoda Eulera explicit

Następnie obliczamy f korzystając z tej wartości $f\left(y(t+\frac{\Delta t}{2}), t+\frac{\Delta t}{2}\right)$ i obliczamy wartość na końcu:

$$y(t+\Delta t) = y(t) + f\left(y\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right), t+\frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t$$

Podwójne obliczenie, ale znacznie lepsza dokładność

Algorytm Runge-Kutty

Metody explicit!

Ogólne sformułowanie metody RK

$$y(t+\Delta t) = y(t) + \sum_{i=1}^{s} \omega_i K_i$$

Trzeba w każdym kroku s-razy obliczać $f(\ )$

$$K_1 = f(y,t)\cdot\Delta t$$

$$K_i = f\left(y + \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} K_j,\ t + a_i \Delta t\right)$$

$$0 \leq a_i \leq 1$$

$s=1$: $y(t+\Delta t) = y(t) + \omega_1 K_1 = y(t) + f(y,t)\Delta t$ Metoda Eulera $\parallel$ RK1

$s=2$: $y(t+\Delta t) = y(t) + \omega_1 K_1 + \omega_2 K_2$

$$K_1 = f(y(t),t)\cdot\Delta t$$

trzeba określić $\omega_1, \omega_2, b_{21}, a_2$

$$K_2 = \underbrace{f(y(t) + b_{21}K_1,\ t + a_2\Delta t)}_{\text{to rozwijamy w szereg Taylora w } (y,t)}$$

$$f(y + b_{21} f(y,t)\cdot\Delta t,\ t + a_2\Delta t) = f(y,t) + \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_{(y,t)} \cdot a_2\Delta t + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(y,t)} \cdot b_{21} f(y,t)\cdot\Delta t$$

Różniczka zupełna

$$df(y,t) = \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial t}dt$$

Wstawiamy do wzoru na $y(t+\Delta t)$

$$y(t+\Delta t) = y(t) + \omega_1 f(y,t)\Delta t + \omega_2\left\{f(y,t) + \frac{\partial f}{\partial t}(y,t)\, a_2\Delta t + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial f}{\partial y}(y,t)\cdot b_{21} f(y,t)\right\}\Delta t =$$

$$y(t+\Delta t) = \underset{(1)}{y(t)} + \underset{(2)}{(\omega_1+\omega_2) f(y,t)\Delta t} + \underset{(3)}{\omega_2\left(a_2\frac{\partial f}{\partial t} + b_{21}\frac{\partial f}{\partial y}\cdot f\right)\Delta t^2}$$

Wzorem do porównania jest rozwinięcie w szereg Taylora względem t:

$$y(t+\Delta t) = \underset{(1)}{y(t)} + \underset{(2)}{\dot{y}(t)\Delta t} + \underset{(3)}{\frac{1}{2}\ddot{y}(t)\Delta t^2} + \frac{1}{6}\dddot{y}(t)\Delta t^3 + \ldots$$

② - ②
$$(\omega_1+\omega_2) f(y(t),t)\cancel{\Delta t} = \underbrace{\dot{y}(t)}_{f(y,t)} \cancel{\Delta t}$$
pierwotne równanie

$$\omega_1+\omega_2=1$$

② - ②
$$\omega_2\left(a_2\frac{\partial f}{\partial t}+b_{21}\frac{\partial f}{\partial y}\cdot f\right)\cancel{\Delta t^2}=\frac{1}{2}\ddot{y}(t)\cancel{\Delta t^2}$$

$$L=\frac{1}{2}\ddot{y}(t)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{y}(t))=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\cancel{f(t)}f(y,t))=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}f\right) \qquad \frac{dy}{dt} = \dot{y}=f(y,t)$$

$$\omega^2\left(a_2\frac{\partial f}{\partial t}+b_{21}\frac{\partial f}{\partial y}\cdot f\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}f\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\omega_2 a_2=\frac{1}{2}\\ \omega_2 b_{21}=\frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow a_2=b_{21}$$

Otrzymaliśmy układ równań na $\omega_1,\omega_2,a_2,b_{21}$ — 4 niewiadome, a tylko 3 równania!

∞ ilość rozwiązań — rodzina rozwiązań — niech parametrem będzie a_2

$$\begin{cases}\omega_1+\omega_2=1\\ \omega_2=\frac{1}{2a_2} \qquad a_2\neq 0\\ b_{21}=a_2\end{cases}$$

$$\omega_1=1-\frac{1}{2a_2}$$

Wówczas rodzina rozwiązań:

$$y(t+\Delta t)=y(t)+\underbrace{\left(1-\frac{1}{2a_2}\right)}_{\omega_1}f(y,t)\Delta t+\underbrace{\frac{1}{2a_2}}_{\omega_2}\cdot f(y+a_2 f(y,t)\Delta t,\ t+a_2\Delta t)$$

Można dodatkowo przeprowadzić minimalizację błędu → wyznaczenie a_2

Przyjmijmy $a_2=1 \Rightarrow \omega_2=\omega_1=\frac{1}{2},\ b_{21}=1$

$$y(t+\Delta t)=y(t)+f(y,t)\frac{\Delta t}{2}+f(y+\underbrace{f(y,t)\Delta t}_{k_1},\ t+\Delta t)$$

Inna możliwość $a_2=\frac{1}{2} \Rightarrow \omega_2=\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}=1,\ \omega_1=1-\omega_2=0,\ b_{21}=\frac{1}{2}$

$$y(t+\Delta t)=y(t)+0+1\cdot f(\underbrace{y+f(y,t)\frac{\Delta t}{2}}_{y(t+\frac{\Delta t}{2})},\ t+\frac{\Delta t}{2})$$
— metoda Mid Point (jedna z metod RK2)

$S=4$ ze zoptymalizowanymi współczynnikami → „optymalne RK4"

$$K_1 = f(y,t)\Delta t$$
$$K_2 = f\left(y+\frac{K_1}{2}, t+\frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t$$
$$K_3 = f\left(y+\frac{K_2}{2}, t+\frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t$$
$$K_4 = f(y+K_3, t+\Delta t)\Delta t$$

$$y(t+\Delta t) = y(t) + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) + O(\Delta t^5)$$

Bardzo często używana metoda!

Automatyczne dopasowywanie kroku

- Step doubling – dowolna metoda

  Co pewną ilość kroków (nawet w każdym) przeprowadzamy obliczenie zarówno dla Δt, jak i dla $\Delta t/2$. Jeżeli wyniki są różne (różnice są większe niż założony próg) to zmniejszamy krok. Jeżeli są „zbyt takie same" – możemy krok wydłużyć.

  Sprawdzanie w każdym kroku – podwójne obliczenia
  Sprawdzanie rzadziej – możemy przegapić krytyczny moment

- Użycie metody kontrolnej

  Zamiast zmniejszać krok można użyć innej metody, która jest dokładniejsza i porównać wyniki. Dalsze postępowanie – analog.
  Metoda kontrolna dla RK2 (MidPoint) może być RK4

- Runge-Kutta – Fehlberg
  1900 1968

  Dla RK z rzędu $s>4$ potrzeba więcej niż S wyrazów K_i:
  RK5 – 6, RK6 – 7, ~~RK8 – 11~~, RK7 – 9, RK8 – 11. Dlatego RK4 jest popularne

  Fehlberg odkrył taki zestaw $\{K_i\}$, który pozwala na obliczenie RK4 i jednocześnie RK5 (traktowany jako metoda kontrolna)
  Ang. „embedded RK formulae". Znaleziono wiele takich zestawów

Algorytm Runge-Kutty-4-Fehlberg 5 (RK4F5)

RK4 (czwartego rzędu $O(\Delta t^5)$) z pięcioma wyrazami:

$$K_1 = f(y,t)\Delta t$$

$$K_2 = f\left(y+\tfrac{1}{4}K_1,\ t+\tfrac{\Delta t}{4}\right)\Delta t$$

$$K_3 = f\left(y+\tfrac{3}{32}K_1+\tfrac{9}{32}K_2,\ t+\tfrac{3}{8}\Delta t\right)\Delta t$$

$$K_4 = f\left(y+\tfrac{1932}{2197}K_1-\tfrac{7200}{2197}K_2+\tfrac{7296}{2197}K_3,\ t+\tfrac{12}{13}\Delta t\right)\Delta t$$

$$K_5 = f\left(y+\tfrac{439}{216}K_1-8K_2+\tfrac{3680}{513}K_3-\tfrac{845}{4104}K_4,\ t+\Delta t\right)\Delta t$$

RK4: $$y(t+\Delta t) = y(t)+\frac{25}{216}K_1+\frac{1408}{2565}K_3+\frac{2197}{4104}K_4-\frac{1}{5}K_5$$

Dokładając jeden wyraz

$$K_6 = f\left(y-\tfrac{8}{27}K_1+2K_2-\tfrac{3544}{2565}K_3+\tfrac{1859}{4104}K_4-\tfrac{11}{40}K_5,\ t+\tfrac{\Delta t}{2}\right)\Delta t$$

można obliczyć RK5

RK5: $$y(t+\Delta t) = y(t)+\frac{16}{135}K_1+\frac{6656}{12825}K_3+\frac{28561}{56430}K_4-\frac{9}{50}K_5+\frac{2}{55}K_6$$

$\Rightarrow$ Niewielkim dodatkowym kosztem obliczamy RK4 i RK5.
Możemy porównać wyniki i dobierać krok czasowy $\rightarrow$ zag. 3 ciał

Procedura RK4F5 lub RKF4(5)

1) Obliczamy wszystkie stałe $K_1 \div K_6$ $w_1 - w_6$
Ustalamy wartości graniczne błędu $(\varepsilon_{min}, \varepsilon_{max})$ $\varepsilon = |y_{RK4} - y_{RK5}|$
2) Obliczamy następny krok dla RK4 i RK5, obliczamy różnicę ε
3) Jeżeli $\varepsilon_{min} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{max}$, to Δt pozostawiamy bez zmian $\rightarrow$ 2)
4) Jeżeli $\varepsilon < \varepsilon_{min}$: $\Delta t \rightarrow \Delta t \cdot 2 \rightarrow$ następny krok
Jeżeli $\varepsilon > \varepsilon_{max}$: $\Delta t \rightarrow \Delta t/2 \rightarrow$ jeszcze raz ten sam krok] MOŻLIWA PUŁAPKA

Można bardziej elastycznie dobierać krok np. $\Delta t_{next} = \Delta t \cdot S \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/5}$

S 0,85 10^{-3}

$$\Delta t_{next} = \Delta t \cdot \left(\frac{S}{2\varepsilon}\right)^{1/4}$$