Wektory i macierze w OpenGL

Filip Zawrocki

Uniwersytet Mikołaja Kopernika
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Przestrzeń wektorowa (inaczej - liniowa) to matematyczny twór złożony ze zbioru obiektów zwanych wektorami. Wektory te można dodawać do siebie i skalować (mnożyć) przez liczby z pewnego ciała liczbowego (np. $\mathbb{R}$). Operacjom tym są stawiane pewne warunki, np. przemienność dodawania. Przestrzeń linowa ma zdefiniowane pewne ciało liczbowe, mówi się, że przestrzeń jest "nad" tym ciałem.

Krótkie przypomnienie wiadomości z algery liniowej

Kombinacja liniowa

Jeżeli $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ gdzie V to pewna przestrzeń wektorowa i współczynniki $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$ to liczby z ciała F nad którym jest przestrzeń, to:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

nazywamy kombinacją liniową wektorów $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Kombinacja liniowa wektorów jest także wektorem.

O 2 wektorach mówimy, że są niezależne liniowo, jeżeli ich kombinacja liniowa może być równa 0 tylko jeżeli wszystkie współczynniki kombinacji są równe 0.

Bazą przestrzeni V nazywamy dowolny zbiór wektorów w tej przestrzeni, taki, że:

- dowolny wektor w V można przedstawić jednoznacznie jako kombinację liniową wektorów w bazie
- dowolne 2 wektory w bazie są niezależne liniowo

Każda przestrzeń liniowa posiada bazę (jedną lub więcej) i wszystkie bazy danej przestrzeni są równoliczne. Kardynalność bazy określa się jako wymiar przestrzeni. Oznaczamy $\dim(V)$ Np. przestrzeń trójwymiarowa ma trójelementową bazę. Przestrzeń jest określona (wygenerowana) przez bazę.

Przestrzenie mogą mieć skończony bądź nieskończony wymiar. W dalszym ciągu będą rozważane skończeniewymiarowe.

Jeżeli przedstawi się wektor w bazie (jako kombinację wektorów bazowych), otrzyma się zestaw współczynników z ciała liczbowego w liczbie równej wymiarowi przestrzeni. Jeżeli ustalimy określony porządek wektorów w bazie, to współczynniki będą miały określony porządek. Takie uporzadkowane współczynniki nazywa się współrzędnymi wektora. Zbiór współczynników wraz z określeniem bazy jednoznacznie identyfikuje wektor. Wektor za pomocą współczynników zapisuje się w taki sposób: $v = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$, gdzie $v_1 \ldots v_n$ to kolejne współrzędne w przestrzeni n-wymiarowej.

Należy pamiętać, że współrzędne wektora mają znaczenie tylko wraz z określeniem bazy. W 2 różnych bazach ten sam wektor ma różne współrzędne.

Krótkie przypomnienie wiadomości z algery liniowej

Przekształcenia liniowe

Przekształcenie działa na jednej przestrzeni V produkując nową przestrzeń U. Jest to więc funkcja $f : V \rightarrow U$. Przekształcenie liniowe dodatkowo (ze względu na to, że jest "linowe") spełnia warunek:

$$f(\alpha v + \beta u) = \alpha f(v) + \beta f(u) \ \forall v \in V, u \in U$$

Tak więc przekształcenie zamienia jedną przestrzeń na drugą. Jeżeli przekształcenie zamienia prestrzeń na inną o tym samym wymiarze, to rozmiar bazy zachowuje się, tylko zmieniają się wektory bazowe. A więc współrzędne wektorów zmieniają się. Wektory przestrzeni "zostają w miejscu" tylko są "widziane z innego punktu widzenia". Albo, baza "zostaje w miejscu", a każdy wektor przestrzeni zostaje zmieniony.

Podobnie jak wektor można przestawić jako jednowymiarową tablicę liczb (współrzędnych), przekształcenie liniowe można przedstawić jako dwuwymiarową tablicę liczb. Niech $f : V \to U$. Bazy w przestrzeniach V i U: $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ - baza w V, $\{y_i\}_{i=1}^{m}$ - baza w U. Wówczas:

$$f(v) = f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

$$f(x_i) \in U$$

$$f(x_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} y_i$$

a_{ji}, $i = 1 \dots n$, $j = 1 \dots m$ - tablica dwuwymiarowa liczb:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Taką tablicę określa się mianem macierzy.

Krótkie przypomnienie wiadomości z algery liniowej

Iloczyn macierzy z wektorem

Przekształcenie działa na każdy wektor z jednej przestrzeni dając wektor w innej przestrzeni. Mając daną macierz i współrzędne wektora, jakie będą współrzędne wektora w nowej przestrzeni? Mając macierz o elementach a_{ji} wynik v' działania przekształcenia odpowiadającemu tej macierzy na wektor v obliczamy następująco:

$$v'_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} v_k$$

Można to zapisać tak:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ {\color{red}a_{21}} & {\color{red}a_{22}} & {\color{red}\dots} & {\color{red}a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {\color{red}v_1} \\ {\color{red}v_2} \\ {\color{red}\dots} \\ {\color{red}v_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v'_1 \\ {\color{red}v'_2} \\ \dots \\ v'_m \end{bmatrix}$$

Jeżeli $f : V \to U$ i $g : U \to W$ to $h : V \to W,\ h(v) = g(f(v))$ nazywamy złożeniem g i f. Oznaczamy $h = g \circ f$. Czyli przekształcamy przestrzeń, dostając inną przestrzeń, po tę nową przestrzeń znowu przekształcamy dostając trzecią. Odwrócenie złożenia nie jest zawsze możliwe, a nawet gdy jest to nie zawsze jest przemienne. Działaniem analogicznym dla macierzy jest iloczyn macierzy. Niech V, U, W mają wymiary odpowiednio n, m, l. Wówczas mając macierz przekształcenia f o współczynnikach a, i macierz przekształcenia g o współczynnikach b, macierz h o współczynnikach c jest zdefiniowana naztępująco:

$$c_{ji} = \sum_{k=1}^{m} b_{jk} a_{ki},\ \ i = 1 \ldots n, j = 1 \ldots l$$

Można zapisać:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \dots & b_{lm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{l1} & c_{l2} & \dots & c_{ln} \end{bmatrix}$$

Warto zauważyć, że iloczyn macierzy przez wektor można uznać za szczególny przypadek iloczyny 2 macierzy, jeżeli potraktuje się wektor jako macierz kolumnową (macierz o jednym wierszu i jednej lub więcej kolumnach)

Przekształcenie $f : V \rightarrow V', \ \dim(V) = \dim(V')$ jest nazywane odwracalnym, jeżeli istnieje takie przekształcemie $g : V' \rightarrow V$, że $f \circ g = g \circ f = i$, gdzie i jest przekształceniem identycznościowym o własności $i(v) = v \ \forall v$. Oznaczamy: $g = f^{-1}$ Aby przekształcenie było odwrcalne potrzeba i wystarczy, żeby było różnowartościowe i żeby każdemu wektorowi obrazu odpowiadał wektor w pierwotnej przestrzeni.

Odwracalna macierz przekształcenia to macierz reprezętująca odwracalne przekształcenie. Macierz odwracalna musi być kwadratowa (przestrzenie "z" i "do" mają ten sam wymiar). Dla odwracalnej macierzy A mamy macierz odwrotną A^-1 taką, że $AA^{-1} = I$. Macierze A^{-1} i I również są kwadratowe.

Macierz I ma postać:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Krótkie przypomnienie wiadomości z algery liniowej

Transpozycja macierzy

Dla macierzy A o współczynnikach a_{ji} macierz A^T o współczynnikach a_{ij} nazywa się transponowaną do A.

Krótkie przypomnienie wiadomości z algery liniowej

Iloczyn skalarny

Dla przestrzeni liniowej można zdefiniować operację działającą na parze wektorów zwaną iloczynem skalarnym. Iloczyn skalarny przypisuje parze wektorów liczbę z ciała nad którym jest przestrzeń. Oznacza się: (v, u) lub $v \cdot u$. Iloczyn skalarny musi spełniać 3 warunki: $(v, u) = (u, v)^*$, $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, u) = \alpha_1(v_1, u) + \alpha_2(v_2, u)$, $(v, v) \geqslant 0$.

Standardowy iloczyn skalarny dla przestrzeni $\mathbb{R}^n$ zdefiniowany jest jako: $\sum_{i=1}^n v_i u_i$, gdzie v_i, u_i to odpowiednio i-ta współrzędna wektora v i i-ta współrzędna wektora u i $u, v \in \mathbb{R}^n$. Iloczyn ten można zapisać jako iloczyn macierzy: $(v, u) = v^T u$

O 2 wektorach u, v mówi się, że są ortogonalne, gdy $(u, v) = 0$.

Przestrzeń Euklidesa $\mathbb{R}^n$

Przykładem przestrzeni wektorowej jest n-wymiarowa przestrzeń Euklidesa (z układem współrzędnych Kartezjusza). W przestrzeni tej mamy standardową bazę złożoną z 3 wektorów oznaczonych e_x, e_y, e_z. Przyjęty jest standardowy iloczyn skalarny. W przestrzeni tej dla każdego wekrora v definiuje się normę przypisującą wektorowi liczbę: $|v| = \sqrt{(v, v)}$ Wektory bazowe są parami ortogonalne i mają wszystkie normę. Baza jest uporządkowana, dzięki czemu wektorom przypisane jest n współrzędnych. Wektory bazowe tworzą tzw. układ współrzędnych. Wektor zerowy nazywamy środkiem tego układu.

Szczególnym przypadkiem jest przestrzen Euklidesa trójwymiarowa. Ta przestrzeń jest wykorzystywana do opisu obiektów (powierzchni, prostych, punktów) w grafice trójwymiarowej, m.in OpenGL. Wynika to z faktu, że takiej przestrzeni żyjemy i obserwujemy przedmioty.

Przestrzeń Euklidesa $\mathbb{R}^n$

W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ definiuje się kąt między wektorami v, u jako liczbę: $\theta = \arccos \frac{(v,u)}{|v||u|}$

Iloczyn wektorowy w $\mathbb{R}^3$

W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ można zdefiniować operację na dwóch wektorach v i u dającą w wyniku wektor w:

$$w_1 = v_2 u_3 - v_3 u_2, \; w_2 = v_3 u_1 - v_1 u_3, \; w_3 = v_1 u_2 - v_2 u_1$$

Oznaczamy $w = v \times u$. w ma następujące własności: $(w, v) = (w, u) = 0, \; |w| = |u||v| \sin \theta$, gdzie θ to kąt między v i u. Iloczyn wektorowy można zapisać jako iloczyn wektora i macierzy antysymetrycznej. Niech:

$$[a]_\times = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Wówczas: $a \times b = [a]_\times b = [b]_\times^T a$

Przykłady przekształceń w $\mathbb{R}^3$

Skalowanie

Skalowanie to transformacja, która "wypycha" lub "wciska" przestrzeń w kierunku środka. W przestrzeni trójwymiarowej skalowanie może się odbywać wzdłuż 3 kierunków bazowych, mówimy więc o 3 współczynnikach skalowania. Jeżeli wszystkie współczynniki są równe to mówimy o skalowaniu jednolitym, w przeciwnym przypadku o niejednolitym. Skalowanie dla współczynników α, β, γ jest zdefinowane tak:

$$S(v) = S([v_1, v_2, v_3]) = [\alpha v_1, \beta v_2, \gamma v_3]$$

Odpowiada temu macierz:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

Skalowanie jednolite jest równoważne iloczynowi wektora przez liczbę. Skalowanie ze współczynnikami odpowiada odbiciu w obiektu w kierunku odpowiadającym współczynnikowi.

Przykłady przekształceń w $\mathbb{R}^3$

Rotacja

Rotacja obraca przestrzeń zachowując odległosci między punktami i kąty. Odpowiada ona spojrzeniu na tę samą przestrzeń z innego kierunku. Obrót dokonuje się wokół pewnej osi k o pewien kąt θ. Rotacja r jest zdefiniowana następująco:

$$r(v) = v\cos\theta + (k \times v)\sin\theta + k(k \cdot v)(1 - \cos\theta)$$

Macierz rotacji R można zapisać tak:

$$R = I\cos\theta + [k]_\times \sin\theta + (1 - \cos\theta)kk^T$$

Przykłady przekształceń w $\mathbb{R}^3$

Rotacja

Oznaczmy $c = \cos\theta,\; s = \sin\theta$. Szczególne przypadki:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{bmatrix}$$ macierz rotacji wokół pierwszego wektora bazowego

$$\begin{bmatrix} c & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & c \end{bmatrix}$$ macierz rotacji wokół drugiego wektora bazowego

$$\begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ macierz rotacji wokół trzeciego wektora bazowego

Przykłady przekształceń w $\mathbb{R}^3$

Pochylenie

Pochylenie to przekształcenie, któremu odpowiada macierz postaci:

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_{yx} & \alpha_{zx} \\ \alpha xy & 1 & \alpha zy \\ \alpha xz & \alpha yz & 1 \end{bmatrix}$$

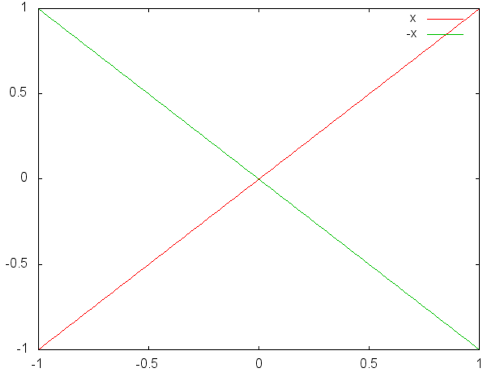
Np. macierz:

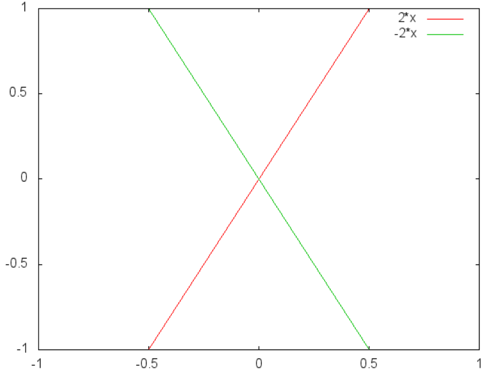
$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zachowuje współrzędne drugą i trzecią wektora, natomiast $v_1 = v_1 + \alpha v_2$. Takie przekształcenie pochyla przestrzeń wzdłuż pierwszego wektora bazowego.

Problem ze skalowaniem

Jeżeli mamy 2 wektory prostopadłe i przeskalujemy je niejednolicie, to w ogólności nie muszą być dalej prostopadłe. Czasami jednak wymagamy, aby wektor był prostopadły do innego. Tak jest w przypadku wektora normalnego do powierzchni.





Problem ze skalowaniem

Rozwiązania:

- Nie używać skalowania niejednolitego.
- Wykonać transformację na obu wektorach, następnie jeden "naprawić" kolejnym przekształceniem.

W drugim przypadku trzeba znaleźć takie przekształcenie, które przywraca prostopadłość wektorów. Okazuje się, że gdy macierz M reprezentuje przekształcenie (będące złożeniem między innymi skalowań niejednolitych), które działając na 2 wektorach niszczy prostopadłość, to macierz $M' = (M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$ zastosowana na jednym z wektorów przywraca wzajemną prostopadłość. Jednocześnie zachowuje ona długość.

Przestrzeń homogeniczna

Macierze n na n przestrzeni $\mathbb{R}^n$ są ograniczone. Mogą reprezentować tylko przekształcenia liniowe. Translacja, czyli przesunięcie środka układu współrzędnych przestrzeni o wektor nie jest przekształceniem liniowym. Nie ma więc macierzy, która odpowiada translacji. Przekształcenie które jest złożeniem przekształcenia liniowego i translacji nazywamy przekształceniem afinicznym.

Przekształcenia afinicznego nie można zapisac za pomocą macierzy n na n, można je zapisać za to za pomocą macierzy $n+1$ na $n+1$.

Przyjmujemy więc przestrzeń o wymiarze o 1 większym. Np. zamiast 3 mamy 4 wymiary. Jednak nie używamy "większej" przestrzeni w pełni. Tworzymy w niej klasy abstrakcji odpowiadające obiektom z "mniejszej" przestrzeni. Nadal mamy więc wektory np. trójwymiarowe, chociaż reprezentujemy je za pomocą 4 współrzędnych.

Współrzędne homogeniczne

Dodajemy więc do wektorów dodatkową współrzędną. Np. $[x, y, z] \rightarrow [x, y, z, w]$. Stwierdzamy, że dwa zestawy współrzędnych: $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}]$ i $[y_1, y_1, \ldots, y_{n+1}]$ przedstawiają ten sam wektor gdy $x_i/x_{n+1} = y_i/y_{n+1},\ \ i = 1 \ldots n$. Pojawiają nam się nowe twory - takie odpowiadające współrzędnym $[x_1, x_2, \ldots, 0]$. Te obiekty nazywamy "punktami w nieskończoności". Mają one jakiś kierunek i zwrot, ale są nieskończenie odległe od środka układu współrzędnych. Odpowiadają im półproste. W grafice 3d takimi obiektami są wektory normalne. Zwykłe wektory, odpowiadające punktom przestrzeni mają ostatnią współrzędną niezerową. Możemy utożsamić $[x, y, z] \sim [x, y, z, 1]$. Jeżeli w OpenGL przy podawaniu współrzędnych pominiemy ostatnią, zostanie przyjęta właśnie $w = 1$.

Podobnie jak zwykłym punktom odpowiadają wektory z jedynką na koncu, we współrzędnych homogenicznych macierzom przekształceń liniowych odpowiadają pewne szczególne macierze (n+1)-wymiarowe.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz translacji

Macierz translacji nie jest przekształceniem liniowym, więc nie ma odpowiadajacej macierzy w zwyklych współrzędnych. Ma jednak we współrzędnych homogenicznych:

$$T(v) = v + t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ v_w \end{bmatrix}$$

A więc we współrzednych homogenicznych można zapisać translację i przekształcenie liniowe, nawet oba, więc ogólnie mówiąc odowlne przekształcenie afiniczne. Ponadto dzięki tym współrzędnym mozna zapisać macierz rzutu perspektywicznego.

Macierze w starym i nowym OpenGL

OpenGL 1.0-1.5	OpenGL 2.0-2.1	Opengl 3.0-4.2
Funckjonalność wbudowana, ustalona (fixed)	$\Longleftrightarrow$	Brak funckjonalności wbudowanej - możliwość i konieczność budowania własnej
glLoadMatrix, glMultMatrix, glRotate, glTranslate, glScale, glMatrixMode. . .		glUniformMatrix*, glGetUniformLocation

Macierze w starym OpenGL

Przestrzenie

Współrzędne wysyłane do karty graficznej (np. przez *glVertex*) przechodzą szereg transformacji, zanim stworzą współrzędne punktu w oknie programu. Każda transformacja produkuje nową przestrzeń.

- Współrzędne wierzchołków tworzą przestrzeń obiektu (object space).
- Przestrzeń obiektu jest transformowana przez macierz modelu/widoku do przestrzeni oka (eye space).
- Przestrzeń oka jest transformowana przez macierz projekcji tworząc przestrzeń obcinania (clip space).

Macierze w starym OpenGL

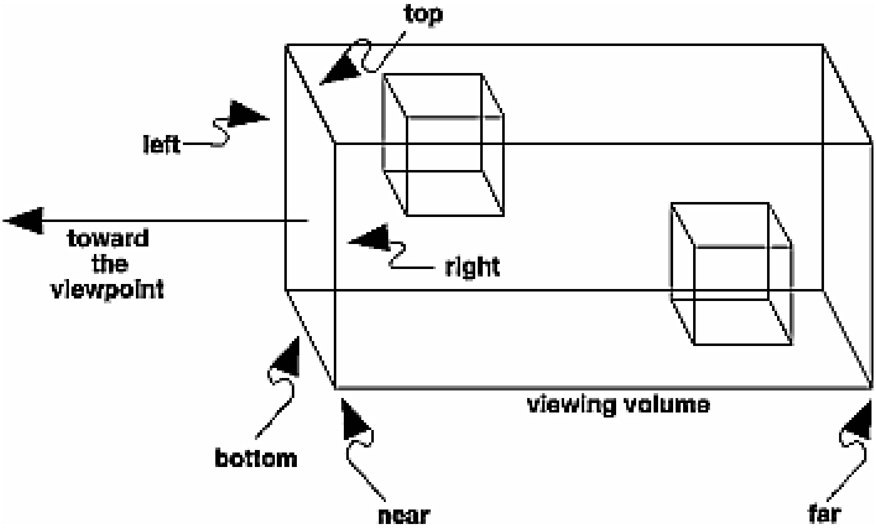
Przestrzenie

- Współrzędne w przestrzeni obcinania są dzielone przez współrzędną w, tworząc "zwykłą" trójwymiarową przestrzeń znormalizowaną urządzenia. Dodatkowo na tym etapie używane są płaszczyzny obcinania. (normalized device space).
- Znormalizowane przestrzeń urządzenia jest transformowana do przestrzeni okna (window space) przez transformację widoku roboczego (viewport transform).

Transformację modelu/widoku można rozdzielić na transformację widoku i modelu, jest to złożenie transformacji widoku i modelu (w tej kolejnści). W starym OpenGL jest to złączone, w nowym nie ma przekszód, aby je rozdzielić. Macierz modelu ma za zadanie poustawiać obiekty na scenie, zmienić ich kształt. Macierz widoku podowuje spojrzenie na obiekty z innego punktu widzenia (inna kamera).

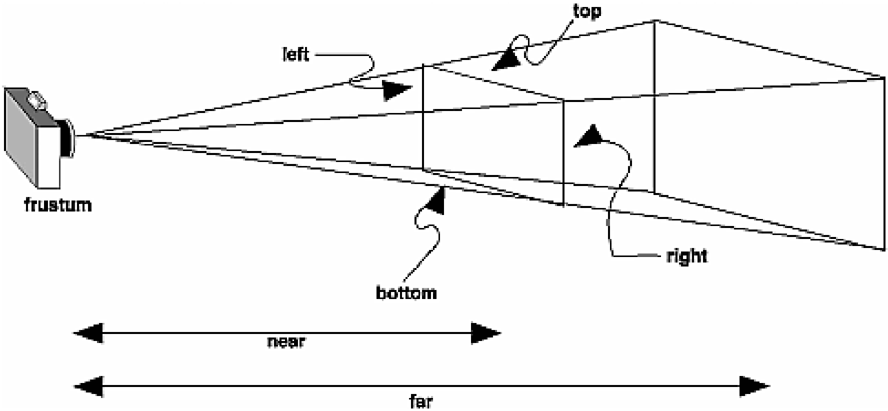
Macierze w starym OpenGL

glOrtho



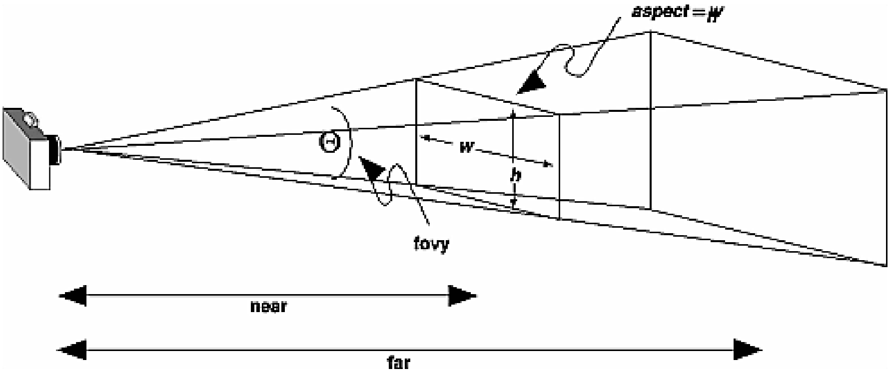
Macierze w starym OpenGL

glFrustum



Macierze w starym OpenGL

gluPerspective



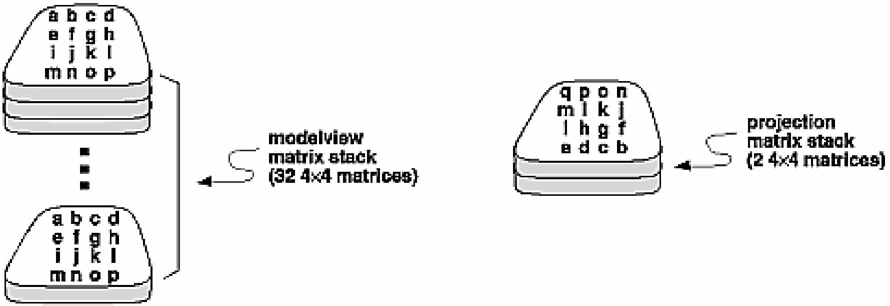
Macierze w starym OpenGL

Rodzaje macierzy

- Macierz Modelu/Widoku (modelview)
- Macierz Projekcji (projection)
- Macierz Tekstur (texture)
- Macierz Koloru (color)

Macierze w starym OpenGL

Stosy macierzy



```
uniform mat3 mat1;
uniform mat4 mat2;
mat4x2 mat3[5];
```

Macierze w nowym OpenGL

Modyfikacja macierzy w shaderze z zewnątrz

```
glUniformMatrix*fv(GLint location, GLsizei count,
                   GLboolean transpose, const GLfloat * value)
GLint glGetUniformLocation(GLuint program, const GLchar * name)
```