Modelowanie i identyfikacja

Wykład 6: Układy wielowymiarowe i nieliniowe

Gniewomir Sarbicki

Rozważmy równanie modelu ARX o m wejściach i n wejściach:

$$\boldsymbol{A}(z^{-1})\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{B}(z^{-1})\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{\epsilon}(t), \tag{1}$$

gdzie:

- $\boldsymbol{A}(z^{-1}) = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}_1 z^{-1} + \cdots + \boldsymbol{A}_{d_y} z^{-n}$
  - wielomian macierzowy o współczynnikach z $M_{\mathbb{R}}(n \times n)$ (macierz o wyrazach wielomianowych)
- $\boldsymbol{B}(z^{-1}) = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_1 z^{-1} + \cdots + \boldsymbol{B}_{d_u} z^{-m}$
  - wielomian macierzowy o współczynnikach z $M_{\mathbb{R}}(n \times m)$ (macierz o wyrazach wielomianowych)

Możemy zapisać powyższe równanie w postaci:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}(t) =& (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}(z^{-1}))\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{B}(z^{-1})\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{\epsilon}(t),\\ =& \left[\ -\boldsymbol{A}_1 \mid \ldots \mid -\boldsymbol{A}_{d_y} \mid \boldsymbol{B}_0 \mid \ldots \mid \boldsymbol{B}_{d_u}\ \right]\\ & \left[\ \boldsymbol{y}(t-1)^T \mid \ldots \mid \boldsymbol{y}(t-d_y)^T \mid \boldsymbol{u}^T(t) \mid \ldots \mid \boldsymbol{u}^T(t-d_u)\ \right]^T + \boldsymbol{\epsilon}(t)\end{aligned} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{y}^T(t) = \left[\ \boldsymbol{y}(t-1)^T \mid \ldots \mid \boldsymbol{y}(t-d_y)^T \mid \boldsymbol{u}^T(t) \mid \ldots \mid \boldsymbol{u}^T(t-d_u)\ \right]$$
$$\left[\ -\boldsymbol{A}_1 \mid \ldots \mid -\boldsymbol{A}_{d_y} \mid \boldsymbol{B}_0 \mid \ldots \mid \boldsymbol{B}_{d_u}\ \right]^T \stackrel{ozn}{=} \boldsymbol{\phi}^T\boldsymbol{\theta} \tag{3}$$

Jeżeli ustawimy powyższe równania dla kolejnych chwil czasowych jedno pod drugim, otrzymamy:

$$\boldsymbol{Y}(t) = \boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\theta}, \tag{4}$$

gdzie:

- kolumnami macierzy $\boldsymbol{Y}(t)$ są przebiegi kolejnych składowych wyjścia.
- wierszami macierzy $\boldsymbol{\Phi}(t)$ są przebiegi kolejnych składowych wyjścia przesunięte w czasie o $1 \ldots n$, następnie przebiegi kolejnych składowych wejścia, przesunięte w czasie o $1 \ldots m$,
- blokami macierzy $\boldsymbol{\theta}$ są transponowane współczynniki wielomianów macierzowych $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$.

Estymator znajdujemy podobnie jak dla przypadku SISO:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Phi}^T\right)^{-1}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{Y} \tag{5}$$

W układach nieliniowych funkcję liniową polegającą na mnożeniu wektora $\phi(t)$ (macierzy dla układów MIMO) przez wektor (wektor blokowy dla MIMO) zastępujemy funkcją nieliniową. Klasa modelu otrzymuje literę N na początku.

Model NARX:

$$y(t) = f(\phi(t)) + \epsilon(t) \tag{6}$$

Predyktorem optymalnym jest: $\hat{y}(n) = f(\phi(n))$.

Analogicznie dla pozostałych klas modeli.

Jeżeli w wyrażeniu na wyjście w modelu NFIR:

$$\hat{y}(t) = f(u(t), \ldots, u(t-n)) + \epsilon(n) \tag{7}$$

rozwiniemy funkcję f w szereg Taylora, otrzymamy model w postaci szeregu Voltery:

$$y(t) = \sum_{i_1=1}^{n} h_1(i_1)u(t-i_1) + \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_1=1}^{n} h_2(i_1, i_2)u(t-i_1)u(t-i_2) + \cdots + \epsilon(t) \tag{8}$$

Model Hammersteina - statyczny element nieliniowy na wejściu połączony szeregowo z liniowym układem dynamicznym:

$$u(t) \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow \boxed{T(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}} \longrightarrow y(t)$$

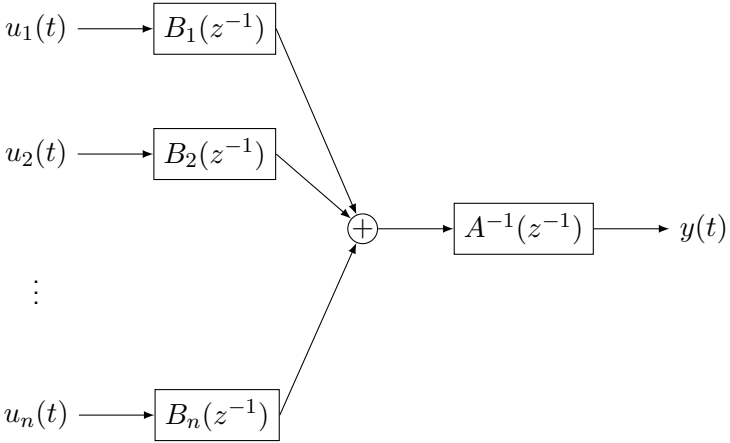
Załóżmy, że funkcja f ma rozwinięcie w szereg:

$$f(u) = u + \mu_2 u^2 + \mu^3 u^3 + \dots \tag{9}$$

(zakładamy brak składowej stałej, μ_1 zawsze można schować do $B(z^{-1})$).
Ponieważ pracujemy w skończonym zakresie wartości u, możemy przy założonej dokładności urwać szereg na r-tym wyrazie.
Równanie układu przyjmie postać:

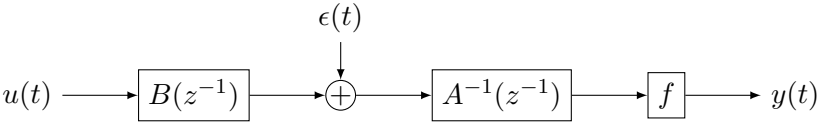
$$y(t) = \sum_{k=1}^{r} \mu_k \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u^k(t) \tag{10}$$

Wprowadzamy oznaczenia: $u^k = u_k$, $\mu_k B = B_k$ i przekształcamy układ w układ MISO:



Otrzymaliśmy układ ARX i stosujemy do niego poznane metody estymacji.

Model Wienera - model ARX połączony na wyjściu z nieliniowym układem statycznym:



Założenia:

- Wielomiany A i B znanych stopni, bez wspólnych czynników
- Układ B/A asymptotycznie stabilny
- Funkcja f odwracalna, f^{-1}aproksymowana wielomianem o znanym stopniu r:

$$f^{-1}(x) = \gamma_1 x + \cdots + \gamma_r x^r \tag{11}$$

$$y(t) = f\left(\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(t) + v(t)\right), \quad \text{gdzie} \quad v(t) = \frac{1}{A(z^{-1})}\epsilon(t) \tag{12}$$

Sygnał wyjściowy części liniowej:

$$f^{-1}(y(t)) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(t) + v(t) \tag{13}$$

Stąd:

$$y(t) = \frac{1}{\gamma_1}\left(\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(t) - \Delta f^{-1}(y(t)) + v(t)\right), \quad \text{gdzie} \quad \Delta f^{-1}(x) = f^{-1}(x) - \gamma_1 x. \tag{14}$$

Równoważnie:

$$y(t) = \left(1 - A(z^{-1})\right)y(t) + \frac{1}{\gamma_1}\left(B(z^{-1})u(t) - A(z^{-1})\Delta f^{-1}(y(t)) + \epsilon(t)\right). \tag{15}$$

Za predyktor $\hat{y}(t)$ bierzemy:

$$y(t) = \left(1 - A(z^{-1})\right) y(t) + \frac{1}{\gamma_1} \left(B(z^{-1})u(t) - A(z^{-1})\Delta f^{-1}(y(t))\right). \tag{16}$$

Możemy go zapisać jako:

$$\hat{y}(t) = \phi^T(t)\theta, \tag{17}$$

gdzie $\phi(t)^T = [-y(t-1), \ldots, -y(t-n), u(t), \ldots, u(t-m), -y^2(t), \ldots, -y^2(t-n), \ldots, -y^r(t), \ldots, -y^r(t-n)]$.

Nieliniowość możemy usunąć poprzez zamianę zmiennych.

Rozważmy system ogrzewania, w którym promieniowanie słoneczne ogrzewa wodę w panelu dachowym, pompa pompuje wodę w obiegu przechodzącym przez magazym ciepła. Drugi obieg odbiera ciepło z kolektora i dostarcza je do domu. Prędkość pompy obiegu pierwotnego jest sygnałem wejściowym, temperatura magazynu jest sygnałem wyjściowym, intensywność promieniowania i temperatura otoczenia są procesami stochastycznymi.

W naiwnym podejściu zapiszemy równania:

$$\begin{aligned} y(t) + a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) = b_1 u(t-1) + b_2 u(t-2) + c_1 I(t-1) + c_2 I(t-2) \\ + d_1 T_0(t-1) + d_2 T_0(t-2) \end{aligned} \tag{18}$$

Ten liniowy model nie będzie dobrym przybliżeniem, bo intensywność promieniowania i prędkość pompy nie dodają się, ale mnożą.

Bardziej fizyczny model:

- Wzrost temperatury czynnika w kolektorze jest proporcjonalny do intensywności promieniowania, ale powinien być pomniejszony o straty do otoczenia (proporcjonalne do różnicy temperatur) i ciepła odebranego z układu dzięki pracy pompy:

$$T_w(t+1) - T_w(t) = k_1 I(t) - k_2(T_w(t) - T_0(t)) - k_3(T_w(t) - y(t))u(t) \quad (19)$$

- Wzrost temperatury magazynu będzie zależał od róznicy temperatur, prędkości działania pompy:

$$y(t+1) - y(t) = k_4(T_w(t) - y(t))u(t) - k_5(y(t) - T_0(t)) \quad (20)$$

Z równania (20) wyznaczamy $T_w(t)$:

$$T_w(t) = \frac{y(t+1) - (1-k_5)y(t) - k_5 T_0(t)}{k_4 u(t)} + T_0(t), \tag{21}$$

wstawiamy do równania (19) i wyznaczamy $y(t+2)$:

$$\begin{aligned} y(t+2) = {} & k_1 k_4 I(t) u(t+1) + k_2 k_4 T_0(t) u(t+1) + k_3 k_4 u(t) u(t+1) y(t) \\ & + (1-k_5) y(t+1) + k_5 T_0(t+1) - k_4 u(t+1) T_0(t+1) \\ & + (1-k_2) \frac{u(t+1)}{u(t)} y(t+1) - (1-k_2)(1-k_5) \frac{u(t+1)}{u(t)} y(t) \\ & - (1-k_2) k_5 \frac{u(t+1)}{u(t)} T_0(t) + (1-k_2) k_4 u(t+1) T_0(t) - k_3 u(t+1) y(t+1) \\ & + k_3 (1-k_5) u(t+1) y(t) + k_3 k_5 u(t+1) T_0(t) - k_3 k_4 u(t) u(t+1) T_0(t) \end{aligned} \tag{22}$$

Możemy to przepisać jako:

$$y(t+2) = \vec{\theta} \cdot \vec{\phi}(t), \quad \text{gdzie:} \tag{23}$$

$$\vec{\theta} = \begin{bmatrix} k_1 k_4 \\ k_3 k_4 \\ 1 - k_5 \\ k_5 \\ -k_4 \\ 1 - k_2 \\ -(1-k_2)(1-k_5) \\ -(1-k_2)k_5 \\ k_4 + k_3 k_5 \\ -k_3 \\ k_3(1-k_5) \\ -k_3 k_4 \end{bmatrix}, \quad \vec{\phi}(t) = \begin{bmatrix} I(t)u(t+1) \\ u(t)u(t+1)y(t) \\ y(t+1) \\ T_0(t+1) \\ u(t+1)T_0(t+1) \\ \frac{u(t+1)}{u(t)} y(t+1) \\ \frac{u(t+1)}{u(t)} y(t) \\ \frac{u(t+1)}{u(t)} T_0(t) \\ u(t+1)T_0(t) \\ u(t+1)y(t+1) \\ u(t+1)y(t) \\ u(t)u(t+1)T_0(t) \end{bmatrix} \tag{24}$$