

Modelowanie i identyfikacja

Wykład 5: Modele ARX i ARMAX

Gniewomir Sarbicki

Rozważmy układ dyskretny:

$$u(t) \longrightarrow \boxed{G(z) = \frac{b_{n-m}z^{-(n-m)} + b_{n-m+1}z^{-(n-m+1)} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}} \longrightarrow y(t)$$

Jest on dany w dziedzinie czasu równaniem:

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_n y(t-n) = b_{n-m} u(t-n+m) + b_{n-m+1} u(t-n+m-1) + \dots + b_n u(t-n) \quad (1)$$

Wprowadzając oznaczenia:

$$\vec{\theta} = [b_{n-m}, b_{n-m+1}, \dots, b_n, -a_0, -a_1, \dots, -a_n]^T \quad (2)$$

$$\vec{\phi}(t) = [u(t-n+m), \dots, u(t-n), y(t-1), \dots, y(t-n)]^T \quad (3)$$

Możemy zapisać (1) jako

$$y(t) = \vec{\phi}(t)^T \cdot \vec{\theta} \quad (4)$$

Możemy zapisać powyższe równania dla N chwil czasowych jedno pod drugim i otrzymać równanie macierzowe:

$$\vec{Y}_N = \vec{\Phi}_N^T \cdot \vec{\theta}, \quad \vec{\theta} \in \mathbb{R}^{n+m+1}, \quad \Phi_N \in M_{\mathbb{R}}(n+m+1, N), \quad \vec{Y}_N \in \mathbb{R}^N \quad (5)$$

Możemy spojrzeć na powyższe równanie jako na rozkład wektora Y_N na kombinację wierszy macierzy Φ_N , o współczynnikach z wektora θ .

Dla dużych N będzie to układ nadokreślony i w przypadku generycznym sprzeczny. W przypadku gdy wektor \vec{Y}_N nie leży w $n+m+1$ -wymiarowej podprzestrzeni przestrzeni \mathbb{R}^N (napinanej przez wiersze macierzy Φ_N), chcemy znaleźć najbliższy mu element w tej podprzestrzeni. Będzie to rzut ortogonalny wektora \vec{Y}_N na tę podprzestrzeń, czyli element \hat{Y}_N podprzestrzeni minimalizujący $\|\vec{Y}_N - \hat{Y}_N\|^2$.

$\frac{1}{N} \|\vec{Y}_N - \hat{Y}_N\|^2$ jest to średnie odchylenie wyjścia mierzonego od wyjścia modelowanego:

$$V = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (y(t) - \hat{y}(t))^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left(y(t) - \vec{\phi}(t)^T \cdot \vec{\theta} \right)^2 \quad (6)$$

Będziemy je minimalizować po składowych wektora θ :

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} V = -\frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \phi_i(t) \left(y(t) - \vec{\phi}(t)^T \cdot \vec{\theta} \right) = 0. \quad (7)$$

Zapisujemy otrzymane równania jako równość dwóch wektorów kolumnowych:

$$\sum_{t=1}^N \vec{\phi}(t) y(t) = \sum_{t=1}^N \vec{\phi}(t) \vec{\phi}(t)^T \vec{\theta} \quad \Rightarrow \quad \Phi_N \vec{Y}_N = \Phi_N \Phi_N^T \vec{\theta} \quad (8)$$

(macierz $\Phi_N \Phi_N^T$ to inny zapis macierzy $\sum_{t=1}^N \phi(t) \phi(t)^T$) i otrzymujemy:

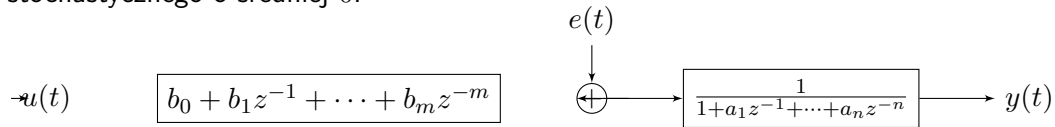
$$\vec{\theta} = \left(\Phi_N \Phi_N^T \right)^{-1} \Phi_N \vec{Y}_N \quad (9)$$

Otrzymaną wielkość nazywamy *estymatorem metody najmniejszych kwadratów*. W odróżnieniu od rzeczywistego wektora θ parametrów modelu, będziemy go oznaczać jako $\hat{\theta}_N$:

$$\hat{\theta}_N = \left(\Phi_N \Phi_N^T \right)^{-1} \Phi_N \vec{Y}_N \stackrel{\text{ozn}}{=} R(N)^{-1} \frac{1}{N} \Phi_N \vec{Y}_N \quad (10)$$

Czynnik $1/N$ został wprowadzony ze względu na stabilność algorytmów numerycznych.

Jeżeli w układzie mamy dodatkowo obecny szum $e(t)$ - realizację pewnego procesu stochastycznego o średniej 0:



$$y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_n y(t-n) = b_1 u(t-1) + \dots + b_m u(t-m) + e(t) \quad (11)$$

to otrzymujemy model **ARX**.

$$\hat{\theta}_N = R(N)^{-1} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y(t) \phi(t) - R(N)^{-1} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e(t) \phi(t) \quad (12)$$

wartość oczekiwana drugiego składnika sumy (błędu estymacji) wynosi 0, zatem estymata jest nieobciążona.

Obliczmy macierz kowariancji dla estymacji:

$$\begin{aligned}\text{Cov}(\hat{\theta}_N) &= \mathbb{E} \left(R(N)^{-1} \sum_{t,s=1}^N e(t)e(s)\phi(t)\phi(s)^T R(N)^{-1} / N^2 \right) \\ &= R(N)^{-1} \left(\sum_{t,s=1}^N \mathbb{E}(e(t)e(s)) \phi(t)\phi(s)^T \right) R(N)^{-1} / N^2\end{aligned}$$

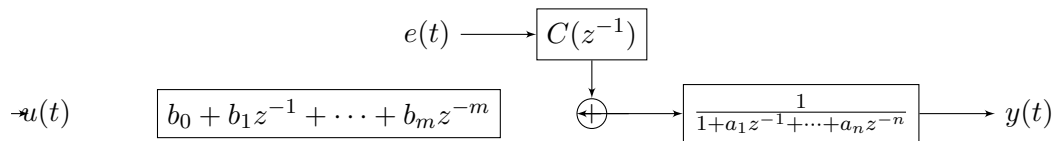
Jeżeli szum jest szumem białym o mocy λ ($\mathbb{E}(e(t)e(s)) = \lambda\delta(t-s)$), to:

$$\text{Cov}(\hat{\theta}_N) = \lambda R(N)^{-1} / N \quad (13)$$

Najczęściej bierzemy szum biały o rozkładzie gaussowskim: $e(t) \sim \mathcal{N}(0, \lambda)$.

Bardziej ogólny szum możemy zamodelować jako splot szumu białego o mocy λ z pewną transmitancją:

$$v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c(k)e(t-k) \qquad v(z) = c(z)e(z) \qquad (14)$$



Jego średnie czasowe są dalej równe 0, a jego funkcja autokorelacji:

$$C(\tau) = \mathbb{E}(v(t)v(t - \tau)) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} c(k)c(k - \tau) \quad (15)$$

W szczególności jego moc wynosi:

$$\sigma^2(v(t)) = C(0) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} c(k)^2 \quad (16)$$

W przypadku takiego szumu, macierz kowariancji dla estymacji wynosi:

$$\text{Cov}(\hat{\theta}_N) = R(N)^{-1} \left(\sum_{t,s=1}^N C(t-s) \phi(t) \phi(s)^T \right) R(N)^{-1} / N^2 \quad (17)$$

Jej elementy diagonalne to wariancje wyznaczanych parametrów. Pozwalają one na zadanym poziomie ufności wyznaczyć przedziały ufności parametrów.

Z równania (5): $Y_N = \Phi_N^T \theta$ wyliczamy estymatę: $\hat{\theta}_N = (\Phi_N \Phi_N^T)^{-1} \Phi_N Y_N$ (10).

Założmy, że mamy obliczony $\hat{\theta}_N$. Zapiszmy równanie na $\hat{\theta}_{N+1}$:

$$\hat{\theta}_{N+1} = (\Phi_N \Phi_N^T + \phi_{N+1} \phi_{N+1}^T)^{-1} (\Phi_N Y_N + \phi_{N+1} y_{N+1}). \quad (18)$$

Obliczmy pierwszy czynnik w (18):

$$(\Phi_N \Phi_N^T + \phi_{N+1} \phi_{N+1}^T)^{-1} = (\Phi_N \Phi_N^T)^{-1} - \frac{(\Phi_N \Phi_N^T)^{-1} \phi_{N+1} \phi_{N+1}^T (\Phi_N^T \Phi_N)^{-1}}{1 + \phi_{N+1}^T (\Phi_N^T \Phi_N)^{-1} \phi_{N+1}}, \quad (19)$$

gdzie wykorzystaliśmy następujący

Lemat:

$$(R + xx^T)^{-1} = R^{-1} - \frac{R^{-1}xx^TR^{-1}}{1 + x^TR^{-1}x} \quad (20)$$

Dowód: *Przypadek szczególny lematu o odwrotności macierzy:*

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(DA^{-1}B + C^{-1})^{-1}DA^{-1}.$$

Przekształćmy drugi czynnik w (18):

$$\begin{aligned} \Phi_N Y_N + \phi_{N+1} y_{N+1} &= \Phi_N \Phi_N^T \hat{\theta}_N + \phi_{N+1} (y_{N+1} - \phi_{N+1}^T \hat{\theta}_N) + \phi_{N+1} \phi_{N+1}^T \hat{\theta}_N \\ &= (\Phi_N \Phi_N^T + \phi_{N+1} \phi_{N+1}^T) \hat{\theta}_N + \phi_{N+1} e_{N+1}, \end{aligned} \quad (21)$$

gdzie $e_{N+1} = y_{N+1} - \phi_{N+1}^T \hat{\theta}_N$ jest uchybem estymacji (innowacją), gdy wartość w kroku $(N+1)$ -szym obliczamy przy pomocy wektora $\hat{\theta}_N$.

Zbierając powyższe obserwacje otrzymujemy wzór rekurencyjny:

$$\hat{\theta}_{N+1} = \hat{\theta}_N + \left(\left(\Phi_N^T \Phi_N \right)^{-1} - \frac{\left(\Phi_N^T \Phi_N \right)^{-1} \phi_{N+1} \phi_{N+1}^T \left(\Phi_N^T \Phi_N \right)^{-1}}{1 + \phi_{N+1}^T \left(\Phi_N^T \Phi_N \right)^{-1} \phi_{N+1}} \right) \phi_{N+1} e_{N+1} \quad (22)$$

Wzór (22) możemy zapisać jako:

$$\hat{\theta}_{N+1} = \hat{\theta}_N + P_{N+1} \phi_{N+1} e_{N+1} \quad (23)$$

$$P_{N+1} = P_N - \frac{P_N \phi_{N+1} \phi_{N+1}^T P_N}{1 + \phi_{N+1}^T P_N \phi_{N+1}} \quad (24)$$

Wartości początkowe: P_0 - dowolna macierz dodatniookreślona, θ_{N+1} - dowolny wektor.

Algorytm RLS (*Recursive Least Squares*), znaleziony przez Gaussa (1777 - 1855).

Współczynnik zapominania

W przypadku identyfikacji układów, których parametry zmieniają się wolno w czasie, modyfikujemy funkcję błędu wprowadzając *współczynnik zapominania*:

$$E(\theta) = \sum_{k=1}^n \lambda^{n-k} e^2(k) \quad (25)$$

λ jest liczbą z przedziału $(0, 1)$, w praktyce: .95 - .99.

Wzór rekurencyjny w algorytmie RLS zmodyfikuje się do:

$$P_{N+1} = \frac{1}{\lambda} \left(P_N - \frac{P_N \phi_{N+1} \phi_{N+1}^T P_N}{\lambda + \phi_{N+1}^T P_N \phi_{N+1}} \right) \quad (26)$$

Rozważamy układ o stabilnej transmitancji toru zakłóceń $H(z)$ (bieguny w kole jednostkowym). Jeżeli dodatkowo transmitancja ma zera w kole jednostkowym, wtedy możemy skonstruować stabilny filtr odwrotny o transmitancji $H(z)^{-1}$.

Zmienna losowa poziomu zakłócenia w chwili t jest równa:

$$v(t) = h(0)e(t) + \sum_{k=1}^{\infty} h(k)e(t-k), \quad (27)$$

przy czym zawsze można przeskalować $H(z)$ skalując wariancję szumu $e(t)$ - możemy odtąd założyć, że $h_0 = 1$.

Prawdopodobieństwo że zmienna losowa $v(t) \in [x, x + \Delta x)$ przy założeniu jej wcześniejszych wartości wynosi:

$$P(x \leq v(t) < x + \Delta x | v_{-\infty}^{t-1}) \approx f_e \left(x - \sum_{k=1}^{\infty} h(k)e(t-k) \right) \Delta x \quad (28)$$

Nieobciążonym estymatorem wielkości $v(t)$ będzie wielkość, której wartość oczekiwana wynosi 0. Ponieważ $\mathbb{E}(e(t)) = 0$, będzie to $\sum_{k=1}^{\infty} h(k)e(t-k) \stackrel{ozn}{=} \hat{v}(t|t-1)$. Jest to jednocześnie estymator minimalizujący średni błąd kwadratowy predykcji.

$$\begin{aligned}\hat{v}(t|t-1) &= \sum_{k=1}^{\infty} h(k)e(t-k) = (H(z) - 1)e(t) = \frac{H(z) - 1}{H(z)}v(t) \\ &= \left(1 - H^{-1}(z)\right)v(t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{h}(k)v(t-k)\end{aligned}\tag{29}$$

Sygnał wyjściowy modelu liniowego dyskretnego jest dany wzorem:

$$y(t) = G(z)u(t) + v(t) \quad (30)$$

Założmy, że chcemy przewidzieć wartość $y(t)$ na podstawie danych $\{u(s), y(s)\}$ w chwilach poprzednich i wartości wejścia w chwili t :

$$\begin{aligned} \hat{y}(t) &= G(z)u(t) + \hat{v}(t|t-1) = G(z)u(t) + \left(1 - H^{-1}(z)\right) v(t) \\ &= G(z)u(t) + \left(1 - H^{-1}(z)\right) (y(t) - G(z)u(t)) \\ &= H^{-1}(z)G(z)u(t) + \left(1 - H^{-1}(z)\right) y(t) \end{aligned} \quad (31)$$

Stabilne rozwiązanie istnieje, jeżeli H nie ma zer, a G nie ma biegunów poza kołem jednostkowym.

Błąd predykcji: $y(t) - \hat{y}(t|t-1) = e(t)$.

W przypadku modelu ARX: $G = B/A$, $H = 1/A$ i otrzymujemy równanie (1):

$$\hat{y}(t) = Bu(t) + (1 - A)y(t), \quad (32)$$

które zapisaliśmy jako: $\hat{y}(t) = \phi^T \cdot \theta$ i wyznaczyliśmy z regresji liniowej wektor parametrów θ .

W przypadku modelu ARMAX: $G = B/A$, $H = C/A$ otrzymujemy równanie:

$$C\hat{y}(t) = Bu(t) + (C - A)y(t) \quad (33)$$

przepisujemy je jako:

$$\begin{aligned} \hat{y}(t) &= Bu(t) + (1 - A)y(t) + (C - 1)(y(t) - \hat{y}(t)) \\ &= Bu(t) + (1 - A)y(t) + (C - 1)e(t) \end{aligned} \quad (34)$$

teraz wektor θ tworzą współczynniki wielomianów B , $1 - A$ i $C - 1$, a wektor ϕ tworzą wektory $u(t)$, $y(t)$ i $e(t)$. Zauważmy, że wektor $e(t)$ zależy również od θ (regresja pseudoliniowa):

$$\hat{y}(t) = \phi^T(\theta) \cdot \theta \quad (35)$$

Uwaga ta dotyczy również modeli BJ, OE, MA, ARMA.

Zastosowanie metody RLS do modeli z nieliniową zależnością estymatora wyjścia od parametrów modelu nazywa się metodą RELS - *Recursive Extended Least Squares* (rekurencyjną metodą regresji pseudoliniowej). Jej zbieżność w sektorze parametrów c_i jest powolna.

W tych klasach modeli estymatora wektora parametrów układu poszukuje się efektywnie metodą Gaussa-Newtona.

Założmy, że nie potrafimy wyznaczyć miejsca zerowego funkcji pewnej funkcji $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ i musimy je wyznaczać numerycznie.

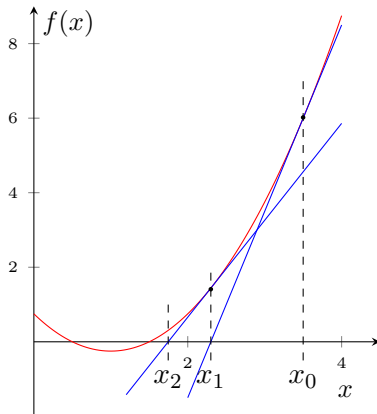
Startujemy z pewnego punktu x_0 , dla którego $f(x_0) \neq 0$. Rozwijamy funkcję w szereg wokół punktu x_0 :

$$0 = f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (36)$$

$$x \approx x_0 - f(x_0)/f'(x_0) \quad (37)$$

Szereg jest ucięty, więc wzór jest przybliżony

Metoda Newtona



Założmy, że poszukujemy numerycznie minimum pewnej funkcji $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Poszukujemy zatem zera pochodnej, wzór rekurencyjny w metodzie Newtona przyjmie postać:

$$x_{n+1} = x_n - f'(x_n)/f''(x_n) \quad (38)$$

W przypadku funkcji $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ wielu zmiennych:

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - H^{-1}(f)(x_n) \vec{\nabla} f(x_n)^T, \quad (39)$$

gdzie $H(f)$ oznacza macierz drugich pochodnych (Hessian).

Zastosujmy metodę Newtona do funkcji $V(\vec{\theta}) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e_t^2$. Mamy:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_j}(\vec{\theta}) = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N e_t \frac{\partial e_t}{\partial \theta_j} \quad (40)$$

$$\vec{\nabla} V(\vec{\theta})^T = \frac{2}{N} J^T \vec{e}, \quad \text{gdzie} \quad J_{ij} = \frac{\partial e_i}{\partial \theta_j} \quad (41)$$

$$H(V)(\vec{\theta}) = \frac{2}{N} \left(\sum_t H(e_t) e_t + J^T J \right) \quad (42)$$

W metodzie Gaussa-Newtona zaniedbujemy pierwszy czynnik w (42) i wtedy (39) przyjmie postać:

$$\vec{\theta} = (J^T J)^{-1} J^T \vec{e} \quad (43)$$

Kolejną modyfikacją metody jest zakończenie jej na jednym kroku:

$$\vec{\theta}_{N+1} = \vec{\theta}_N - (J_{N+1}^T J_{N+1})^{-1} J_{N+1}^T \vec{e}_{N+1} \quad (44)$$

W przypadku liniowym mamy $J_{N+1} = -\Phi_{N+1}^T$ i otrzymamy:

$$\begin{aligned} \hat{\vec{\theta}}_{N+1} &= \hat{\vec{\theta}}_N + (\Phi_{N+1} \Phi_{N+1}^T)^{-1} \Phi_{N+1} (\vec{Y}_{N+1} - \Phi_{N+1}^T \hat{\vec{\theta}}_N) \\ &= (\Phi_{N+1} \Phi_{N+1}^T)^{-1} \Phi_{N+1} \vec{Y}_{N+1} \end{aligned} \quad (45)$$

i otrzymujemy estymator metody najmniejszych kwadratów.

Przekształcając równanie predykcji w modelu ARMAX (33):

$$\begin{aligned} C\hat{y}(t) &= Bu(t) + (C - A)y(t) \\ Ce(t) &= Bu(t) - Ay(t) \end{aligned} \quad (46)$$

otrzymujemy równanie uchybu predykcji.

Różniczkując powyższe równanie po składowych wektora parametrów układu ARMAX $\vec{\theta}$ otrzymamy:

$$\begin{aligned} C(z^{-1}) \frac{\partial e(t)}{\partial a_i} &= y(t-i) \Rightarrow \frac{\partial e(t)}{\partial a_i} = -\frac{1}{C(z^{-1})} y(t-i) \stackrel{ozn}{=} -y^F(t-i) \\ C(z^{-1}) \frac{\partial e(t)}{\partial b_i} &= u(t-i) \Rightarrow \frac{\partial e(t)}{\partial b_i} = \frac{1}{C(z^{-1})} u(t-i) \stackrel{ozn}{=} u^F(t-i) \\ e(t-i) + C(z^{-1}) \frac{\partial e(t)}{\partial c_i} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial e(t)}{\partial c_i} = -\frac{1}{C(z^{-1})} e(t-i) \stackrel{ozn}{=} -e^F(t-i) \end{aligned} \quad (47)$$

Macierz J w (44) tworzą wartości sygnałów filtrowanych y^F, u^F, e^F :

$$J = \begin{bmatrix} -y^F(n-1) & \dots & -y^F(n-n_a) & u^F(n-1) & \dots & u^F(n-n_b) & -e^F(n-1) & \dots & -e^F(n-n_c) \\ -y^F(n-2) & \dots & -y^F(n-1-n_a) & u^F(n-2) & \dots & u^F(n-1-n_b) & -e^F(n-2) & \dots & -e^F(n-1-n_c) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \quad (48)$$

Jeżeli $\text{ARMAX} \rightarrow \text{ARX}$, to $C(z^{-1}) = 1 \Rightarrow$ sygnały nie są filtrowane i blok mnożący uchyb predykcji znika z macierzy $J \Rightarrow$ macierz J staje się macierzą Φ , a poprawka w metodzie jest dokładnie estymatorem metody najmniejszych kwadratów.

Przejdzie od metody najmniejszych kwadratów do jednokrokowej metody G-N wykonujemy, zamieniając macierz Φ na macierz $-J^T$. Wzór rekurencyjny metody RLS przejdzie po takiej zmianie na:

$$\hat{\theta}_{N+1} = \hat{\theta}_N + P_{N+1} \psi_{N+1} e_{N+1}, \quad (49)$$

$$P_{N+1} = P_N - \frac{P_N \psi_{N+1} \psi_{N+1}^T P_N}{1 + \psi_{N+1}^T P_N \psi_{N+1}}, \quad (50)$$

gdzie $\psi_{N+1} = \vec{\nabla}_{\theta} e_{N+1}^T = -\vec{\nabla}_{\theta} \hat{y}_{N+1}(\theta_N)$.

Metoda ta nosi nazwę RPEM - *Recursive Prediction Error Method*.

Jeżeli do modelu o nieliniowej zależności estymaty wyjścia od parametrów modelu zastosujemy metodę RLS, to takie postępowanie nosi nazwę RELS - *Recursive PseudoLinear Regresion* - ekstrapolacja metody poza założenia, przy których została wyprowadzona.

W przypadku ARMAX, odstępstwo od metody RPEM polega na zaniedbaniu filtrowania wektora ϕ_N :

$$\psi_N = \frac{1}{C(z^{-1})} \phi_N \quad (51)$$

metoda ta zbiega do poprawnego rezultatu gdy:

$$\forall \omega \operatorname{Re} \frac{1}{C(e^{i\omega})} \geq \frac{1}{2} \quad (52)$$

Założmy, że wyjście układu w modelu jest obarczone szumem V_0 :

$$\vec{Y}(N) = \vec{\Phi}^T(N)\vec{\theta}_0 + \vec{V}_0(N) \quad (53)$$

Estymator metody najmniejszych kwadratów jest nieobciążony: $\mathbb{E}(\hat{\vec{\theta}}_N - \vec{\theta}_0) = 0$. Nie osiąga on jednak swojej wartości oczekiwanej w granicy dla jednej serii pomiarów:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\vec{\theta}}_N - \vec{\theta}_0 &= \lim_{N \rightarrow \infty} R(N)^{-1} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \Phi(N) V_0(N) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} R(N)^{-1} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \vec{\phi}(t) v_0(t) \end{aligned} \quad (54)$$

Różnica ta będzie równa 0, jeżeli v_0 jest nieskorelowany z wierszami Φ , czyli z wektorem wartości wyjściowych.

Jeżeli v_0 nie jest szumem białym, jest na ogół skorelowany z wyjściem.

W takiej sytuacji w równaniu na estymator metody najlepszych kwadratów:

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \vec{\phi}(t) \left(y(t) - \vec{\phi}(t)^T \hat{\vec{\theta}}_N \right) = 0 \quad (55)$$

Zastąpimy wektor $\vec{\phi}(t)$ pewną jego funkcją $\vec{\zeta}(t)$:

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \vec{\zeta}(t) \left(y(t) - \vec{\phi}(t)^T \hat{\vec{\theta}}_N \right) = 0, \quad (56)$$

od której będziemy wymagać, by była nieskorelowana z v_0 :

$$\mathbb{E} \left(\vec{\zeta}(t) v_0(t) \right) = \vec{0} \quad (57)$$

$$\det \frac{1}{N} \sum_t \vec{\zeta}(t) \vec{\phi}^T(t) \neq 0 \quad (58)$$

Składowe wektora $\vec{\zeta}(t)$ nazywamy *zmiennymi instrumentalnymi* (*IV - instrumental variables*).

Macierz, której kolumnami są $\vec{\zeta}(t)$ w kolejnych chwilach czasu, będziemy oznaczać jako Z .

Rozwiązaniem równania (55) jest:

$$\hat{\theta}_N^{IV} = (Z\Phi^T)^{-1}Z\vec{Y} \quad (59)$$

Jeżeli $Z = \Phi$, to otrzymujemy estymator metody najmniejszych kwadratów.

Zmienne instrumentalne dobieramy tak, by były niezależne od szumu, ale możliwie silnie skorelowane z wektorami $\vec{\phi}(t)$ (kolumnami macierzy $\Phi(t)$, regresorami).

Praktyczną metodą doboru jest zastąpienie w Z wyjść z układu (skorelowanych z szumem) przez wejścia filtrowane przez transmitację układu, otrzymaną najpierw za pomocą metody najmniejszych kwadratów.

Prostszą metodą jest zastąpienie wyjść przez przesunięte w czasie wyjścia.

Powtarzając kroki w wyprowadzeniu algorytmu RLS, możemy wyrazić wzór na $\hat{\theta}_N$ przez $\hat{\theta}_{N-1}$ oraz ζ_N i ϕ_N :

$$\hat{\theta}_N = \hat{\theta}_{N-1} + P_N \zeta_N e_N \quad (60)$$

$$P_N = P_{N-1} - \frac{P_{N-1} \zeta_N \phi_N^T P_{N-1}}{1 + \phi_N^T P_{N-1} \zeta_N} \quad (61)$$

Otrzymujemy w ten sposób rekurencyjny algorytm zmiennych instrumentalnych (RIV).

Do powyższych wzorów możemy wprowadzić współczynnik zapominania:

$$\hat{\theta}_N = \hat{\theta}_{N-1} + P_N \zeta_N e_N \quad (62)$$

$$P_N = \frac{1}{\lambda} \left(P_{N-1} - \frac{P_{N-1} \zeta_N \phi_N^T P_{N-1}}{\lambda + \phi_N^T P_{N-1} \zeta_N} \right) \quad (63)$$