Modelowanie i identyfikacja

Wykład 3: układy hydrauliczne cieplne i pneumatyczne

Gniewomir Sarbicki

Czynnikiem roboczym jest ciecz. Zmienne sprzężone: przepływ (pochodna objętości po czasie) q i ciśnienie p.
Ciśnienie i gęstość cieczy powiązane są *współczynnikiem sprężystości objętościowej*:

$$K = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\epsilon} = -V\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V} = \rho\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} \tag{1}$$

W cieczach rośnie on liniowo z ciśnieniem. Dla powietrza: $\beta = p\kappa$ ($\kappa = 7/5$).
Efektywny współczynnik sprężystości objętościowej jest sumą: sprężystości płynu, powietrza i ścianek przewodu:

$$\frac{1}{\beta_e} = \frac{1}{\beta_0} + \frac{V_p}{V_0}\frac{1}{\beta_p} + \frac{1}{\beta_c} \tag{2}$$

Lepkość dynamiczna opisuje liniową zależność pomiędzy prędkością v względną dwóch równoległych warstw płynu odległych o y, a wywołanym przez nią naprężeniem ścinającym τ:

$$\tau[\mathrm{Pa}] = \mu[\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}]\frac{v[\mathrm{m/s}]}{y[\mathrm{m}]} \tag{3}$$

Mechaniką płynu rządzi równanie Naviera-Stokesa:

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\vec{u}-f\right)=-\vec{\nabla}p+\mu\vec{\nabla}^2\vec{u} \tag{4}$$

Ustalając: charakterystyczną długość L, charakterystyczną skalę czasową τ, charakterystyczną prędkość U, charakterystyczne ciśnienie i charakterystyczną siłę F, przechodzimy do bezwymiarowej postaci równania N-S:

$$\left(\frac{\rho L^2}{\mu\tau}\right)\frac{\partial\hat{\vec{u}}}{\partial\hat{\tau}}+\mathrm{Re}\ \hat{\vec{u}}\cdot\hat{\vec{\nabla}}\hat{\vec{u}}-\hat{\vec{\nabla}}^2\hat{\vec{u}}=\left(\frac{\rho L^2 F}{\mu U}\right)\hat{f}-\left(\frac{PL}{\mu U}\right)\hat{\vec{\nabla}}\hat{p}, \tag{5}$$

gdzie bezwymiarowa wielkość $\mathrm{Re}=\rho UL/\mu$ charakteryzująca przepływ nazywa się *liczbą Reynoldsa*.

Rozważmy rozwiązania stacjonarne przy braku sił zewnętrznych w dwóch skrajnych przypadkach.

Jeżeli $\mathrm{Re} \ll 1$, to dominuje składnik z Laplasjanem i przepływ jest laminarny:

$$\mu \vec{\nabla}^2 u = \vec{\nabla} p \tag{6}$$

Załóżmy, że mamy osiowo i translacyjnie symetryczny przepływ w cylindrycznej rurze o promieniu R, wywołanym gradientem ciśnienia wzdłuż rury:

$$\mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u = \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) u = \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) u = \frac{\partial}{\partial z} p \tag{7}$$

W kolejnych całkowaniach otrzymamy:

$$\mu u = \frac{r^2}{4}\frac{\partial p}{\partial z} + A \ln r + B, \tag{8}$$

gdzie A musi się zerować, a $B = -\frac{R^2}{4}\frac{\partial p}{\partial z}$, żeby prędkość zerowała się na ściance rury. Wycałkowując prędkość po przekroju rury otrzymujemy przepływ:

$$q = -\frac{\pi R^4}{8\mu}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{9}$$

Musi on być taki sam w każdym przekroju, zatem ciśnienie spada liniowo i mamy:

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{8\mu}{\pi R^4} q = \frac{128\mu}{\pi D^4} q \tag{10}$$

Udowodniliśmy prawo Hagena-Poiseuille'a - odpowiednik prawa Ohma dla układów hydraulicznych.

Równanie opisuje poprawnie rzeczywistość (założenie laminarności jest spełnione), gdy: $L/R \geqslant \mathrm{Re}/48$.

Jeżeli warunek nie jest spełniony, przepływ jest opisywany równaniem Darcy'ego-Weisbacha:

$$\frac{\Delta p}{L} = f_D \frac{\rho \langle u \rangle^2}{2D_H}, \tag{11}$$

gdzie f_D jest *współczynnikiem oporu Darcy'ego*. Dla przepływu laminarnego $f_D = 64/\mathrm{Re}$. W ogólności jest nieliniową funkcją liczby Reynoldsa i chropowatości rury i zależność przepływu od różnicy ciśnień przestaje być liniowa.

Prawo Hagena-Poiseuille'a dla innych przekrojów:

- elipsa

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{64(D_x^2 + D_y^2)}{\pi (D_x D_y)^3} \mu q \tag{12}$$

- trójkąt równoboczny

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{320/\sqrt{3}}{a^4} \mu q \tag{13}$$

Jeżeli $\mathrm{Re} \gg 1$ (mała lepkość), to w równaniu N-S (stacjonarne, bez sił zewnętrznych) dominuje człon $\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}u^2$ i, przy założeniu nieściśliwości:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}\rho u^2 + p\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}\rho u^2 + p = \mathrm{const} \tag{14}$$

i otrzymujemy równanie Bernoulliego (nieliniowa zależność między prędkością a ciśnieniem).

Dla dużych Re rozwiązania na ogół nie są stacjonarne i przepływ jest turbulentny (prędkość w danym punkcie zmienia się co do kierunku i amplitudy).

Doświadczalnie: dla rury okrągłej dla $\mathrm{Re} < 2100$ przepływ wody laminarny, dla $\mathrm{Re} > 4000$ przepływ turbulentny

Rozważmy zwężkę o polu przekroju A_0 w rurze o polu przekroju A_1. Mamy układ równań:

$$u_1 A_1 = u_2 A_2 \tag{15}$$

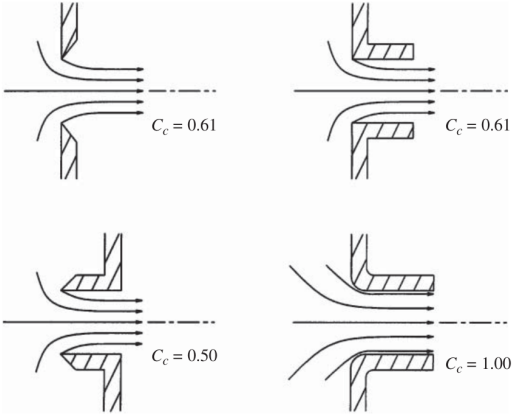
$$u_2^2 - u_1^2 = \frac{2}{\rho}(p_1 - p_2) \tag{16}$$

gdzie A_2 to efektywne pole strumienia za zwężką: $A_2 = CA_0$, gdzie C to współczynnik kontrakcji.

Rozwiązując układ równań otrzymamy równanie zwężki:

$$q = \frac{C\pi d^2/4}{\sqrt{1-\beta^4}}\sqrt{\frac{2}{\rho}\Delta p}, \tag{17}$$

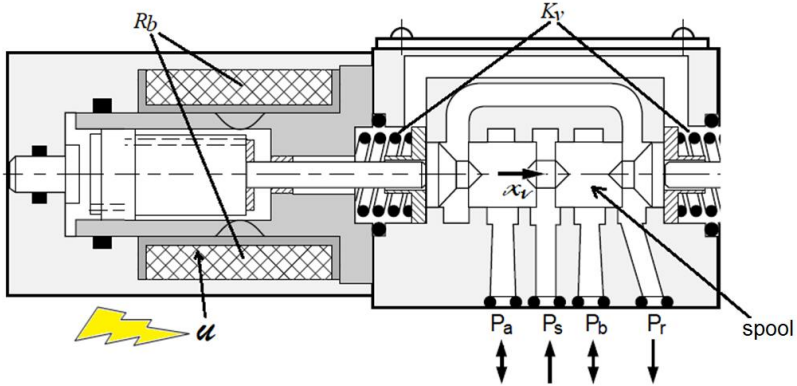
gdzie β jest stosunkiem średnicy efektywnego strumienia i średnicy rury.



N. D. Manring, R. C. Fales: Hydraulic Control Systems

Inne opory przepływu: opory na kolanach i redukcjach.

Zawory rozdzielające



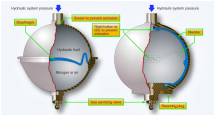
Działanie zaworu opisane jest schematem połączeń przy położeniach suwaka (dodatnie, neutralne ujemne)

Biblioteka Simscape Isothermal Liquid

Podstawowe elementy:

-

Constant Volume Chamber (Zbiornik wyrównawczy(przeponowy)) - ciśnienie proporcjonalne do ilości płynu, czyli całki z przepływu.



-

Laminar leakage (przepływ laminarny) - spadek ciśnienia proporcjonalny do przepływu, możliwość implementacji różnych przekrojów przewodów.
-

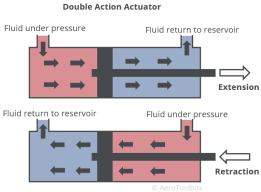
Flow resistance (opór przepływu) - nieliniowa zależność dla dużych przepływów: $\Delta p \sim \dot{q}\sqrt{\dot{q}^2 + \dot{q}_{lam}^2}$.
-

Pipe (rura) - możliwość zaimplementowania ścieśliwości: $q_A + q_B = \dot{p}V/\beta$ i bezwładności: $\Delta p = \rho L/S\dot{q}$ płynu w długim przewodzie.
-

Local restriction (zwężka) - może być sterowana sygnałem zewnętrznym (zawór).

- Tłok - translacyjny konwerter hydrauliczno - mechaniczny

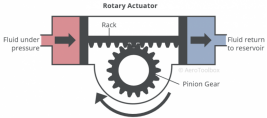
$$F = S(p_a - p_b)$$
$$\dot{p}_a = \beta/V_a(q_a - Sv)$$
$$\dot{p}_b = \beta/V_b(Sv - q_b)$$

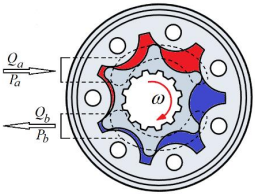


gdzie β - współczynnik sprężystości objętościowej.

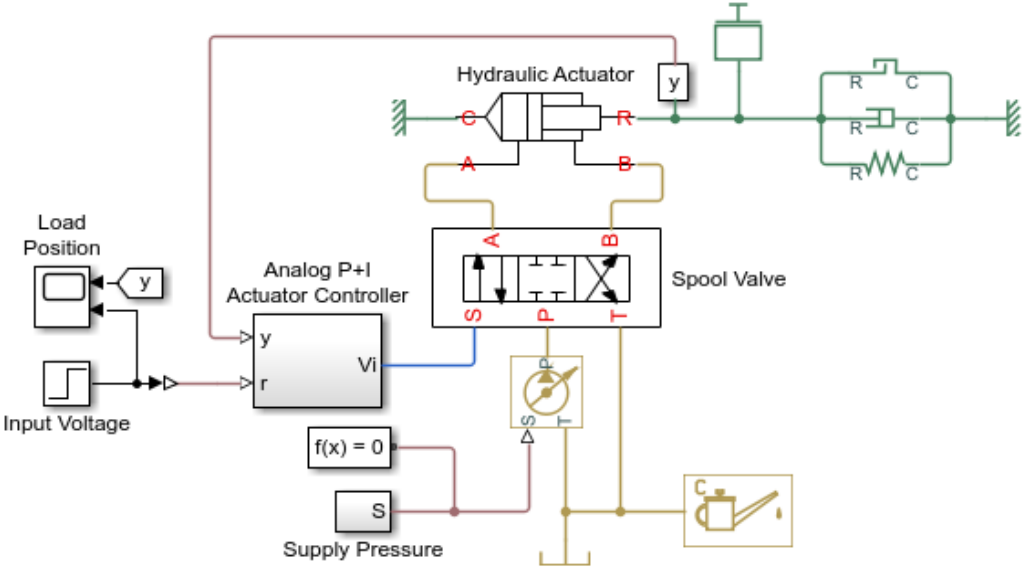
- Wzmacniacz hydrauliczny - dwa cylindry o różnych średnicach tłoków na stałe połączonych. Odpowienik przekładni mechanicznej.
- Silnik hydrauliczny / Pompa - obrotowy konwerter hydrauliczno - mechaniczny.

$$\tau = D(p_a - p_b)$$
$$\dot{p}_a = \beta/V_a(q_a - D\omega)$$
$$\dot{p}_b = \beta/V_b(D\omega - q_b)$$



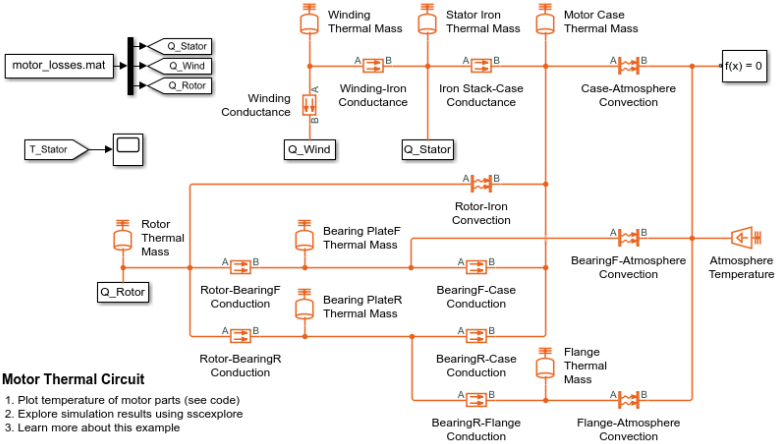


- Odniesienie do ciśnienia atmosferycznego
- Nieskończony opór hydrauliczny - separacja dwóch fragmentów układu różnicą ciśnień bez przepływu
- Żródło ciśnienia
- Żródło przepływu


Hydraulic Actuator
y
C
R
A
B
R
C
R
C
R
C
Load
Position
y
Analog P+I
Actuator Controller
y
r
Vi
A
B
S
P
T
Spool Valve
Input Voltage
f(x) = 0
S
Supply Pressure
C

Opisujemy rozpływ ciepła pomiędzy elementami układu. Zmiennymi sprzężonymi są temperatura T i ciepło Q.
Elementy:

- masa cieplna (pojemność): cm (masa razy ciepło właściwe)
- przepływ ciepła proporcjonalny do różnicy temperatur, stała proporcjonalności: k (mechanizmy: przewodnictwo, konwekcja, radiacja)
- źródło ciepła
- kontakt z rezerwuarem o stałej temperaturze



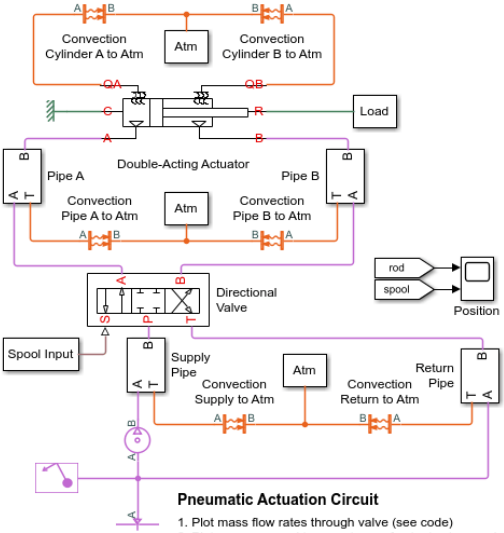
Motor Thermal Circuit

1. Plot temperature of motor parts (see code)
2. Explore simulation results using sscexplore
3. Learn more about this example

Sprężanie i rozprężanie gazu (jeżeli nie jest bardzo wolne) powoduje zmiany jego temperatury zgodnie z równaniem adiabaty: $pV^{-\varkappa} = \mathrm{const}$, co należy uwzględnić. Przewód pneumatyczny ma dodatkowy port określający temperaturę gazu, powiązaną z jego ciśnieniem. Łączymy ją z referencyjną temperaturą otoczenia za pomocą oporu cieplnego.

Zmiany temperatury i ciśnienia powodują, że przepływy na końcach przewodu nie są takie same:

$$\dot{m}_A + \dot{m}_B = \frac{\partial M}{\partial p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial M}{\partial T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \tag{18}$$



Pneumatic Actuation Circuit

1. Plot mass flow rates through valve (see code)
2. Plot pressures and temperatures of actuator (see code)
3. Explore simulation results using sscexplore
4. Learn more about this example