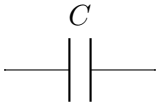
# Modelowanie i identyfikacja

## Wykład 1: Modelowanie - układy elektryczne i mechaniczne

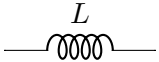
Gniewomir Sarbicki

Rozważać będziemy obwody elektryczne zawierające elementy liniowe. Obwody mogą zawierać:

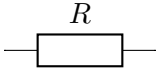
- pojemności - napięcie na końcach jest proporcjonalne i przeciwne do różnicy ładunków na okładkach - całki z prądu ładującego




- indukcyjności - napięcie na końcach jest proporcjonalne i przeciwne do pochodnej przepływającego prądu

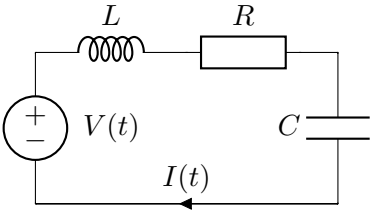


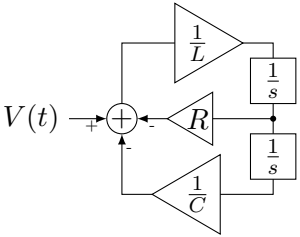

- oporności - napięcie na końcach jest proporcjonalne i przeciwne do przepływającego prądu



## II prawo Kirchoffa

Suma sił elektromotorycznych i spadków napięć w obwodzie zamkniętym jest równa $0$.

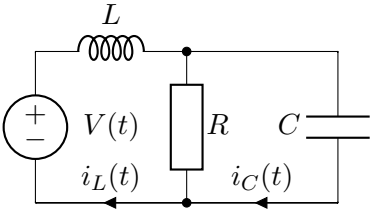


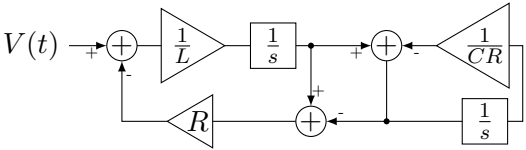




$$V - L\dot{I} - RI - \frac{1}{C}\int I\mathrm{d}t = 0 \qquad (1)$$

## I prawo Kirchoffa

Suma prądów wpływających do/wypływających z węzła jest równa $0$.




$$\begin{cases} V - L\dot{I}_L - R(I_L - I_C) = 0 \\ R(I_L - I_C) = \frac{1}{C}\int I_C \mathrm{d}t \end{cases} \qquad (2)$$

Rozważać będziemy układy mechaniczne jednowymiarowe. Układy takie mogą składać się z:

- mas
- elementów sprężystych, siła działająca pomiędzy końcami elementu sprężystego jest proporcjonalna i przeciwna do zmiany jego długości.

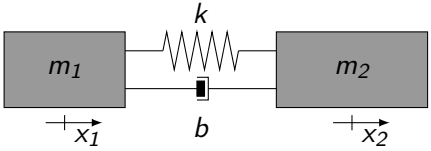
- elementów tłumiących, siła działająca pomiędzy końcami elementu tłumiącego jest proporcjonalna i przeciwna do różnicy ich prędkości.

Zmiennymi stanu w układzie mechanicznym są przemieszczenia w węzłach łączących elementy i ich pochodne.

## Druga zasada dynamiki Newtona (zasada zachowania pędu)

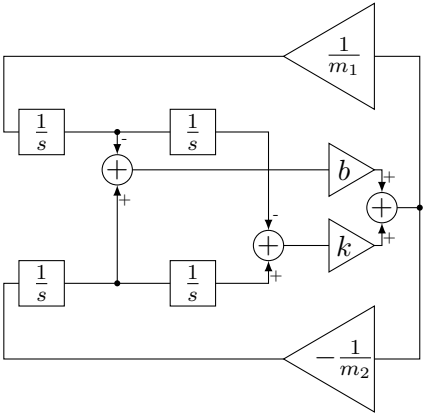
Suma sił działających na masy w układzie (razem z siłami bezwładności) jest równa $0$.

Układ izolowany

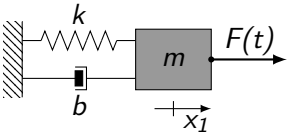



$$m_1\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) + b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 0 \quad (3)$$

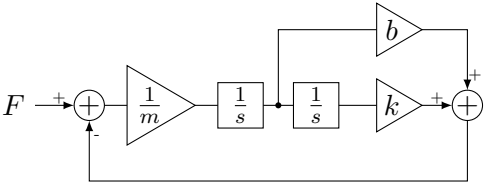
$$m_2\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) + b(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0 \quad (4)$$



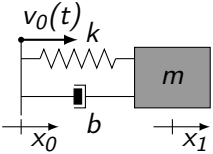
## Układ z siłą wymuszającą:



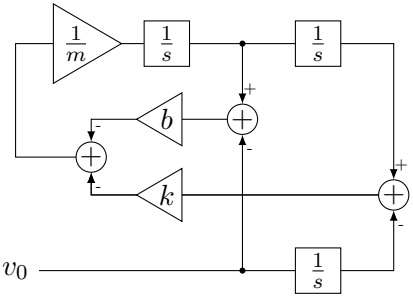

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F(t) \qquad (5)$$

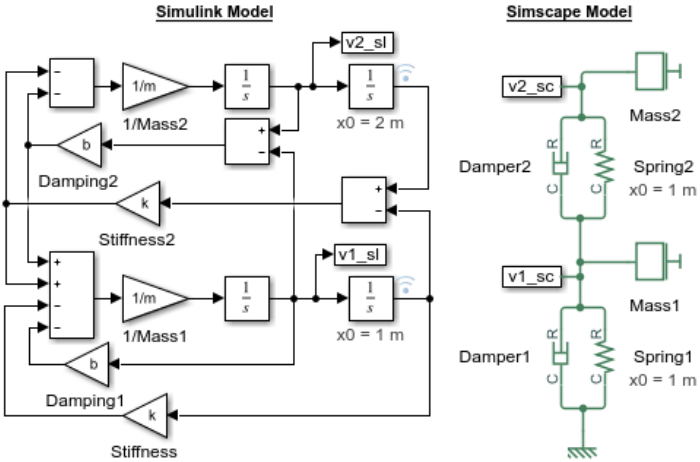



## Układ z wymuszeniem kinematycznym:




$$m\ddot{x} = -k(x - \int_0^t v_0 \mathrm{d}t) - b(\dot{x} - v_0) \quad (6)$$






(https://www.mathworks.com/help/physmod/simscape/physical-modeling.html)

Rozważać będziemy układy dynamiczne jednowymiarowe. Układy takie mogą składać się z:

- mas o momentach bezwładności:

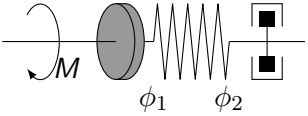
- elementów sprężystych, moment siły działający pomiędzy końcami elementu sprężystego jest proporcjonalny i przeciwny do kąta skręcenia elementu.

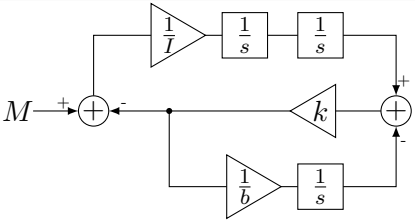
- elementów tłumiących, moment siły działający pomiędzy końcami elementu tłumiącego jest proporcjonalny i przeciwny do różnicy ich prędkości kątowych.

Zmiennymi stanu w układzie mechanicznym są kąty obrotu węzłów łączących elementy i ich pochodne.

## Druga zasada dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego

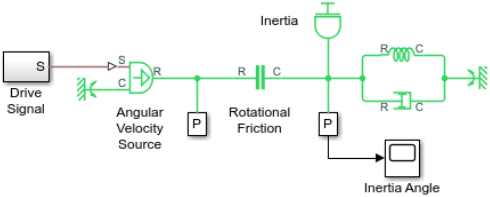
Suma momentów działających na masy w układzie (razem z momentami sił bezwładności) jest równa $0$.

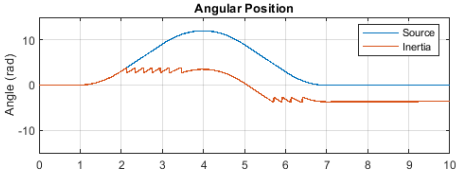


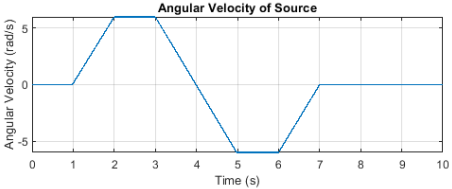




$$I\ddot{\phi}_1 + k(\phi_1 - \phi_2) = M(t) \qquad (7)$$

$$k(\phi_1 - \phi_2) - b(\dot{\phi}_2) = 0 \qquad (8)$$


Inertia
S
Drive
Signal
S
C
R
Angular
Velocity
Source
P
R
C
Rotational
Friction
P
R
C
R
C
Inertia Angle

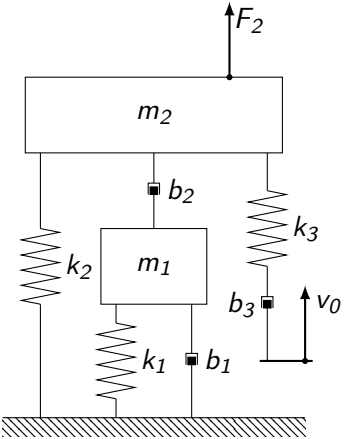

Angular Position
Angle (rad)
10
0
-10
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Source
Inertia

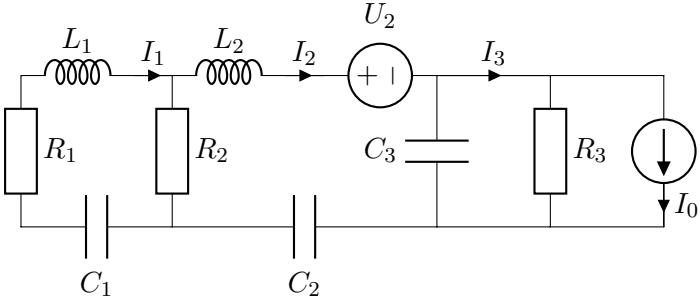

Angular Velocity of Source
Angular Velocity (rad/s)
5
0
-5
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Time (s)

| Układy elektryczne | | Układy. mechaniczne postępowe | | Układy mechaniczne obrotowe | |
|---|---|---|---|---|---|
| $Q$ | ładunek | $x$ | przesunięcie | $\phi$ | kąt obrotu |
| $i$ | prąd | $v$ | prędkość | $\omega$ | prędkość kątowa |
| $U$ | napięcie | $F$ | siła | $M$ | moment siły |
| $L$ | indukcyjność | $m$ | masa | $I$ | moment bezwładności |
| $R$ | opór | $b$ | współczynnik tłumienia | | |
| $C^{-1}$ | pojemność$^{-1}$ | $k$ | stała sprężystości | | |
| źródło prądowe | | wymuszenie kinetyczne | | | |
| źródło napięciowe | | siła wymuszająca | | | |
| transformator idealny | | dźwignia | | przekładnia | |
| transformator idealny sumujący | | dźwignia sumująca | | przekładnia planetarna | |
| zamknięta pętla | | węzeł | | | |
| węzeł | | zamknięta pętla | | | |
| połączenie równoległe | | połączenie szeregowe | | | |
| połączenie szeregowe | | połączenie równoległe | | | |

Cztery ostatnie wiersze - graf obwodu elektrycznego i równoważnego mechanicznego są do siebie dualne.

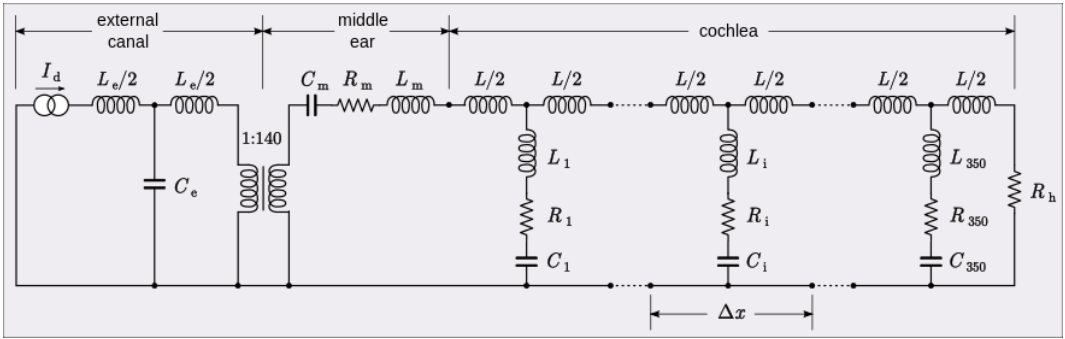
$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + b_1\dot{x}_1 + k_1x_1 + b_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + k_2x_2 + b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_3(x_2 - x_3) = F_2 \\ b_3(\dot{x}_3 - v_0) + k_3(x_3 - x_2) = 0 \end{cases} \tag{9}$$




$$\begin{cases} L_1\dot{I}_1 + R_1I_1 + \frac{1}{C_1}\int I_1\mathrm{d}t + R_2(I_1 - I_2) = 0 \\ L_2\dot{I}_2 + \frac{1}{C_2}\int I_2\mathrm{d}t + R_2(I_2 - I_1) + \frac{1}{C_3}\int(I_2 - I_3)\mathrm{d}t = U_2 \\ R_3(I_3 - I_0) + \frac{1}{C_3}\int(I_3 - I_2)\mathrm{d}t = 0 \end{cases} \tag{10}$$

# Układ elektryczny równoważny układowi mechanicznemu ludzkiego ucha




(https://en.wikipedia.org/wiki/Impedance_analogy)