Matematyka dyskretna

Wykład 2: Kombinatoryka

Gniewomir Sarbicki

Kombinatoryka

Definicja

Kombinatoryka zajmuje się określaniem mocy zbiorów skończonych, w szczególności mocy zbiorów odwzorowań jednego zbioru w drugi spełniających określone warunki.

Prawa przeliczania

Fakt:

Zbiory skończone A i B mają tyle samo elementów $\iff$ istnieje pomiędzy nimi bijekcja.

Twierdzenie: (Prawo mnożenia)

Moc iloczynu kartezjańskiego jest równa iloczynowi mocy jego składników:

$$\#(A_1 \times \cdots \times A_n) = (\#A_1) \cdot \cdots \cdot (\#A_n)$$

Zasada włączania i wyłączania

Moc sumy zbiorów wynosi: $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$

Można tę obserwację uogólnić na większą liczbę zbiorów:

Wzór Sylvester'a

$$\#(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=k}^{n} (-1)^k \sum_{X \subset \{1,\ldots,n\} : \#X = k} \# \bigcap_{i \in X} A_i$$

Np. Dla $n = 4$

$$\begin{aligned}
\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \#A_1 + \#A_2 + \#A_3 + \#A_4 - \\
\#(A_1 \cap A_2) - \#(A_2 \cap A_3) - \#(A_3 \cap A_4) \\
-\#(A_1 \cap A_3) - \#(A_1 \cap A_4) - \#(A_2 \cap A_3) \\
+\#(A_2 \cap A_3 \cap A_4) + \#(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_4) \\
+\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) - \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)
\end{aligned}$$

Zasada włączania i wyłączania

Przykład: Ile jest liczb naturalnych mniejszych niż 1000 podzielnych przez 2, 3 lub 5?

- $1000/2 = 500 \implies$ 499 liczb podzielnych przez 2
- $1000/3 = 333.(3) \implies$ 333 liczby podzielne przez 3
- $1000/5 = 200 \implies$ 199 liczb podzielnych przez 5
- $1000/6 = 166.(6) \implies$ 166 liczb podzielnych przez 6
- $1000/10 = 100 \implies$ 99 liczb podzielnych przez 10
- $1000/15 = 66.(6) \implies$ 66 liczb podzielnych przez 15
- $1000/30 = 33.(3) \implies$ 33 liczb podzielnych przez 30

$\#(A_2 \cup A_3 \cup A_5) = \#A_2 + \#A_3 + \#A_5 - \#(A_2 \cap A_3) - \#(A_3 \cap A_5) - \#(A_5 \cap A_2) + \#(A_2 \cap A_3 \cap A_5) =$
$499 + 333 + 199 - 166 - 99 - 66 + 33 = 733$

Zasada włączania i wyłączania

Zasadę włączania i wyłaczania stosuję się dla dowolnej miary określonej na podzbiorach jakiejś przestrzeni (liczba elementów podzbiorów skończonych jest szczególnym przypadkiem). Wzór ten wykorzystuje się również w teorii miary i prawdopodobieństwa.

Zasada szufladkowa Dirichleta

Fakt:

Jeżeli rozmieścimy n przedmiotów w m szufladkach, gdzie $n > k \cdot m$, wtedy przynajmniej w jednej szufladce będzie więcej niż k przedmiotów.

Przykład: Człowiek ma nie więcej niż 400 000 włosów. W mieście liczącym 1 mln mieszkańców przynajmniej 3 osoby mają tyle samo włosów.

Przykład: W turnieju piłkarskim każda drużyna gra z każdą. W każdym momencie istnieją dwie drużyny, które zagrały tyle samo meczów.

Wariacje z powtórzeniami

Definicja:

Wariacją z powtórzeniami długości k ze zbioru n-elementowego nazywamy ciąg długości k o wyrazach w tym zbiorze.

(Wariacja z powtórzeniami to dowolna funkcja z $\{1, \ldots, k)$ o wartościach w danym zbiorze)

Fakt:

Ilość wszystkich wariacji długości k z powtórzeniami ze zbioru n-elementowego wynosi n^k.

Dowód: (Z prawa mnożenia lub indukcyjnie)
Każdemu miejscu ciągu można przypisać jeden z n elementów zbioru A. Zbiór wszystkich ciągów jest równy $A \times \cdots \times A$ (k-krotny iloczyn kartezjański) i jako taki ma moc $(\#A)^k = n^k$. $\square$

Permutacje

Definicja:

Permutacją nazywamy dowolną różnowartościową funkcję odwzorowującą zbiór n-elementowy w siebie.

Przykład: Wszystkie permutacje zbioru $\{\bigstar, \spadesuit, \clubsuit\}$ to:

$$\{\bigstar, \spadesuit, \clubsuit\},\ \{\spadesuit, \clubsuit, \bigstar\},\ \{\clubsuit, \bigstar, \spadesuit\},\ \{\bigstar, \clubsuit, \spadesuit\},\ \{\clubsuit, \bigstar, \spadesuit\},\ \{\spadesuit, \clubsuit, \bigstar\}$$

Fakt:

Permutacje tworzą grupę przekształceń zbioru n-elementowego:

- Złożenie permutacji jest permutacją, składanie jest łączne (ale nie przemienne!)
- Istnieje permutacja identycznościowa
- Każda permutacja posiada permutację odwrotną

Permutacje

Fakt:

Ilość wszystkich permutacji zbioru n-elementowego wynosi $n!$.

Dowód: (Przez indukcję)

(P) Zbiór 1-elementowy ma dokładnie 1 permutację.

(I) Załóżmy że wszystkich permutacji zbioru $\{a_1, \ldots, a_n\}$ jest $n!$. Do każdego ciągu reprezentującego wynik działania permutacji można wstawić element a_{n+1} na $n+1$ sposobów, zatem można uzyskać $n! \cdot (n+1)$ permutacji zbioru $\{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$. $\square$

Wariacje bez powtórzeń

Definicja:

Wariacją bez powtórzeń zbioru n-elementowego długości k Nazywamy dowolny ciąg długości k o elementach ze zbioru, w którym każdy element nie występuje więcej niż raz.

(Wariacja bez powtórzeń to dowolna funkcja różnowartościowa z $\{1, \ldots, k\}$ o wartościach w danym zbiorze)

Fakt:

Ilość k-elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego wynosi $\frac{n!}{(n-k)!}$

Dowód: Pierwszy element wariacji możemy wybrać na n sposobów, drugi na $n-1$ sposobów, k-ty na $n-k+1$ sposobów. Ilość wszystkich możliwych wariacji wynosi zatem $n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Kombinacje

Definicja:

k-elementową kombinacją ze zbioru n-elementowego nazywamy dowolny podzbiór mocy k tego zbioru.

Fakt:

Ilość k-elementowych kombinacji ze zbioru n-elementowego wynosi

$$\binom{n}{k} \stackrel{df}{=} \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Dowód: Permutując wyrazy w kombinacji można otrzymać $k!$ wariacji bez powtórzeń z wyjściowego zbioru, zatem liczba kombinacji jest to liczba wariacji bez powtórzeń podzielona przez $k!$ $\square$

Kombinacje

Wzór dwumianowy:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Trójkąt Pascala:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

Kombinacje

Przykład: Na ile sposobów można wybrać 13 kart z 52 (kolejność na ręce nie jest istotna)? Odpowiedź $\binom{52}{13}$

Przykład: Na ile sposobów można wybrać 13 kart z 52, by dostać tylko czarne karty (kolejność na ręce nie jest istotna)? Odpowiedź $\binom{26}{13}$

Przykład: Ile jest prostokątów na kracie $\{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\}$ o bokach leżących na liniach kraty?
Położenie dwóch poziomych boków można wybrać na $\binom{n}{2}$ sposobów, a pionowych na $\binom{m}{2}$. Zatem liczba wszystkich takich prostokątów wynosi $\binom{n}{2}\binom{m}{2}$.

Kombinacje

Przykład: Na ile sposobów można włożyć k nierozróżnialnych kulek do n komórek tak, by w każdej komórce była co najwyżej jedna kulka?

Każde takie włożenie zadane jest jednoznacznie przez podzbiór zajętych komórek, zatem jest ich tyle ile k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego, czyli $\binom{n}{k}$.

Na tyle sposobów k fermionów może obsadzić pasmo energetyczne złożone z n stanów.

Kombinacje z powtórzeniami

Definicja:

Kombinacja k-elementowa z powtórzeniami ze zbioru n-elementowego, to wariacja z powtórzeniami, w której nie jest istotna kolejność.

Przykład: Kombinacje trzyelementowe ze zbioru $\{1, 2\}$ to: $\{1, 1, 1\}$, $\{1, 1, 2\}$, $\{1, 2, 2\}$, $\{2, 2, 2\}$

Każda taka kombinacja jest równoważna ciągowi typu $\bullet || \bullet \bullet \bullet | \bullet ||$, gdzie ścianek między kolejnymi wartościami jest $n - 1$, a wyrazów kombinacji k. Taki ciąg jest jednoznacznie wyznaczony przez podzbiór miejsc w których stoi $\bullet$. Liczba takich ciągów jest równa

$$\binom{k + n - 1}{k}$$

Kombinacje z powtórzeniami

Przykład: Na ile sposobów k bozonów może obsadzić pasmo złożone z n stanów energetycznych?

Na $\binom{k+n-1}{k}$ sposobów - każdemu bozonowi przypisujemy stan energetyczny, przy czym kilku bozonom można przypisać ten sam stan. Ponieważ bozony są nierozróżnialne, kolejność w otrzymanym ciągu nie gra roli. Każde przypisanie jest zatem k-elementową kombinacją z powtórzeniami ze zbioru n-elementowego

Zadanie: Ile jest obsadzeń, dla których każdy stan jest obsadzony?

Permutacje z powtórzeniami

Problem: Mamy zbiór n elementów, które są podzielone na k klas po n_k elementów. Ile rozróżnialnych ciągów można uzyskać permutując te elementy? Elementy z tej samej klasy traktujemy jako nierozróżnialne.

Odpowiedź: $\frac{n!}{n_1!\ldots n_k!} \stackrel{ozn}{=} \binom{n}{n_1,\ldots,n_k}$ rozróżnialnych ciągów.

Uogólnienie wzoru dwumianowego:

$$(x_1 + \cdots + x_k)^n = \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_k \geqslant 0 \\ n_1 + \cdots + n_k = n}} \binom{n}{n_1,\ldots,n_k} x_1^{n_1} \cdot \cdots \cdot x_k^{n_k}$$

Przestawienia

Definicja:

Przestawieniem nazywamy permutację bez punktów stałych

Twierdzenie:

Ilość przestawień zbioru n-elementowego wynosi:

$$n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$$

Dowód: (Zasada włączania i wyłączania)
Niech $A_{i_1,\ldots,i_k}$ oznacza zbiór permutacji zbioru $\{1,\ldots n\}$ o punktach stałych $i_1,\ldots,i_k$. Ilość permutacji posiadających punkty stałe jest równa:

Przestawienia

$$\#(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i_1} \#A_{i_1} - \sum_{i_1,i_2} \#A_{i_1,i_2} + \sum_{i_1,i_2,i_3} \#A_{i_1,i_2,i_3} \cdots - (-1)^n \#A_{1,\ldots,n} \tag{1}$$

Zasadę włączeń/wyłączeń stosujemy, ponieważ zbiory A_i i A_j nie są rozłączne (ich część wspólna to A_{ij}) i podobnie dla większej liczby indeksów.

Zbiór $A_{i_1,\ldots,i_k}$ ma $(n-k)!$ elementów (bo permutujemy tylko pozostałe elementy). Liczba takich zbiorów wynosi $\binom{n}{k}$, bo na tyle sposobów można wybrać elementy $i_1, \ldots, i_k$ ze zbioru $\{1, \ldots n\}$. Wstawmy te liczby do wzoru (1):

Przestawienia

$$n \cdot (n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)! - \cdots - (-1)^n \binom{n}{n}(n-n)!$$
$$= \sum_{i=1}^{n} -(-1)^i \frac{n!}{i!}$$

Natomiast permutacji bez punktów stałych będzie $n!$ minus ta liczba, czyli

$$n! + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i \frac{n!}{i!} = (-1)^0 \frac{n!}{0!} + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i \frac{n!}{i!} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{n!}{i!} \qquad \square$$

Liczba surjekcji

Twierdzenie:

Liczba surjekcji ze zbioru n-elementowego na m-elementowy jest równa

$$\sum_{k=0}(-1)^i\binom{m}{k}(m-k)^n$$

Dowód: Szukamy liczbę funkcji ze zbioru $\{1,\dots n\}$ w zbiór $\{1,\dots m\}$, które nie są surjekcjami. Oznaczmy przez $A_{i_1,\dots i_k}$ zbiór funkcji nie przyjmujących wartości $i_1,\dots,i_k \in \{1,\dots m\}$. Moc zbioru $A_{i_1,\dots i_k}$ jest równa $(m-k)^n$, natomiast dla ustalonego k zbiorów tych jest $\binom{m}{k}$. Ilość funkcji nie będących surjekcjami obliczamy z zasady włączeń/wyłączeń:

Liczba surjekcji

$$\#(A_1 \cup \cdots \cup A_n) =$$
$$\sum_{i_1} \#A_{i_1} - \sum_{i_1,i_2} \#A_{i_1,i_2} + \sum_{i_1,i_2,i_3} \#A_{i_1,i_2,i_3} \cdots - (-1)^n \#A_{1,\ldots,n}$$
$$= \binom{m}{1}(m-1)^n - \cdots - (-1)^{m-1}\binom{m}{m-1}1^n$$
$$= \sum_{k=1}^{m-1} -(-1)^k \binom{m}{k}(m-k)^n$$

Żeby dostać liczbę surjekcji, od liczby wszystkich funkcji m^n trzeba odjąć powyższy wynik. Liczba surjekcji jest równa:

$$\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{m}{k}(m-k)^n = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}(m-k)^n \qquad \square$$

Rozbicia na podzbiory

Definicja:

Liczbę rozbić zbioru n-elementowego na sumę k rozłącznych niepustych podzbiorów oznaczamy symbolem:

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$$

Problem: Na ile sposobów można rozbić zbiór n-elementowy na sumę k rozłącznych niepustych podzbiorów?

Jeżeli zbiór $n-1$ elementowy można rozbić na $\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$ niepustych podzbiorów, a $n-2$ elementowy na $\left\{ \begin{matrix} n-2 \\ k \end{matrix} \right\}$, to

Rozbicia na podzbiory

$$\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} = k \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right\}$$

(Jeżeli w $n-1$ pierwszych elementów było podzielonych na $k-1$ podzbiorów, to z n-tego elementu robimy brakujący podzbiór. Natomiast jeżeli już $n-1$ pierwszych elementów było podzielonych na k podzbiorów, to dokładamy następny element do jednego z k podzbiorów)

Liczby zdefiniowane taką zależnością rekurencyjną nazywają się liczbami Stirlinga II rodzaju. Tworzą one trójkąt podobny do trójkąta Pascala.

Rozbicia na podzbiory

$n \setminus k$	1	2	3	4	5	6	...
1	1	0...					
2	1	1	0...				
3	1	3	1	0...			
4	1	7	6	1	0...		
5	1	15	25	10	1	0...	
6	1	31	90	65	15	1	0...
⋮	⋮						⋱

Suma liczb w wierszu odpowiada liczbie wszystkich rozbić na niepuste podzbiory zbioru n-elementowego. Liczba ta nazywa się n-tą liczbą Bella:

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}$$

Rozbicia na podzbiory

Liczby Bella spełniają zależność rekurencyjną:

$$B_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B_k$$