Matematyka dyskretna

Wykład 13: Teoria Grafów

Gniewomir Sarbicki

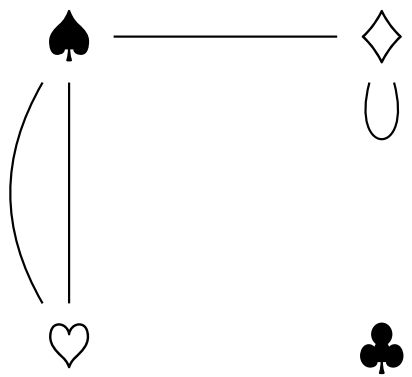
Literatura

- R.J. Wilson *Wprowadzenie do teorii grafów*

Definicja:

Grafem (skończonym, nieskierowanym) G nazywamy parę zbiorów $(V(G), E(G))$, gdzie

- $V(G)$ (zbiór wierzchołków grafu) - skończony, niepusty
- $E(G)$ (zbiór krawędzi grafu) - skończona rodzina (niekoniecznie różnych) nieuporządkowanych par elementów z G



Przykład:
$G = (\{\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit\}, \{(\spadesuit, \heartsuit), (\spadesuit, \heartsuit), (\spadesuit, \diamondsuit), (\diamondsuit, \diamondsuit)\})$

Definicja: Graf, w którym dwa wierzchołki łączy co najwyżej jedna krawędź i nie ma pętli, nazywamy **grafem prostym**.

Definicja: Rozważamy również grafy, w których elementy $E(G)$ są parami uporządkowanymi, nazywamy je **grafami skierowanymi (digrafami)**.

Definicja: Graf $G_1 \cup G_2 \stackrel{df}{=} (V(G_1) \cup V(G_2), E(G_1) \cup E(G_2))$ nazywamy **sumą grafów** G_1 i G_2.

Definicja: Graf, którego nie można przedstawić jako sumy dwóch niepustych grafów nazywamy **grafem spójnym**. Każdy graf można rozłożyć na sumę grafów spójnych nazywaną **składowymi grafu**.

Definicja: Minimalną liczbę krawędzi które należy usunąć, by graf G przestał być spójny nazywamy **spójnością krawędziową grafu** G. Oznaczamy ją jako $\lambda(G)$.

Definicja: W grafie o $\lambda(G) = 1$ krawędź której usunięcie niszczy spójność grafu, nazywamy **mostem**.

Definicja Jeżeli graf G_1 powstaje z G_2 przez usunięcie pewnej liczby wierzchołków i krawędzi, to mówimy że G_1 jest **podgrafem** G_2.

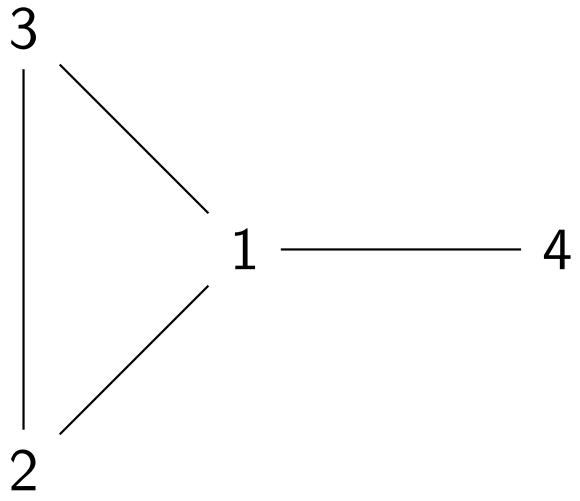
Definicja Ilość krawędzi połączonych z wierzchołkiem nazywamy **stopniem** tego wierzchołka: $\deg(v) = \#\{e \in E(G) : v \in e\}$. Wierzchołek stopnia 0 nazywamy **izolowanym**, a wierzchołek stopnia 1 nazywamy **końcowym**.

Definicja: Funkcja $\phi : V(G_1) \to V(G_2)$ jest izomorfizmem grafów prostych G_1 i G_2, jeżeli zachowuje liczbę krawędzi łączących dowolne dwa wierzchołki.

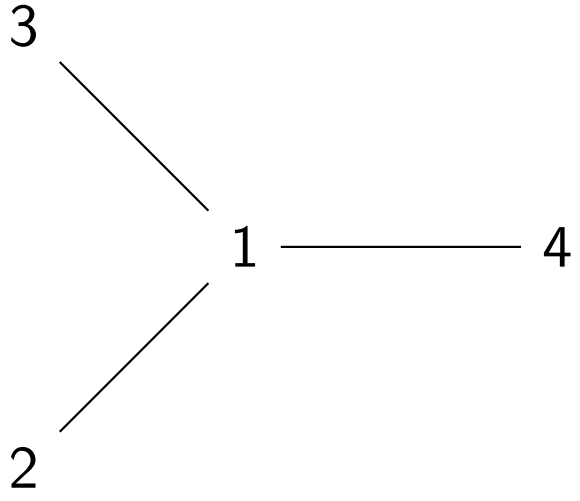
Definicja: Funkcja $\phi : V(G) \to V(G)$ jest automorfizmem grafu prostego, jeżeli zachowuje liczbę krawędzi łączących dowolne dwa wierzchołki. Grupę automorfizmów grafu G oznaczamy jako $\Gamma(G)$.

Sprawdzanie, czy dwa grafy są izomorficzne jest problemem NP.

Sprawdzanie, czy graf ma nietrywialy automorfizm jest problemem NP.



Przykład: Wyznacz grupę automorfizmów grafu

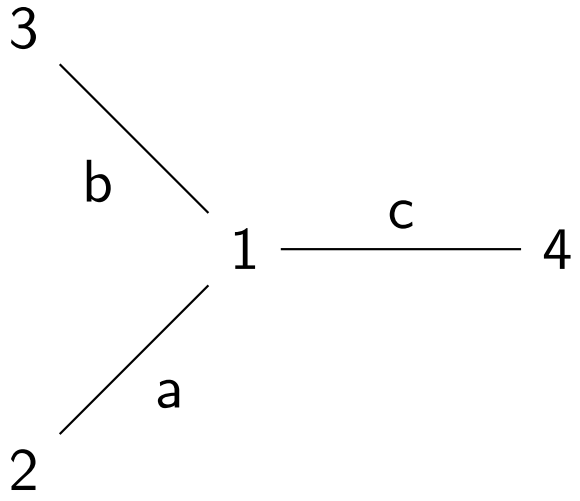


Przykład: Wyznacz grupę automorfizmów grafu

Definicja: Wierzchołki nazywamy **sąsiednimi**, jeżeli istnieje krawędź je łącząca.
Krawędzie nazywamy **sąsiednimi**, jeżeli mają dokładnie jeden wspólny wierzchołek.

Definicja: Macierzą sąsiedztwa grafu G nazywamy macierz w której wyraz ij-ty jest równy ilości krawędzi łączących wierzchołki i oraz j. Jest to macierz symetryczna.

Definicja: Macierzą incydencji grafu jest macierz, które ij-ty wyraz jest równy 1 wtw gdy i-ty wierzchołek jest końcem j-tej krawędzi.



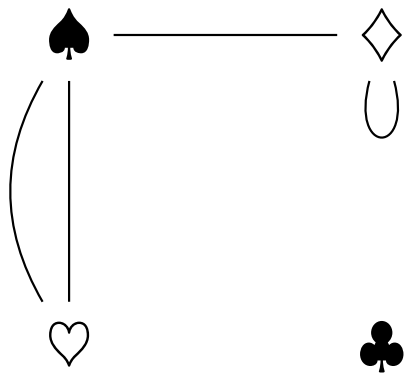
Ćwiczenie: Wyznacz macierz sąsiedztwa i incydencji grafu.

Definicja: Ścieżką nazywamy skończony, różnowartościowy ciąg krawędzi taki, że kolejne krawędzie są sąsiednie.

Definicja: Cyklem nazywamy niepustą ścieżkę zamkniętą

Definicja: Drogą nazywamy ścieżkę nie zawierającą dwóch tych samych wierzchołków.

Definicja: Długością (drogi, ścieżki, cyklu) nazywamy liczbę krawędzi składowych.



Ćwiczenie: Wyznacz ścieżkę i drogę maksymalnej długości. Wyznacz wszystkie cykle.

Definicja: Graf spójny, który nie zawiera cykli nazywamy **drzewem**

Twierdzenie (własności drzew)

Dla grafu spójnego G o n wierzchołkach NWSR:

1. G jest drzewem ($\iff$ nie zawiera cykli)
2. $\#E(G) = n - 1$
3. każda krawędź jest mostem
4. każde dwa wierzchołki połączone są dokładnie jedną drogą
5. po dodaniu do grafu jednej krawędzi uzyskamy dokładnie jeden cykl

Dowód: (3) $\iff$ (4) $\iff$ (5) $\implies$ (1) ćwiczenie

(1) $\implies$ (4) mając dane dwie różne drogi łączące wierzchołki, jesteśmy w stanie skonstruować cykle usuwając z sumy dróg ich wspólne krawędzie.

(3) $\implies$ (2) indukcyjnie

(2) $\implies$ (3) wystarczy udowodnić, że dla grafu spójnego G: $\#E(G) \geqslant n - 1$ (indukcyjnie).

Wniosek: Z każdego cyklu w grafie możemy usunąć krawędź nie niszcząc spójności grafu. Postępując w ten sposób tak długo, aż nie zostanie żaden cykl uzyskujemy **drzewo rozpinające graf**.

O liczbie możliwych drzew o n-wierzchołkach mówi:

Twierdzenie (Cayleya o drzewach)

Istnieje n^{n-2} różnych drzew o n wierzchołkach.

Ćwiczenie: Narysuj wszystkie drzewa dla $n = 3$. Podziel je na klasy drzew ze sobą izomorficznych.

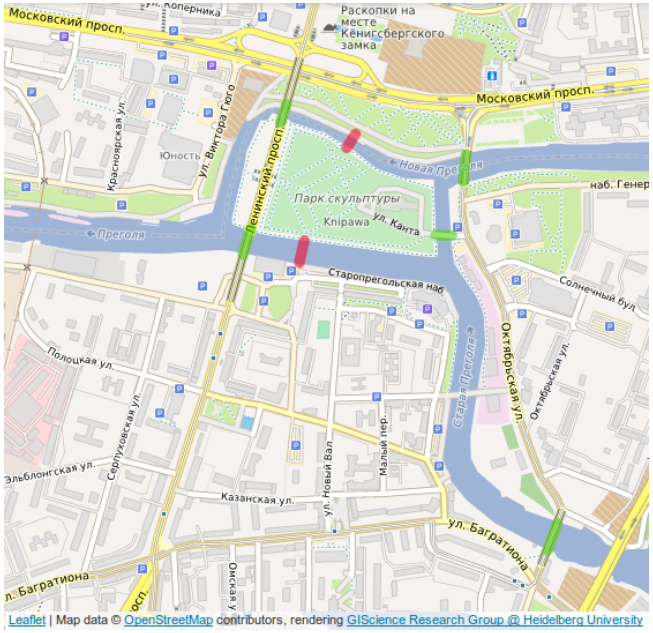
Ćwiczenie: Narysuj wszystkie drzewa dla $n = 4$. Podziel je na klasy drzew ze sobą izomorficznych.

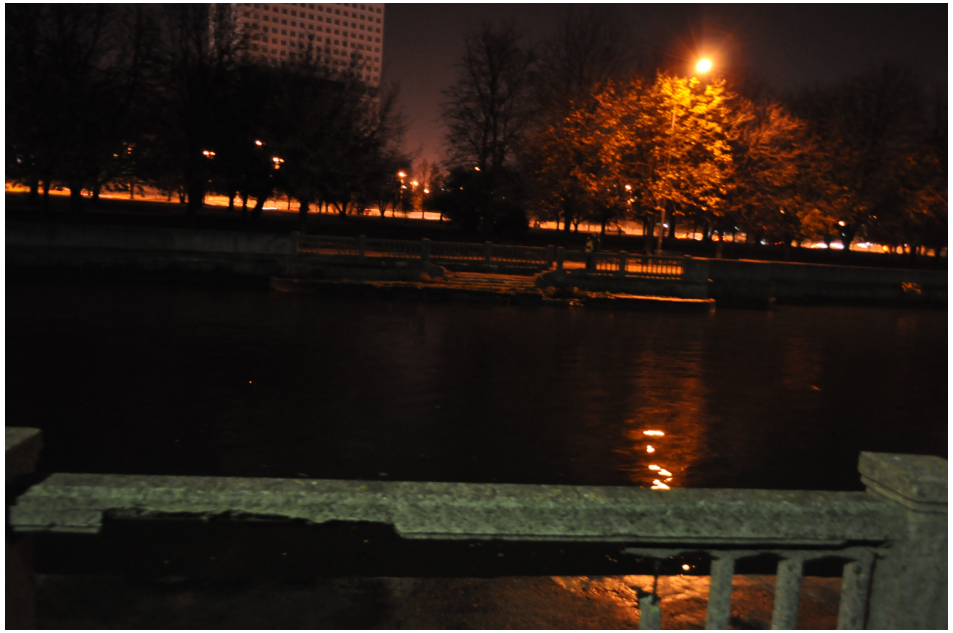
Ćwiczenie: Narysuj wszystkie drzewa dla $n = 5$. Podziel je na klasy drzew ze sobą izomorficznych.

Jeżeli w drzewie wyróżnimy jeden z wierzchołków (nazywać go będziemy korzeniem), otrzymamy **drzewo ukorzenione**.

- W drzewie ukorzenionym *rodzicem* wierzchołka A jest pierwszy wierzchołek na drodze łączącej go z korzeniem. Tylko korzeń nie ma rodzica.
- Zbiór wierzchołków, których rodzicem jest wierzchołek A, nazywamy *dziećmi* wierzchołka A.
- Wierzchołki nie posiadające dzieci (stopnia 1) nazywamy *wierzchołkami końcowymi (liśćmi)*. Pozostałe wierzchołki nazywamy *pośrednimi*.
- Długość drogi łączącej wierzchołek z korzeniem nazywamy *rzędem wierzchołka*.

W 1736 roku Euler rozwiązał problem *siedmiu mostów królewieckich* - czy można tak zalanować spacer w centrum Królewca, by powrócić do tego samego punktu przechodząc każdy z mostów na Pregole (Prēigara) dokładnie jeden raz?





Definicja

Graf spójny G nazywamy **grafem eulerowskim**, jeżeli istnieje cykl zawierający każdą krawędź G. Cykl ten nazywamy **cyklem Eulera**.

Twierdzenie (Eulera o grafach)

Graf spójny jest Eulerowski wtedy i tylko wtedy gdy $\forall v \in V(G)\ 2|\deg v$.

Dowód: $\Rightarrow$ Jeżeli cykl raz przechodzi przez wierzchołek, to dwie spośród krawędzi wychodzących z wierzchołka stają się elementami cyklu, przy każdym kolejnym przejściu dochodzą kolejne dwie (dlaczego?). Jeżeli każda krawędź wychodząca z wierzchołka jest elementem cyklu (dlaczego?), to ich liczba musi być parzysta.

$\Leftarrow$ Dla grafu o $n = 2$ i parzystych indeksach wierzchołków twierdzenie jest prawdziwe.

Załóżmy, że dla dowolnego grafu o liczbie wierzchołków $< n$ twierdzenie jest prawdziwe. Rozważamy graf G o n wierzchołkach i parzystym stopniu każdego wierzchołka.

Ponieważ graf jest spójny $\implies \forall w \in V(G) \deg(w) \geqslant 2 \overset{\text{ćw!}}{\implies}$ istnieje cykl $C \subset E(G)$. Usuńmy z grafu G krawędzie tworzące C.

Otrzymamy w wyniku graf $\widetilde{G}$, być może niespójny, ale o parzystym stopniu każdego wierzchołka (ćwiczenie!). i-ta składowa spójności $\widetilde{G}$ ma na mocy założenia indukcyjnego cykl Eulera C_i i punkt wspólny z cyklem C (dlaczego - ćwiczenie!).

W grafie G konstruujemy cykl Eulera idąc wzdłuż C, gdy natrafimy na wierzchołek w którym możemy skręcić, skręcamy i obchodzimy cykl C_i, następnie kontynuujemy wędrówkę wzdłuż G. (ćwiczenie - zilustruj zrozumienie konstrukcji rysunkiem!) $\square$

Dowód indukcyjny twierdzenia Eulera jest niekonstruktywny - pojawia się pytanie, jak konstruować dla danego grafu cykl Eulera.

Twierdzenie (Fleury'ego)

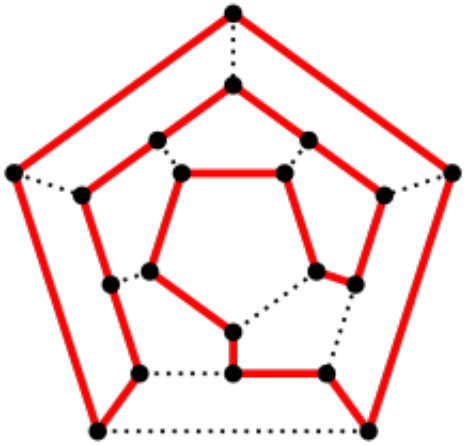
Następujący ciąg kroków prowadzi do cyklu w grafie Eulerowskim:
Zacznij z dowolnego wierzchołka i przechodź krawędzie w dowolnej kolejności, przestrzegając warunków:

- usuwaj z grafu przebyte krawędzie i wierzchołki izolowane powstałe w tym procesie
- przekraczaj most tylko gdy nie masz innej możliwości ruchu

Bez dowodu

Definicja

Graf prosty G nazywamy grafem Hamiltonowskim, jeżeli istnieje cykl przechodzący przez każdy wierzchołek dokładnie raz.



Przykład: Cykl Hamiltona w grafie dwunastościanu - problem istnienia cyklu Hamiltona pojawił się przy badaniu tego problemu.

Problem znalezienia cyklu Hamiltona należy do klasy problemów NP-zupełnych.

Oczywiście, graf pełny jest Hamiltonowski, więcej:

Twierdzenie (Ore)

Jeżeli dla grafu prostego G o n wierzchołkach ($n \geqslant 3$) dla każdej pary niesąsiednich wierzchołków $\deg(v) + \deg(w) \geqslant n$, to G jest grafem Hamiltona.

Dowód: Załóżmy że G spełnia warunek, ale nie jest Hamiltonowski. Uzupełnijmy go do grafu $\tilde{G}$ dodając tyle krawędzi, by dodanie dowolnej prowadziło już do grafu Hamiltonowskiego. $\tilde{G}$ dalej spełnia warunek.

W takiej sytuacji, dla dowolnych niesąsiadujących v_1 i v_n możemy skonstruować drogę długości n: $v_1 - \cdots - v_n$, ale nie możemy jej zamknąć do cyklu.

Dla każdego $i \in \{2, \ldots, n\}$ rozważamy możliwe połączenia: $v_1 - v_i$ i $v_{i-1} - v_n$.

Tylko jedno z nich może wystąpić, w przeciwnym wypadku ścieżka $v_1 - \cdots - v_{i-1} - v_n - \cdots - v_i - v_1$ byłaby cyklem hamiltonowskim.

Oznacza to, że $\deg v_1 + \deg v_n$ wynosi najwyżej $n - 1$, co daje sprzeczość z założeniem $\square$