Matematyka dyskretna

wykład 1: Indukcja i zależności rekurencyjne

Gniewomir Sarbicki

Literatura

- Kenneth A. Ross, Charles R. B. Wright *Matematyka Dyskretna* PWN 2005
- J. Jaworski, Z. Palka, J. Szymański *Matematyka Dyskretna dla Informatyków*
- A. Szepietowski *Matematyka Dyskretna*
- S. G. Krantz *Discrete Mathematics Demystified*
- Kenneth A. Rosen *Handbook of discrete and combinatorial mathematics*

Słaba zasada indukcji

Twierdzenie:

Niech $f(n)$ będzie funkcją logiczną. Jeżeli spełnione są dwa warunki:

(P) $f(1)$ jest prawdą,

(I) $f(n) \implies f(n+1)$,

to $\forall n\ f(n)$ jest prawdą.

Słaba zasada indukcji

Przykład: Pokazać, że $\forall n$ liczba $L_n = \frac{n(n^2+5)}{2}$ jest podzielna przez 3.

(P) $n = 0 : L_0 = 0$ jest podzielne przez 3.

(I) Trzeba pokazać, że $3|L_n \implies 3|L_{n+1}$. Rozważmy liczbę $L_{n+1} = \frac{(n+1)((n+1)^2+5)}{2} = \frac{(n+1)((n^2+2n+6)}{2} = \frac{n^3+3n^2+8n+6}{2} = \frac{n^3+5n}{2} + \frac{3n^2+3n}{2} + 3$.

Pierwszy składnik jest wielokrotnością 3 na podstawie założenia indukcyjnego $(3|L_n)$, a drugi ponieważ $n^2 + n = n(n+1)$ jest zawsze liczbą parzystą, zatem liczba L_{n+1} jest podzielna przez 3, czego należało dowieść w kroku indukcyjnym.

Silna zasada indukcji

Twierdzenie:

Niech $f(n)$ będzie funkcją logiczną. Jeżeli spełnione są dwa warunki:

(P) $f(1)$ jest prawdą,

(I) $(\forall k \leqslant n\ f(k)) \implies f(n+1)$,

to $\forall n\ f(n)$ jest prawdą.

Przykład: Każdą liczbę $n \geqslant 2$ można przedstawić jako iloczyn liczb pierwszych.

(P) Dwójka jest liczbą pierwszą

(I) Jeżeli liczba $n+1$ jest liczbą pierwszą, to teza jest prawdziwa. Jeżeli jest liczbą złożoną, to jest iloczynem dwóch mniejszych liczb, ale na mocy założenia indukcyjnego wszystkie mniejsze liczby są iloczynami liczb pierwszych. $\square$

Zależności rekurencyjne

Definicja:

Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest określony rekurencyjnie, jeżeli wyraz a_n jest pewną funkcją wyrazów poprzednich (i w ogólności również indeksu n):

$$a_n = f(n, a_{n-1}, \ldots, a_0)$$

Przykład 1: Ciąg Fibbonaciego: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, gdzie $a_0 = a_1 = 1$.

Przykład 2: $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$

Przykład 3: Silnia: $n! = n \cdot (n-1)!$

Przykład 4: Potęga naturalna: $a^n = a \cdot a^{n-1}$

Liniowe jednorodne zależności rekurencyjne

Definicja:

Ciąg jest okreslony poprzez liniową, jednorodną zależność rekurencyjną, jeżeli:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \cdots + c_r a_{n-r}$$

liczba r nazywana jest *głębokością* rekurencji.

Żeby jednoznacznie określić ciąg potrzeba znać wartości dla r wyrazów początkowych.

Analogia do teorii liniowych r.różniczkowych o stałych wsp.

- Zależność rekurencyjna (ZR)
- liniowa/jednorodna ZR
- przesunięcie w indeksie o 1
- głębokość rekurencji
- rozwiązanie przy pomocy transformaty $\mathcal{Z}$

- Równanie różniczkowe (RR)
- liniowe/jednorodne RR
- pochodna
- stopień równania
- rozwiązanie przy pomocy transformaty Laplace'a

Wyznaczanie rozwiązań bazowych

Zauważmy, że jeżeli ciągi x_n i y_n spełniają liniową zależność rekurencyjną, to pełnia ją również dowolna ich kombinacja liniowa. Każde rozwiązanie będzie kombinacją liniową pewnej liczby rozwiązań bazowych.

Rozwiązanie bazowe jest postaci $a_n = x^n$. Szukamy tych rozwiązań wstawiając je do zależności rekurencyjnej:

$$x^r = c_1 x^{r-1} + \cdots + +c_{r-1} x^1 + c_r$$

x jest pierwiastkiem powyższego wielomianu, zwanego wielomianem charakterystycznym.

Rozwiązanie zależności jest kombinacją liniową rozwiązań bazowych: $\alpha_1 x_1^n + \cdots + \alpha_r x_r^n$. Wyznaczamy je z warunków początkowych.

Liniowe jednorodne zależności rekurencyjne

Przykład: *Na ile różnych sposobów można wejść na schody zbudowane z n stopni, jeżeli w każdym kroku można pokonać 1 lub 2 stopnie?*

Po dołożeniu do schodów n-tego stopnia, liczba dróg jest równa sumie a_{n-1} (ostatni krok krótki) i a_{n-2} (ostatni krok długi): $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

$$x^2 = x + 1 \quad \Longrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Rozwiązanie ogólne dane jest wzorem $a_n = \alpha_1 x_1^n + \alpha_2 x_2^n$.

Liniowe jednorodne zależności rekurencyjne

Współczynniki kombinacji wyznaczamy z warunków początkowych. Schody długości 1 można pokonać tylko w jeden sposób $(a_1 = 1)$, schody długości 2 na dwa sposoby (jednym długim lub dwoma krótkimi krokami $a_2 = 2$):

$$\begin{aligned} 1 = a_1 = & \quad \alpha_1 x_1^1 + \alpha_2 x_2^1 \\ 2 = a_2 = & \quad \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 x_1 &= \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\ \alpha_2 x_2 &= -\frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Ostatecznie schody długości $n+1$ można pokonać na : $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$ sposobów.

Otrzymany ciąg jest ciągiem Fibbonaciego

Wielokrotne pierwiastki

Fakt:

Jeżeli w rozwiązaniu występują pierwiastki wielokrotne, wtedy rozwiązanie ogólne zapisuje się w ogólniejszej postaci:

$$a_n = W_1(n)x_1^n + W_2(n)x_2^n + \cdots + W_{r'}(n)x_{r'}^n \qquad r' \leqslant r,$$

gdzie r' oznacza liczbę różnych pierwiastków, a stopień wielomianu jest o 1 mniejszy od krotności pierwiastka.

Przykład: Znajdź ogólny wyraz ciągu, w którym wyraz $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$. Warunki początkowe: $a_0 = 1, a_1 = 4$.

Wielokrotne pierwiastki

Wstawiamy do zależności rekurencyjnej rozwiązanie próbne $a_n = x^n$ i rozwiązujemy równanie charakterystyczne $x^2 = 4x - 4$. Otrzymujemy jeden pierwiastek $x_0 = 2$. Rozwiązaniem ogólnym równania jest $(a + bn) \cdot 2^n$.

Liczby a i b wyznaczamy z warunków początkowych:

$$\begin{cases} a_0 = 1 = a \\ a_1 = 4 = 2(a+b) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Rozwiązaniem zależności rekurencyjnej jest ciąg $a_n = (1 + n) \cdot 2^n$

Pierwiastki zespolone

Przykład: Znajdź ogólny wyraz ciągu, w którym wyraz a_n jest równy różnicy dwóch wyrazów poprzednich. Warunki początkowe: $a_0 = \sqrt{3}, a_1 = 0$.

Równanie charakterystyczne ma postać: $x^2 = x - 1$. Jego pierwiastkami są $x_{1,2} = (1 \pm \sqrt{3})/2 = \exp(\pm i\pi/3)$.

Rozwiązaniem ogólnym jest: $a_n = z \exp(in\pi/3) + z^* \exp(-in\pi/3)$ (współczynniki przy obu rozwiązaniach bazowych muszą być wzajemnie sprzężone, by ciąg przyjmował wartości rzeczywiste.)

Liczbę z zapiszemy dla wygody w postaci wykładniczej: $z = r \exp(i\alpha)$. Wzór na n-ty wyraz ciągu przyjmie teraz postać: $a_n = 2r \cos(\alpha + n\phi)$

Pierwiastki zespolone

Z warunków początkowych mamy układ równań:

$$\begin{cases} 2r \ \cos\alpha = \sqrt{3} \\ 2r \ \cos(\alpha + \pi/3) = 0 \end{cases}$$

Z drugiego równania mamy $\alpha = -5/6\pi$ lub $\alpha = \pi/6$. Po wstawieniu do pierwszego równania widzimy, że tylko drugie z rozwiązań jest poprawne i otrzymujemy $r = 1$.

Rozwiązaniem równania jest ciąg $\sqrt{3}, 0, -\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}, \ldots$. Dla najogólniejszych warunków początkowych będzie to sześć zmieniających się cyklicznie wartości.

Niejednorodne liniowe zależności rekurencyjne

Definicja:

Liniowa zależność rekurencyjna jest niejednorodna, jeżeli sumą zależności rekurencyjnej i pewnej funkcji $f(n)$:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \cdots + c_r a_{n-r} + f(n),$$

f_n nazywa się wyrazem wolnym.

Twierdzenie:

Ogólne rozwiązanie niejednorodnej liniowej zależości rekurencyjnej jest suma ogólnego rozwiązania zależności jednorodnej i pewnego szczególnego rozwiązania zależności niejednorodnej.

Dowód: Różnica dowolnych dwóch rozwiązań jest rozwiązaniem zależności jednorodnej.

Nie ma ogólnego sposobu znajdowania rozwiązania szczególnego.

Niejednorodne liniowe zależności rekurencyjne

1. Jeżeli rozwiązanie części jednorodnej nie jest wielomianem, a funkcja $f(n)$ jest wielomianem stopnia d, to istnieje rozwiązanie szczególne będące wielomianem stopnia d.
2. Jeżeli rozwiązanie części jednorodnej jest wielomianem stopnia k, a funkcja $f(n)$ jest wielomianem stopnia d, to istnieje rozwiązanie szczególne postaci: $a_{sn} = n^{k+1}(c_d n^d + \cdots + c_0)$.
3. Jeżeli $f(n)$ jest funkcją wykładniczą β^n, gdzie β nie jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego, to istnieje rozwiązanie szczególne postaci $a_{sn} = A\beta^n$
4. Jeżeli $f(n)$ jest funkcją wykładniczą β^n, gdzie β jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego o krotności k, to istnieje rozwiązanie szczególne postaci $a_{sn} = An^k\beta^n$
5. Jeżeli wyraz wolny jest sumą pewnej ilości funkcji, to rozwiązanie szczególne jest sumą rozwiązań szczególnych odpowiadających tym funkcjom.

Niejednorodne liniowe zależności rekurencyjne

Przykład: Rozwiązać zależność rekurencyjną $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2} + 3^n$.

Rozwiązujemy część jednorodną. Równaniem charakterystycznym jest $x^2 - 7x + 10 = 0$. Jego pierwiastkami są liczby 2 i 5, więc rozwiązaniem ogólnym zależności jednorodnej jest:

$$a_n = c_1 2^n + c_2 5^n$$

Szukamy szczególnego rozwiązania zależności niejednorodnej. Ponieważ $f(n) = 3^n$, a 3 nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, więc postulowanym rozwiązaniem będzie $a_{sn} = A \cdot 3^n$. Po wstawienia tego rozwiązania do niejdnorodnej zależności rekurencyjnej, otrzymujemy $A = -9/2$.

Ostatecznie: $a_n = c_1 2^n + c_2 5^n - 9/2 \cdot 3^n$

Nie o stałych współczynnikach oraz nieliniowe zależności rekurencyjne

Liniowe zależności rekurencyjne nie o stałych współczynnikach rozwiązuje się za pomocą *funkcji tworzących*

Przykład: Ilość permutacji bez punktów stałych zbioru n-elementowego: $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$

W ogólności nie ma metody rozwiązywania nieliniowych zależności rekurencyjnych nieliniowych. Można to zrobić w szczególnych przypadkach.

Przykład: Niech ciąg będzie dany zależnością rekurencyjną: $a_n^2 = 2a_{n-1}\sqrt{a_{n-2}}$. Logarytmując obie strony otrzymamy: $2\log a_n = \log 2 + \log a_{n-1} + \frac{1}{2}\log a_{n-2}$.