Matematyka dyskretna

Wykład 5: Funkcje multiplikatywne

Gniewomir Sarbicki

Definicja:

Funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ nazywamy:

- **multiplikatywną**, jeżeli
  $\forall n, m \; NWD(n,m) = 1 \implies f(nm) = f(n)f(m)$
- **całkowicie multiplikatywną**, jeżeli
  $\forall n, m \; f(nm) = f(n)f(m)$

Ćwiczenie: Dla funkcji multiplikatywnej $f(1) = 1$.

Własności funkcji multiplikatywnych:

1. f - multiplikatywna i $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ - rozkład na czynniki pierwsze, to $f(n) = f(p_i^{\alpha_i})$.
2. f - multiplikatywna, to $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$ - multiplikatywna
3. f, g - multiplikatywne, to $F(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$ - multiplikatywna

Dowód (1): Dla $k = 1$ mamy równość. Załóżmy, że twierdzenie zachodzi dla wszystkich liczb mających r różnych czynników pierwszych i weźmy liczbę n mającą $r+1$ różnych czynników pierwszych. $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha^i} \cdot p_{r+1}^{\alpha_r}$. Obie liczby w iloczynie są względnie pierwsze, stąd własność zachodzi dla liczby n $\square$

Jeżeli $NWD(m, n) = 1$ to $d|mn \iff d = d_1 d_2 \wedge d_1|m \wedge d_2|n$. Wtedy $NWD(d_1, d_2) = 1$ i $NWD(m/d_1, n/d_2) = 1$.

Dowód (2): Niech m, n-wzgl. pierwsze. $g(mn) = \sum_{d|mn} f(d) = \sum_{d_1|m} \sum_{d_2|n} f(d_1 d_2) = \sum_{d_1|m} f(d_1) \sum_{d_2|n} f(d_2) = g(m)g(n)$ $\square$

Dowód (3):
$F(mn) = \sum_{d|mn} f(d) g(\frac{mn}{d}) = \sum_{d_1|m} \sum_{d_2|n} f(d_1 d_2) g(\frac{mn}{d_1 d_2}) = \sum_{d_1|m} \sum_{d_2|n} f(d_1) f(d_2) g(\frac{m}{d_1}) g(\frac{n}{d_2}) = F(n)F(m)$ $\square$

Przykłady funkcji multiplikatywnych

1. $\tau(n) = \sum_{d|n}$ - ilość dzielników liczby n
2. $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ - suma dzielników liczby n

Fakt: $\tau(n) = \prod_k (\alpha_k + 1)$, gdzie α_k - krotności dzielników pierwszych.

Twierdzenie: $\prod_{d|n} d = n^{\tau(n)/2}$

Dowód: $n = dd'$. Mamy $\tau(n)$ takich rozkładów. Mnożąc je stronami, dostaniemy:

$$n^{\tau(n)} = \prod_{d|n} d \prod_{d'|n} d',$$

Ponieważ oba czynniki są równe, dostajemy tezę $\square$

Funkcja Eulera

Definicja:

Funkcją Eulera nazywamy funkcję: $\phi(n) = \sum_{k \in [1,n], NWD(k,n)=1} 1$ (ilość liczb mniejszych od n i względnie pierwszych z n).

Własności funkcji Eulera

1. $\sum_{d|n} \phi(d) = n$.
2. ϕ jest funkcją multiplikatywną
3. $\phi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^\alpha \left(1 - \frac{1}{p}\right)$, dla $p \in \mathcal{P}$
4. $\phi(n) = n \prod_{p|n, p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$

Funkcja Eulera

Dowód (1): Niech $n_d = \#\{k \in [1,n] : NWD(k,n) = d\}$.

$$n = \sum_{d \in [1,n]} n_d = \sum_{d|n} n_d = \sum_{d|n} \phi\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \phi(d) \qquad \Box$$

Dowód (3): - policzyć ile jest liczb podzielnych przez p w przedziale $1, p^\alpha$.
Dowód (4): - z punktu (3) i z multiplikatywności
Dowód (2): - ułóżmy liczby $[0, \ldots, mn-1]$ w macierz:

$$\begin{bmatrix} 0 & & & n \\ n+1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & m-1 \\ m & & & \\ & \ddots & & \\ & & n-1 & \end{bmatrix}$$

Funkcja Eulera

Pozycja liczby N w tablicy to $[N \mod m, N \mod n]$. Zauważmy, że jeżeli $NWD(n, m) = 1$ to $n|N \wedge m|N \Rightarrow mn|N$.
Przy wypełnianiu tabliczy wrócimy do 0 dopiero dla wielokrotności $nm \Rightarrow$ cała tablica będzie wypełniona.

$NWD(d, mn) = 1 \iff NWD(d, n) = NWD(d, m) = 1$,
chcemy wiedzieć, ile liczb w macierzy jest względnie pierwszych jednocześnie z n i z m.

Ponieważ $NWD(km + r, m) = NWD(r, m)$, całe kolumny są względnie pierwsze z m albo nie. Podobnie, całe wierszami są względnie pierwsze z n albo nie.

Ilość liczb względnie pierwszych z nm jest równa iloczynowi ilości liczb względnie pierwszych z n i z m $\square$

Funkcja Möbiusa

Definicja:

Funkcję Möbiusa μ definujemy następująco:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{gdy} n = 1 \\ (-1)^k & \text{gdy } n \text{ jest iloczynem } k \text{ różnych liczb pierwszych} \\ & \text{(liczba bezkwadratowa)} \\ 0 & \text{w przeciwym wypadku} \end{cases}$$

Własności

1. μ jest multiplikatywna
2. $\nu(n) = \sum_{d|n} \mu(n) = \delta_{1n}$

Dowód (1): Jeżeli jedna z liczb jest podzielna przez kwadrat liczby pierwszej, to $0 = 0$
Jeżeli obie są bezkwadratowe, wzgl. pierwsze, i mają odpowiednio k i l czynników pierwszych, to ich iloczyn ma $k + l$ czynników pierwszych i $(-1)^k(-1)^l = (-1)^{k+l}$ $\square$

Dowód (2): Dla potęgi liczby pierwszej: $\nu(p^\alpha) = \sum_{d|p^\alpha} \mu(d) = \mu(1) + \mu(p) + \cdots + \mu(p^\alpha) = 1 + (-1) + 0 + \cdots + 0 = 0$. Dla pozostałych liczb z mutliplikatywności $\square$

Twierdzenie Möbiusa o odwracaniu

Twierdzenie:

$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \iff f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d)$

Dowód: $\sum_{ab=n} \mu(a)g(b) = \sum_{ab=n} \mu(a) \sum_{cd=b} f(c) = \sum_{acd} \mu(a) f(c) = \sum_{cb=n} f(c) \sum_{ad=b} \mu(a) = \sum_{cb=n} f(c)\delta_{1b} = f(n)$
$\square$

Zastosowania:

1. $1 = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \tau(d)$
2. $n = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \sigma(d)$
3. $\phi(n) = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$

Dowód (3): Stosujemy twierdzenie do funkcji
$g(n) = n = \sum_{d|n} \phi(d)$ $\square$