

Matematyka dyskretna

Wykład 3: Aparat funkcji tworzących

Gniewomir Sarbicki

Funkcja tworząca

Definicja

Funkcją tworzącą ciągu a_n nazywamy wyrażenie:

$$\mathcal{A} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \quad \mathcal{A}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Zmienną $x \in \mathbb{C}$ nazywamy zmienną formalną.

Przykład: Wyrażenie $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ jest funkcją tworzącą, ale dla żadnego $x \neq 0$ suma ta nie jest zbieżna.

Przykład: Wyrażenie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$ jest funkcją tworzącą, ale suma ta jest zbieżna tylko dla $|x| < 1/2$.

Przykład: $\mathcal{A}(\frac{1}{z})$ jest transformatą $\mathcal{Z}$ ciągu.

Działania na funkcjach tworzących

- Suma i różnica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$$

- Iloczyn:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a \star b)_n x^n$$

(splot obu ciągów)

- Mnożenie przez stałą:

$$c \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c a_n x^n$$

Działania na funkcjach tworzących

- Pochodna:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

- Całka:

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$

Działania na funkcjach tworzących

- Przesunięcie w prawo:

$$x^n \mathcal{A}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+n}$$

- Przesunięcie w lewo:

$$\frac{\mathcal{A}(x) - (a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1})}{x^n} = a_n + a_{n+1}x^1 + \dots$$

- Ciąg sum częściowych ciągu a_n :

$$\frac{\mathcal{A}(x)}{1-x} \sim (a_0, \quad a_0 + a_1, \quad a_0 + a_1 + a_2, \quad \dots)$$

- Ciąg rozrzedzony:

$$f(x^n) \sim (a_0, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, a_1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, a_2, \dots)$$

Funkcje tworzące dla wybranych ciągów

- Funkcja tworząca dla ciągu stałego c :

$$\mathcal{A}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} cx^k = \frac{c}{1+x}$$

- Funkcja tworząca dla ciągu n^k (ilość k -elementowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru n -elementowego):

$$\mathcal{A}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} n^k x^k = \frac{1}{1+nx}$$

- Funkcja tworząca dla ciągu $a_n = \binom{n}{k}$ (ilości kombinacji k -elementowych ze zbioru n -elementowego):

$$\mathcal{A}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$$

Funkcje tworzące dla wybranych ciągów

Definicja:

Uogólniony współczynnik Newtona:

$$\binom{-n}{k} \stackrel{df}{=} (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$$

- Funkcja tworząca dla ciągu $(-1)^k \binom{-n}{k}$ (ilość k -elementowych kombinacji z powtórzeniami ze zbioru n -elementowego):

$$\mathcal{A}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-1)^k x^k = \frac{1}{(1-x)^n}$$

Zastosowanie do zagadnień kombinatorycznych

Fakt:

Założmy że ciąg a_n opisuje wartości możliwych wartości n dla pierwszego zbioru, natomiast ciąg b_n dla drugiego. Wtedy ilość możliwych sum jest równa $(a \star b)_n$

Przykład: Dwadzieścia komputerów ma być rozmieszczonych w 5 salach tak, by w każdej sali były przynajmniej dwa. Ile jest możliwych rozmieszczeń?

Rozwiązanie: W jednym pokoju są przynajmniej dwa komputery. Liczby rozmieszczeń n komputerów w pokoju tworzą ciąg $(0, 0, 1, 1, \dots)$, którego funkcją tworzącą jest $x^2 + x^3 + \dots$. Ilość rozmieszczeń n komputerów w 5 pokojach jest dana przez splot tych ciągów, zatem funkcja tworząca jest iloczynem funkcji tworzących: $(x^2 + x^3 + \dots)^5 = \frac{x^{10}}{(1-x)^5}$.

Zastosowanie do zagadnień kombinatorycznych

Interesuje nas ilość rozmieszczeń 20 komputerów, zatem współczynnik przy x^{20} w rozwinięciu tej funkcji, który jest równy współczynnikowi przy x^{10} funkcji $(1 - x)^{-5}$, który jest równy $\binom{-5}{10} = \binom{5+10-1}{10} = \binom{14}{10} = 1001$.

Ćwiczenie: Dojść do wyniku techniką rozmieszczania przedmiotów w przegródkach (należy rozważać kombinacje obiektów $\bullet$ i $\bullet\bullet$ |)

Zastosowanie do zagadnień kombinatorycznych

Przykład: Teraz w powyższym przykładzie dołożymy ograniczenie, że komputerów w sali nie może być więcej niż 7. W takim wypadku funkcją tworzącą jest

$$(x^2 + \dots + x^7)^5 = x^{10} \left(\frac{1 - x^6}{1 - x} \right)^5 = x^{10}.$$

$$\left[1 - \binom{5}{1} x^6 + \binom{5}{2} x^{12} + \dots - x^{30} \right] \cdot \left[1 + \binom{5}{1} x + \binom{6}{2} x^2 + \dots \right]$$

Znajdźmy współczynnik stojący przy x^{10} w dolnej linii. Potęgę tę można uzyskać jako $1 \cdot x^{10}$ lub $x^6 \cdot x^4$, zatem ilość możliwych ustawień jest równa:

$$\binom{14}{10} - \binom{5}{1} \cdot \binom{8}{4} = 651$$

Zastosowanie do zagadnień kombinatorycznych

Przykład: Ilość rozkładów liczby całkowitej dodatniej na sumę różnych liczb całkowitych dodatnich ma funkcję tworzącą:

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + x^k) = \frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x^4}{1-x^2} \cdots = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdots$$

Przykład: Działając operatorem $x \frac{d}{dx}$ na funkcję tworzącą ciągu a_n dostajemy ciąg na_n . Podziałajmy dwukrotnie tym operatorem na funkcję ciągu $(1, 1, \dots)$:

$$x \frac{d}{dx} \left[x \frac{d}{dx} (1-x)^{-1} \right] = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = 1^2x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + 4^2x^4 + \dots$$

Zastosowanie do zagadnień kombinatorycznych

Podzielenie funkcji tworzącej ciągu przez $(1 - x)$ daje funkcję tworzącą ciąg sum częściowych:

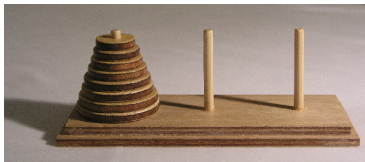
$$\begin{aligned}\frac{x(1+x)}{(1-x)^4} &= (x+x^2)(1-x)^{-4} = (x+x^2) \left[1 + \binom{4}{1}x + \binom{5}{2}x^2 + \dots \right] \\ &= 1^2x + (1^2+2^2)x^2 + (1^2+2^2+3^2)x^3 + \dots\end{aligned}$$

Współczynnik rozwinięcia tej funkcji przy n -tej potędze daje wzór na n -tą sumę częściową ciągu n^2 . Jest on równy

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \binom{2+n}{n-1} + \binom{1+n}{n-2} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Ćwiczenie: Znaleźć wzór na n -tą sumę częściową ciągu n^3 .

Rozwiązywanie równań rekurencyjnych - Wieże z Hanoi



Mamy do dyspozycji n krążków o malejących średnicach i trzy paliki. Trzeba przenieść wieżę na inny palik

- przekładając po jednym krążku
- nie kładąc nigdy większego krążka na mniejszym

Jaką najmniejszą ilością ruchów można wykonać to zadanie?

Rysunki z zasobów Wikimedia Commons

Wieża z Hanoi

Przekładając n krążków z palika pierwszego na trzeci, najpierw musimy odkopać największy krążek i mieć zwolniony trzeci palik, zatem musimy przenieść $n - 1$ krążków na drugi palik. Następnie po przełożeniu największego krążka musimy przenieść wieżę $n - 1$ krążków na trzeci palik. Ilość przeniesień dla n krążków jest równa:

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$

Z oczywistym warunkiem początkowym $a_1 = 1$.

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} x^n$$
$$f(x) = 2xf(x) + \frac{1}{1-x}$$

Wieża z Hanoi

Rozwiązując to równanie dostajemy funkcję:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{2x}{1-2x} - \frac{x}{1-x} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} ((2x)^n - x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} (2^n - 1)x^n \end{aligned}$$

Stąd dostajemy że $a_n = 2^n - 1$

Ćwiczenie: Rozwiązać problem szukając pierwiastków wielomianu charakterystycznego

Wykładnicze funkcje tworzące

Definicja

Wykładniczą funkcją tworzącą ciągu a_n nazywamy wyrażenie:

$$\mathcal{A} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \quad \mathcal{A}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n.$$

Wzory na funkcję tworzącą sumy ciągów i ciągu pomnożonego przez skalar pozostają w mocy. Funkcja tworząca iloczynu ciągów a_n i b_n jest funkcją tworzącą ciągu $c_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$.

Taka operacja na ciągach nazywa się **splotem dwumianowym**. Jeżeli za a_n i b_n wziąć ciągi kolejnych pochodnych funkcji odpowiednio f i g , to splot dwumianowy tych ciągów daje formułę Leibnitza na n -tą pochodną iloczynu.

Własności wykładniczej funkcji tworzącej

- Pochodna funkcji tworzącej $\iff$ przesunięcie ciągu w lewo:

$$\frac{d}{dx}\mathcal{A}(x) \sim (a_1, a_2, \dots)$$

- Całka funkcji tworzącej $\iff$ przesunięcie ciągu w prawo:

$$\int dx \mathcal{A}(x) \sim (0, a_0, a_1, a_2, \dots)$$

-

$$x\mathcal{A}(x) \sim (0, 1 \cdot a_1, 2 \cdot a_2, 3 \cdot a_3, \dots)$$

-

$$x^n \mathcal{A}(x) \sim (\underbrace{0, \dots, 0}_n, \frac{n!}{0!} a_0, \frac{(n+1)!}{1!} a_1, \frac{(n+2)!}{2!} a_2, \dots)$$

Wykładnicze funkcje tworzące wybranych ciągów

Wykładnicza funkcja tworząca odpowiada ciągom rozmieszczeń z istotną kolejnością.

- Wykładnicza funkcja tworząca ciągu $a_k = \frac{n!}{(n-k)!}$ (ilość wariacji bez powtórzeń ze zbioru n -elementowego):

$$\mathcal{A}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{x^k}{k!} = (1+x)^n$$

- Wykładnicza funkcja tworząca ciągu $a_k = k!$ (ilość permutacji zbioru k -elementowego):

$$\mathcal{A}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k! \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{1-x}$$

Wykładnicze funkcje tworzące wybranych ciągów

- Wykładnicza funkcja tworząca ciągu $(1, 1, \dots)$:

$$\mathcal{A}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

- Wykładnicza funkcja tworząca ciągu $(1, -1, 1, -1, \dots)$:

$$\mathcal{A}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!} = e^{-x}$$

- Wykładnicza funkcja tworząca ciągu $(1, 0, 1, 0, \dots)$:

$$\mathcal{A}(x) = \sum_{k \in \text{parz}, k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \operatorname{ch} x$$

- Wykładnicza funkcja tworząca ciągu $(0, 1, 0, 1, \dots)$:

$$\mathcal{A}(x) = \sum_{k \in \text{nparz}, k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \operatorname{sh} x$$

Zastosowanie wykładniczej funkcji tworzącej - jawna postać liczb Bella

Przypomnienie: Liczba Bella B_n to liczba rozbić zbioru n -elementowego na niepuste podzbiory.

- W rozbić zbioru n -elementowego n -ty należy do pewnego k -elementowego podzioru.
- Podzbiór ten można wybrać na $\binom{n-1}{k-1}$ sposobów.
- Dla każdego wyboru podzbioru, jego dopełnienie można rozbić na B_{n-k} sposobów, zatem

$$B_n = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} B_{n-k} = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{n-k} B_{n-k} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} B_i$$

Zastosowanie wykładniczej funkcji tworzącej - jawna postać liczb Bella

Rozpatrzmy wykładniczą funkcję tworzącą dla liczb Bella:

$$\mathcal{B}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$$

jej pochodna będzie równa:

$$\mathcal{B}'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(n-1)!} x^{n-1}$$

Wstawmy do prawej strony wyrażenie rekurencyjne na B_n :

$$\mathcal{B}'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} B_i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} B_i$$

Zastosowanie wykładniczej funkcji tworzącej - jawna postać liczb Bella

Zmieńmy kolejność sumowania:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} B_i = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \frac{x^n}{n!} \binom{n}{i} B_i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=i}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \binom{n}{i} B_i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B_i}{i!} \sum_{n=i}^{\infty} \frac{x^n}{(n-i)!} \end{aligned}$$

Zamieńmy w drugiej sumie zmienną n na $k = n - i$

$$\mathcal{B}'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B_i}{i!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+i}}{n!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B_i}{i!} x^i e^x = \mathcal{B}(x) e^x$$

Rozwiązujemy powyższe równanie różniczkowe:

$$[\ln \mathcal{B}(x)]' = e^x \implies \ln \mathcal{B}(x) = e^x + C \implies \mathcal{B}(x) = e^{e^x + C}$$

Zastosowanie wykładniczej funkcji tworzącej - jawna postać liczb Bella

Rozwińmy funkcję tworzącą w szereg:

$$\mathcal{B}(x) = e^C e^{e^x} = e^C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} e^{xk} = e^C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n k^n}{n!} = e^C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$$

Współczynnikiem rozwinięcia B_n jest $e^C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$.

Ponieważ $B_1 = 1$ (zbiór jednoelementowy ma jedno rozbiecie na niepuste podzbiory):

$$B_1 = 1 = e^C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!} = e^C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1^k}{(k-1)!} = e^C e \implies C = -1$$

Ostatecznie: $B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$. (B_n jest liczbą naturalną!)