Mechanika dla AiR

Wykład 5: Równania Lagrange'a II rodzaju dla bryły sztywnej

Gniewomir Sarbicki

Przypominamy sobie, że:

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & -\cos\psi & -\sin\psi\cos\theta \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \overset{ozn}{=} C \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \tag{1}$$

By przejść do układu bryły musimy przemnożyć $\vec{\omega}$ przez R^T:

$$\vec{\omega}^0 = R^T C \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\theta & -\sin\phi & 0 \\ -\sin\phi\cos\theta & -\cos\phi & 0 \\ -\sin\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Możemy zatem zapisać energię kinetyczną jako formę kwadratową prędkości uogólnionych:

$$E_K^{obr} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\psi} & \dot{\theta} & \dot{\phi} \end{bmatrix} C^T R \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} R^T C \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\psi} & \dot{\theta} & \dot{\phi} \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \tag{3}$$

gdzie $T(\theta, \phi) = \frac{1}{2}$

$$\begin{bmatrix} (I_{xx}\cos^2\phi + I_{yy}\sin^2\phi)\cos^2\theta + I_{zz}\sin^2\theta & (I_{yy} - I_{xx})\sin\phi\cos\phi\cos\theta & -I_{zz}\sin\theta \\ (I_{yy} - I_{xx})\sin\phi\cos\phi\cos\theta & I_{xx}\sin^2\phi + I_{yy}\cos^2\phi & 0 \\ -I_{zz}\sin\theta & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \tag{4}$$

Wkład od k-tej cząstki do j-tej składowej kątowej siły uogólnionej wynosi:

$$\begin{aligned} Q_j^{(k)} &= \sum_i F_i^{(k)} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \partial_j R(t) \vec{r}_0^{(k)} \cdot \vec{F}^{(k)} = \partial_j R(t) R(t)^T \vec{r}^{(k)} \cdot \vec{F}^{(k)} \\ &= \left(\partial_{\dot{q}_j} \dot{R}\right) R(t)^T \vec{r}^{(k)} \cdot \vec{F}^{(k)} = \left(\partial_{\dot{q}_j} \dot{R} R(t)^T\right) \vec{r}^{(k)} \cdot \vec{F}^{(k)} = \left(\partial_{\dot{q}_j} \vec{\omega}\right) \times \vec{r}^{(k)} \cdot \vec{F}^{(k)} \\ &= \left(\partial_{\dot{q}_j} \vec{\omega}\right) \cdot \vec{r}^{(k)} \times \vec{F}^{(k)} = \left(\partial_{\dot{q}_j} \vec{\omega}\right) \cdot \vec{M}^{(k)} = C_j \cdot \vec{M}^{(k)}, \end{aligned} \tag{5}$$

gdzie C_j oznacza j-tą kolumnę macierzy C. Wysumowując po k otrzymamy: $Q_j = C_j \cdot \vec{M}$, zatem składowe kątowe siły uogólnionej to pewne składowe związanego z nią momentu względem środka ciężkości:

$$\begin{bmatrix} Q_\psi \\ Q_\theta \\ Q_\phi \end{bmatrix} = C^T \vec{M} = \begin{bmatrix} M_x \\ -M_y \cos\psi - M_z \sin\psi \\ -M_x \sin\theta - \cos\theta (M_y \sin\psi - M_z \cos\psi) \end{bmatrix} \tag{6}$$

Dla sił potencjalnych: $Q_j = -\sum_i \partial_{x_i} E_p(x_1 \ldots x_n) \partial x_i / \partial q_j = -\partial_{q_j} E_p(q_1, \ldots, q_k)$.

Obliczenia symboliczne w jupyther notebook korzystające z sympy

In [10]:
```
C0 = simplify(R.T * C)
C0
```

Out[10]:

$$\begin{bmatrix} \cos(\phi(t))\cos(\theta(t)) & -\sin(\phi(t)) & 0 \\ -\sin(\phi(t))\cos(\theta(t)) & -\cos(\phi(t)) & 0 \\ -\sin(\theta(t)) & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In [11]:
```
I_xx, I_yy, I_zz = symbols('I_xx, I_yy, I_zz')
I = diag(I_xx,I_yy,I_zz)
simplify(C.T * R * I * R.T * C)
```

Out[11]:

$$\begin{bmatrix} I_{xx}\cos^2(\phi(t))\cos^2(\theta(t)) + I_{yy}\sin^2(\phi(t))\cos^2(\theta(t)) + I_{zz}\sin^2(\theta(t)) & \frac{(-I_{xx}+I_{yy})(\sin(2\phi(t)-\theta(t))+\sin(2\phi(t)+\theta(t)))}{4} & -I_{zz}\sin(\theta(t)) \\ \frac{(-I_{xx}+I_{yy})(\sin(2\phi(t)-\theta(t))+\sin(2\phi(t)+\theta(t)))}{4} & I_{xx}\sin^2(\phi(t)) - I_{yy}\sin^2(\phi(t)) + I_{yy} & 0 \\ -I_{zz}\sin(\theta(t)) & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

In [12]:
```
M_x, M_y, M_z = symbols('M_x, M_y, M_z')
C.T * Matrix([M_x, M_y, M_z])
```

Out[12]:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ -M_y\cos(\psi(t)) - M_z\sin(\psi(t)) \\ -M_x\sin(\theta(t)) - M_y\sin(\psi(t))\cos(\theta(t)) + M_z\cos(\psi(t))\cos(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

Ponieważ mamy już energię kinetyczną i potencjalną bryły oraz siły uogólnione wyrażone przez zmienne uogólnione i ich pochodne po czasie możemy zapisać 6 równań Lagrange'a drugiego rodzaju dla bryły. Współrzędnymi uogólnionymi są np. trzy współrzędne kartezjańskie środka ciężkości i trzy kąty Eulera. Lagrangian jest postaci

$$L = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2\right) + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{\psi} & \dot{\theta} & \dot{\phi} \end{bmatrix} C^T \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} C \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} - E_p(x_0, y_0, z_0, \psi, \theta, \phi) \tag{7}$$

Daje on równania Lagrange'a:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = Q_q, \quad \text{dla} \quad q \in \{x_0, y_0, z_0, \psi, \theta, \phi\} \tag{8}$$

Dla kątów Eulera:

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & \cos\alpha & \sin\alpha\sin\beta \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha\sin\beta \\ 1 & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \stackrel{ozn}{=} C_E \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \tag{9}$$

By przejść do układu bryły musimy przemnożyć $\vec{\omega}$ przez R_E^T:

$$\vec{\omega}^0 = R_E^T C \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\beta\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ \sin\beta\cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \cos\beta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$T_E = \frac{1}{2} C_E^T R_E \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} R_E^T C_E = \frac{1}{2}$$

$$\begin{bmatrix} (I_{xx}\sin^2\gamma + I_{yy}\cos^2\gamma)\sin^2\beta + I_{zz}\cos^2\beta & (I_{xx} - I_{yy})\sin\beta\sin\gamma\cos\gamma & I_{zz}\cos\beta \\ (I_{xx} - I_{yy})\sin\beta\sin\gamma\cos\gamma & I_{xx}\cos^2\gamma + I_{yy}\sin^2\gamma & 0 \\ I_{zz}\cos\beta & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\begin{bmatrix} Q_\alpha \\ Q_\beta \\ Q_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha\sin\beta & -\sin\beta\cos\alpha & \cos\beta \end{bmatrix} \vec{M}$$

$$= \begin{bmatrix} M_z \\ M_x\cos\alpha + M_y\sin\alpha \\ (M_x\sin\alpha - M_y\cos\alpha)\sin\beta + M_z\cos\beta \end{bmatrix} \tag{12}$$

Obliczenia symboliczne w jupyther notebook korzystające z sympy

In [13]:
```
CE0 = simplify(RE.T * CE)
print(CE0)
```

```
Matrix([[sin(beta(t))*sin(gamma(t)), cos(gamma(t)), 0], [sin(beta(t))*cos(gamma(t)), -sin(gamma(t)), 0], [cos(beta(t)), 0, 1]])
```

In [14]:
```
I_xx, I_yy, I_zz = symbols('I_xx, I_yy, I_zz')
I = diag(I_xx,I_yy,I_zz)
TE = simplify(CE.T * RE * I * RE.T * CE)
TE
```

Out[14]:

$$\begin{bmatrix} I_{xx}\sin^2(\beta(t))\sin^2(\gamma(t)) + I_{yy}\sin^2(\beta(t))\cos^2(\gamma(t)) + I_{zz}\cos^2(\beta(t)) & \frac{(I_{xx}-I_{yy})(\cos(\beta(t)-2\gamma(t))-\cos(\beta(t)+2\gamma(t)))}{4} & I_{zz}\cos(\beta(t)) \\ \frac{(I_{xx}-I_{yy})(\cos(\beta(t)-2\gamma(t))-\cos(\beta(t)+2\gamma(t)))}{4} & -I_{xx}\sin^2(\gamma(t)) + I_{xx} + I_{yy}\sin^2(\gamma(t)) & 0 \\ I_{zz}\cos(\beta(t)) & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

In [15]:
```
CE.T * Matrix([M_x, M_y, M_z])
```

Out[15]:

$$\begin{bmatrix} M_z \\ M_x\cos(\alpha(t)) + M_y\sin(\alpha(t)) \\ M_x\sin(\alpha(t))\sin(\beta(t)) - M_y\sin(\beta(t))\cos(\alpha(t)) + M_z\cos(\beta(t)) \end{bmatrix}$$

Bąk Lagrange'a

Załóżmy teraz, że bryła ma symetrię obrotową wokół osi z ($I_{xx} = I_{yy}$) i jest podparta w dolnym punkcie osi - ma ona zatem tylko trzy stopnie swobody. Niech środek ciężkości będzie w odległości h od punktu podparcia. W chwili t znajduje się on w punkcie $[x_0, y_0, z_0]^T = R(t)h\vec{e}_z = h[\sin\alpha\sin\beta, -\cos\alpha\sin\beta, \cos\beta]^T$.
Obliczamy, że $\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2 = h^2(\sin^2\beta\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2)$

In [16]:
```
M,g,h = symbols('M,g,h')
r0 = RE * Matrix([0,0,1])
r0
```

Out[16]:
$$\begin{bmatrix} \sin(\alpha(t))\sin(\beta(t)) \\ -\sin(\beta(t))\cos(\alpha(t)) \\ \cos(\beta(t)) \end{bmatrix}$$

In [17]:
```
v0 = r0.diff(t)
simplify(v0.T * v0)
```

Out[17]:
$$\left[\sin^2(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right)^2\right]$$

Obliczamy energię kinetyczną ruchu obrotowego:

$$E_K^{obr} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{\alpha} & \dot{\beta} & \dot{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx}\sin^2\beta + I_{zz}\cos^2\beta & 0 & I_{zz}\cos\beta \\ 0 & I_{xx} & 0 \\ I_{zz}\cos\beta & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \tag{13}$$

In [18]:
```
T = simplify(CE.T * RE * diag(I_xx,I_xx,I_zz) * RE.T * CE)
T
```

Out[18]:
$$\begin{bmatrix} I_{xx}\sin^2(\beta(t)) - I_{zz}\sin^2(\beta(t)) + I_{zz} & 0 & I_{zz}\cos(\beta(t)) \\ 0 & I_{xx} & 0 \\ I_{zz}\cos(\beta(t)) & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Całkowita energia kinetyczna jest równa:

$$E_K = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{\alpha} & \dot{\beta} & \dot{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I_{xx} + Mh^2)\sin^2\beta + I_{zz}\cos^2\beta & 0 & I_{zz}\cos\beta \\ 0 & I_{xx} + Mh^2 & 0 \\ I_{zz}\cos\beta & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{\alpha} & \dot{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I_{xx} + Mh^2)\sin^2\beta + I_{zz}\cos^2\beta & I_{zz}\cos\beta \\ I_{zz}\cos\beta & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{1}{2}(I_{xx} + Mh^2)\dot{\beta}^2$$

In [19]:
```
TE1 = T + diag(M*h**2*(sin(beta))**2, M*h**2, 0)
TE1
```

Out[19]:
$$\begin{bmatrix} I_{xx}\sin^2(\beta(t)) - I_{zz}\sin^2(\beta(t)) + I_{zz} + Mh^2\sin^2(\beta(t)) & 0 & I_{zz}\cos(\beta(t)) \\ 0 & I_{xx} + Mh^2 & 0 \\ I_{zz}\cos(\beta(t)) & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Energia potencjalna zależy tylko od składowej z środka ciężkości: $E_p = Mgh\cos\beta$.

Bąk Lagrange'a

Lagrangian jest zatem równy:

$$L = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{\alpha} & \dot{\gamma} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (I_{xx}+Mh^2)\sin^2\beta + I_{zz}\cos^2\beta & I_{zz}\cos\beta \\ I_{zz}\cos\beta & I_{zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(I_{xx}+Mh^2)\dot{\beta}^2 - Mgh\cos\beta \tag{14}$$

Otrzymujemy równania Lagrange'a:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left((I_{xx}+Mh^2)\sin^2\beta + I_{zz}\cos^2\beta\right)\dot{\alpha} + I_{zz}\cos\beta\,\dot{\gamma}\right) = 0 \tag{15}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(I_{zz}\cos\beta\,\dot{\alpha} + I_{zz}\dot{\gamma}\right) = 0 \tag{16}$$

In [20]:
```
wektor_pochodnych = Matrix([alpha,beta,gamma]).diff(t)
E_K = Rational(1,2) * (wektor_pochodnych.T * TE1 * wektor_pochodnych)
E_K=E_K[0,0]
E_K
```

Out[20]:

$$\frac{\left(I_{xx}+Mh^2\right)\left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right)^2}{2}+\frac{\left(I_{zz}\cos\left(\beta(t)\right)\frac{d}{dt}\alpha(t)+I_{zz}\frac{d}{dt}\gamma(t)\right)\frac{d}{dt}\gamma(t)}{2}+\frac{\left(I_{zz}\cos\left(\beta(t)\right)\frac{d}{dt}\gamma(t)+\left(I_{xx}\sin^2\left(\beta(t)\right)-I_{zz}\sin^2\left(\beta(t)\right)+I_{zz}+Mh^2\sin^2\left(\beta(t)\right)\right)\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)\frac{d}{dt}\alpha(t)}{2}$$

In [21]:
```
simplify(E_K.diff(alpha.diff(t)))
```

Out[21]:

$$I_{zz}\cos\left(\beta(t)\right)\frac{d}{dt}\gamma(t)+\left(I_{xx}\sin^2\left(\beta(t)\right)-I_{zz}\sin^2\left(\beta(t)\right)+I_{zz}+Mh^2\sin^2\left(\beta(t)\right)\right)\frac{d}{dt}\alpha(t)$$

In [22]:
```
simplify(E_K.diff(gamma.diff(t)))
```

Out[22]:

$$I_{zz}\left(\cos\left(\beta(t)\right)\frac{d}{dt}\alpha(t)+\frac{d}{dt}\gamma(t)\right)$$

$$\left(I_{xx}+Mh^2\right)\ddot{\beta}-\begin{bmatrix}\dot{\alpha} & \dot{\gamma}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\beta(I_{xx}-I_{zz}+Mh^2) & -\frac{1}{2}I_{zz}\\ -\frac{1}{2}I_{zz} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\alpha}\\ \dot{\gamma}\end{bmatrix}\sin\beta$$
$$-Mgh\sin\beta=0 \tag{17}$$

In [23]:
```
simplify(E_K.diff(beta.diff(t)).diff(t))
```

Out[23]:

$$\left(I_{xx}+Mh^2\right)\frac{d^2}{dt^2}\beta(t)$$

In [24]:
```
simplify(TE1.diff(beta))
```

Out[24]:

$$\begin{bmatrix}\left(I_{xx}-I_{zz}+Mh^2\right)\sin\left(2\beta(t)\right) & 0 & -I_{zz}\sin\left(\beta(t)\right)\\ 0 & 0 & 0\\ -I_{zz}\sin\left(\beta(t)\right) & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Dwa pierwsze można od razu scałkować i przepisać jako:

$$\begin{bmatrix} (I_{xx} + Mh^2)\sin^2\beta + I_{zz}\cos^2\beta & I_{zz}\cos\beta \\ I_{zz}\cos\beta & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

- pozwalają one wyrazić częstość obrotu własnego i częstość precesji przez kąt β. Po wstawieniu do ostatniego równania otrzymamy nieliniowe równanie drugiego rzędu na β:

$$\ddot{\beta} - \frac{\cos\beta(A^2 + B^2) - (1 + \cos^2\beta)AB}{(I_{xx} + Mh^2)^2 \sin^3\beta} - \frac{Mgh\sin\beta}{I_{xx} + Mh^2} = 0 \tag{18}$$

```
In [25]: A,B = symbols('A,B')
         wektor_stalych = Matrix([A,B])
         TE1_ag = Matrix([[TE1[0,0],TE1[0,2]],[TE1[2,0],TE1[2,2]]])
         TE1_ag_inv = simplify(TE1_ag.inv())
         simplify(wektor_stalych.T * TE1_ag_inv * TE1_ag.diff(beta) * TE1_ag_inv * wektor_stalych / 2)
```

Out[25]: $\left[\frac{A^2\cos(\beta(t))+AB\sin^2(\beta(t))-2AB+B^2\cos(\beta(t))}{(I_{xx}+Mh^2)\sin^3(\beta(t))}\right]$

Równanie to nie zawiera $\dot{\beta}$, więc redukujemy je do pierwszego rzędu za pomocą całki energii i rozwiązujemy przez rozdzielenie zmiennych.

W szczególnym przypadku, gdy β =const, mamy $\dot{\alpha}$ =const i $\dot{\gamma}$ =const. Wstawiając je do ostatniego równania otrzymujemy

$$\cos\beta = \frac{I_{zz}\dot{\alpha}\dot{\gamma} - Mgh}{(I_{xx} - I_{zz} + Mh^2)\dot{\alpha}^2} \tag{19}$$