Mechanika dla AiR

Wykład 6: Dynamika bryły sztywnej

Gniewomir Sarbicki

Najważniejszym przykładem układu punktów materialnych związanych więzami jest bryła sztywna

Definicja:

Bryłą sztywną nazywamy układ punktów materialnych w którym odległości między dowolnymi dwoma punktami są stałe.

$$\forall i < j \quad |\vec{r}_i - \vec{r}_j| = l_{ij}$$

Liczba stopni swobody

$$N = 1 \qquad n = 3$$
$$N = 2 \qquad n = 5$$
$$N \geqslant 3 \qquad n = 6$$

Położenie bryły sztywnej określa położenie jednego jej punktu i trzech kątów obrotu.

Położenie $\vec{r}_i$ punktu bryły sztywnej jest określone przez położenie $\vec{r}_0$ jednego wyróżnionego jej punktu i wektora $\vec{r}_i'$ położenia w układzie związanym z bryłą.

Układ związany z bryłą jest zaczepiony w punkcie $\vec{r}_0$ i obraca się z prędkością kątową $\vec{\omega}$. Stąd $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r}_i = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_i'$

Obliczmy moment pędu bryły sztywnej:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i(\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_i') = \left(\sum_i m_i \vec{r}_i\right) \times \vec{v}_0 \tag{1}$$

$$+ \vec{r}_0 \times \left(\vec{\omega} \times \left(\sum_i m_i \vec{r}_i'\right)\right) + \sum_i m_i \vec{r}_i' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i') \tag{2}$$

$$\stackrel{ozn}{=} \vec{R} \times M\vec{v}_0 + M\vec{r}_0 \times \left(\vec{\omega} \times \vec{R}'\right) + \sum_i m_i \vec{r}_i' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i'), \tag{3}$$

gdzie $M = \sum_i m_i$, $\vec{R} = \left(\sum_i m_i \vec{r}_i\right)/M$, $\vec{R}' = \left(\sum_i m_i \vec{r}_i'\right)/M = \vec{R} - \vec{r}_0$.

Ostatni składnik przepiszemy wykorzystując tożsamość $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$:

$$\sum_i m_i \left(r_i'^2 - |\vec{r}_i'\rangle\langle\vec{r}_i'| \right) \vec{\omega} \stackrel{ozn}{=} \hat{I}_{\vec{r}_0} \vec{\omega} \tag{4}$$

Tensor $\hat{I}$ nazywamy *tensorem momentu bezwładności*.

Ostatecznie mamy:

$$\vec{L} = \vec{R} \times M\vec{v}_0 + M\vec{r}_0 \times \left(\vec{\omega} \times \vec{R}' \right) + \hat{I}_{\vec{r}_0} \vec{\omega} \tag{5}$$

Jeżeli $\vec{R} = \vec{r}_0$ (układ współrzędnych bryły zaczepiony w jej środku masy), to:

$$\vec{L} = \vec{R} \times M\vec{v}_0 + \hat{I}\vec{\omega} \stackrel{ozn}{=} \vec{L}_{tr} + \vec{L}_{obr} \tag{6}$$

Obliczmy energię kinetyczną bryły sztywnej:

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \vec{r}_i \right)^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_i' \right)^2$$
$$= \frac{1}{2} M v_0^2 + M \vec{v}_0 \cdot \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i' \right) + \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i' \right)^2$$

Ostatni składnik możemy przekształcić korzystając z cykliczności iloczynu mieszanego:
$\left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i' \right) \cdot \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i' \right) = \left(\vec{r}_i' \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i' \right) \right) \cdot \vec{\omega} = \left(r_i'^2 \vec{\omega} - \vec{r}_i' \left(\vec{r}_i' \cdot \vec{\omega} \right) \right) \cdot \vec{\omega} = \vec{\omega} \cdot \left(r_i'^2 - |\vec{r}_i'\rangle\langle\vec{r}_i'| \right) \vec{\omega}$.

$$E_k = \frac{1}{2} M v_0^2 + M \vec{v}_0 \cdot \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i' \right) + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \sum_i m_i \left(r_i'^2 - |\vec{r}_i'\rangle\langle\vec{r}_i'| \right) \vec{\omega}$$
$$= \frac{1}{2} M v_0^2 + M \vec{v}_0 \cdot \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i' \right) + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \hat{I} \vec{\omega}$$

Jeżeli $\vec{R} = \vec{r}_0$ (układ współrzędnych bryły zaczepiony w jej środku masy), to:

$$E_k = \frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \hat{I} \vec{\omega} \overset{ozn}{=} E_k^{(tr)} + E_k^{(obr)} \tag{7}$$

Kierunek wektora $\vec{\omega}$ określa kierunek chwilowej osi orbrotu. Zapiszmy go jako $\vec{\omega} = \vec{e}\omega$ przy pomocy wektora jednostkowego $\vec{e}$ o kierunku i zwrocie wektora $\vec{\omega}$. Wtedy E_k będzie równa:

$$E_k = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i \left(r_i'^2 - \langle \vec{e} | \vec{r}_i' \rangle^2 \right) = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i \left(r_i'^2 - r_{i||}'^2 \right) = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i r_{i\perp}'^2 \qquad (8)$$

Oznacza to, że tensor momentu bezwładności przypisuje wektorowi prędkości kątowej iloczyn kwadratu jego długości i ważoną masami punktów sumę kwadratów odległości punktów bryły od osi obrotu.

Macierz momentu bezwładności w kartezjańskim układzie współrzędnych ma postać:

$$
\begin{aligned}
\hat{I} &= \sum_i m_i \left(\begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i \end{bmatrix} \right) \\
&= \sum_i m_i \begin{bmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -z_i x_i \\ -y_i x_i & z_i^2 + x_i^2 & -y_i z_i \\ -x_i z_i & -z_i y_i & x_i^2 + y_i^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_i m_i \left(y_i^2 + z_i^2\right) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i z_i x_i \\ -\sum_i m_i y_i x_i & \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2) & -\sum_i m_i y_i z_i \\ -\sum_i m_i x_i z_i & -\sum_i m_i z_i y_i & \sum_i m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right) \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

W granicy ciągłego rozkładu masy:

$$\hat{I} = \begin{bmatrix} \int_V \rho(x,y,z)\left(y_i^2 + z_i^2\right)\mathrm{d}V & -\int_V \rho(x,y,z)x_i y_i \mathrm{d}V & -\int_V \rho(x,y,z)z_i x_i \mathrm{d}V \\ -\int_V \rho(x,y,z)y_i x_i \mathrm{d}V & \int_V \rho(x,y,z)(z_i^2 + x_i^2)\mathrm{d}V & -\int_V \rho(x,y,z)y_i z_i \mathrm{d}V \\ -\int_V \rho(x,y,z)x_i z_i \mathrm{d}V & -\int_V \rho(x,y,z)z_i y_i \mathrm{d}V & \int_V \rho(x,y,z)\left(x_i^2 + y_i^2\right)\mathrm{d}V \end{bmatrix} \tag{10}$$

Diagonalne elementy tensora bezwładności to momenty bezwładności względem osi układu współrzędnych. Elementy pozadiagonalne nazywane są *momentami dewiacji*. Tensor jest symetryczny, zatem istnieje baza ortonormalna, w której przyjmie on postać diagonalną. Osie nowego układu nazywamy *osiami głównymi* bryły, a odpowiadające im wartości własne tensora bezwładności jego *momentami głownymi*.

Tensor bezwładności jest liniową funkcją rozkładu masy. Obliczając moment bezwładności większej bryły możemy policzyć tensory bezwładności jej części, względem wspólnego środka masy. Z pomocą przychodzi nam wtedy tw. Steinera:

tw. Steinera

$$\hat{I}_{\vec{r}_0+\vec{R}} = \hat{I}_{r_0} + M\left(R^2 - |\vec{R}\rangle\langle\vec{R}|\right)$$

W przypadku momentu bezwładności wzgl. ustalonego kierunku osi otrzymamy: $I' = I_{r_0} + MR^2$, gdzie R jest odległością między osią przechodzącą przez środek masy i nową osią równoległą do niej.

Punkty bryły sztywnej spełniają układ równań Newtona:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i^{(Z)} + \sum_j R_{i|j}^{(W)} \tag{11}$$

Będziemy wykorzystywać wzory na pochodne wektora r_i:

$$\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_i', \qquad \ddot{\vec{r}}_i = \ddot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_i' + \omega^2 \vec{r}_i' - \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i')$$

Wysumowując rownania (11) otrzymamy

$$M \ddot{\vec{r}}_0 = \vec{F}_i + \vec{R}^{(Z)} \tag{12}$$

- środek ciężkości bryły sztywnej porusza się jak punkt materialny pod działaniem sił zewnętrznych

Pomnóżmy wektorowo każde z równań przez $\vec{r}_i$. Otrzymamy:

$$\sum_i \vec{r}_i \times \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i\right) = \underline{M\vec{r}_0 \times \ddot{\vec{r}}_0} + I\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times (I\vec{\omega})$$

$$= \underline{\vec{r}_0 \times \sum_i \vec{F}_i} + \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{F}_i + \underline{\vec{r}_0 \times \sum_i \vec{R}_i^{(Z)}} + \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{R}_i^{(Z)} \qquad (13)$$

Prawa strona to moment sił zewnętrznych i reakcji zewnętrznych działających na bryłę. Reakcje wewnętrzne nie wnoszą nic do całkowitego momentu, bo są centralne (idealność więzów).

Zauważmy, że $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_i \vec{r}_i \times \left(m_i \dot{\vec{r}}_i\right) = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \times \dot{\vec{r}}_i + \sum_i \vec{r}_i \times \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i\right)$

zatem lewa strona równania to pochodna po czasie momentu pędu. Pierwszy składnik (zeruje się gdy $\vec{r}_0 = 0$) to pochodna części translacyjnej momentu pędu. Pozostałe składniki (zerują się gdy $\vec{\omega} = 0$) to część obrotowa momentu pędu.

Na mocy (12), podkreślone wyrażenia się skracają.

$$\dot{\vec{L}}^{(obr)} = I\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times (I\vec{\omega}) = \vec{M} + \vec{M}^{(RZ)} \tag{14}$$

Otrzymaliśmy w ten sposób równania Eulera dla ruchu obrotowego.

Uwaga: Moment bezwładności jest wyrażony w układzie związanym z bryłą, a wektor prędkości kątowej w układzie nieruchomym.

Niech $\mathrm{d}/\mathrm{d}t \;/\; \mathrm{d}'/\mathrm{d}t$ będą operatorami pochodnej wektora w układzie nieruchomym / układzie bryły:

$$\dot{\vec{\omega}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\omega} = \frac{\mathrm{d}'}{\mathrm{d}t}\vec{\omega}' = \dot{\vec{\omega}}' + \vec{\omega}' \times \vec{\omega}' = \dot{\vec{\omega}}' \tag{15}$$

Czyli w obu układach pochodna po czasie wektora prędkości kątowej to wektor pochodnych cząstkowych po czasie, a lewa strona równania Eulera wygląda tak samo gdy wektor ω jest (tak jak tensor bezwładności) w układzie bryły.

Ramiona sił wyrażone są w układzie bryły. Siły mogą być zadane w jednym lub w drugim układzie, siły zadane w układzie nieruchomym trzeba przetransformować do układu bryły.

Przykład: W przypadku czterowirnikowca: siła grawitacji jest stała w układzie nieruchomym, siły ciągu mają stały kierunek w układzie bryły.

Zależność między oboma układami wyrażają kąty Eulera / Cardana

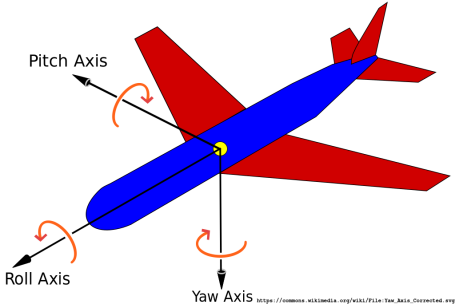
Położenie układu bryły (osie X, Y, Z) względem układu nieruchomego (osie x, y, z) możemy określić za pomocą trzech kątów Eulera γ, β, α. Startując z układów pokrywających się, wykonujemy trzy obroty:

- obrót o kąt γ wokół osi z.
- obrót o kąt β wokół osi x.
- obrót o kąt α wokół osi z.

Współrzędne wektora w układzie nieruchomym ze współrzędnymi wektora w układzie ruchomym wiąże macierz obrotu $Z(\alpha)X(\beta)Z(\gamma)$:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\gamma - \cos\beta\sin\alpha\sin\gamma & -\cos\alpha\sin\gamma - \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\gamma + \cos\beta\cos\alpha\sin\gamma & -\sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma & -\cos\alpha\sin\beta \\ \sin\beta\sin\gamma & \sin\beta\cos\gamma & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \tag{16}$$



W awionice stosujemy kąty Cardana (Tait-Bryan) (norma DIN 9300). Osie X, Y, Z nazywają się roll, pitch, yaw. Położenie układu współrzędnych XYZ związanych z bryłą względem nieruchomego układu współrzędnych określają trzy kąty obrotu względem kolejno $-x$, y, $-z$ o kąty ψ, θ, ϕ:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\theta & -\cos\phi\sin\theta\sin\psi + \sin\phi\cos\psi & \cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\psi \\ -\sin\phi\cos\theta & \sin\phi\sin\theta\cos\psi + \cos\phi\cos\psi & -\sin\phi\sin\theta\cos\psi + \cos\phi\sin\psi \\ -\sin\theta & -\cos\theta\sin\psi & \cos\theta\cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{17}$$

Jeżeli patrzymy z wewnątrz, te same operacje musimy wykonać w odwrotnej kolejności:

Gimbal lock Rozmaitość możliwych położeń bryły jest rozmaitością $SO(3)$ wszystkich macierzy trójwymiarowych obrotów. Rozmaitością tą jest trójwymiarowa przestrzeń rzutowa $\mathbb{R}P^3 \neq S^1 \times S^1 \times S^1$. Nie istnieje zatem globalne jednoznaczne przypisanie położeniu bryły kątów Eulera/Cartana. Wyobraźmy sobie samolot lecący pionowo w górę - w takim przypadku zmianę kąta ψ kompensuje zmiana kąta ϕ.

Związek ω z pochodnymi kątów Cardana

Położenie punktu bryły jest stałe w układzie bryły, jego zmienność wynika ze zmianami kątów Cardana (/Eulera) w macierzy obrotu $R(\psi, \theta, \phi)$:

$$\vec{r}_t = R\vec{r}_0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}_t = \dot{R}\vec{r}_0 = \dot{R}R^{-1}\vec{r}_t = \dot{R}R^T\vec{r}_t = \vec{\omega} \times \vec{r}_t \tag{18}$$

Ponieważ $RR^T = I$, więc po zróżniczkowaniu: $\dot{R}R^T = -R\dot{R}^T = -(\dot{R}R^T)^T$, zatem macierz $\dot{R}R^T$ jest antysymetryczna. Z drugiej strony:

$$\vec{\omega} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_y z - \omega_z y \\ \omega_z x - \omega_x z \\ \omega_x y - \omega_y x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{19}$$

W ten sposób odzyskamy składowe wektora $\vec{\omega}$ z macierzy $\dot{R}R^T$ wyrażonej przez funkcje trygonometryczne kątów ψ, θ, ψ i ich pochodne czasowe.

Dla kątów Cardana:

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta)\dot{\phi} + \dot{\psi} \\ -\sin\psi\cos\theta\phi - \cos\psi\dot{\theta} \\ -\sin\psi\dot{\theta} + \cos\psi\cos\theta\dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & -\cos\psi & -\sin\psi\cos\theta \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \tag{20}$$

Dla kątów Eulera:

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \sin\alpha\sin\beta\dot{\gamma} + \cos\alpha\dot{\beta} \\ \sin\alpha\dot{\beta} - \sin\beta\cos\alpha\dot{\gamma} \\ \cos\beta\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cos\alpha & \sin\alpha\sin\beta \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha\sin\beta \\ 1 & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \tag{21}$$

Tak otrzymujemy 3 równania różniczkowe pierwszego rzędu, które wraz z równaniami Eulera tworzą układ 6 równań pierwszego rzędu dla współrzędnych kątowych.

Obliczenia symboliczne w jupyther notebook korzystające z sympy

In [1]:
```
from sympy import *
from IPython.display import display, HTML
display(HTML('<style>.container {width:95% !important; }</style>'))
init_printing()
```

In [2]:
```
t = symbols('t')
psi = Function('psi')(t)
theta = Function('theta')(t)
phi = Function('phi')(t)
Psi = Matrix([[1,0,0],
              [0,cos(psi),sin(psi)],
              [0,-sin(psi),cos(psi)]])
Theta = Matrix([[cos(theta),0,sin(theta)],
                [0,1,0],
                [-sin(theta),0,cos(theta)]])
Phi = Matrix([[cos(phi),sin(phi),0],
              [-sin(phi),cos(phi),0],
              [0,0,1]])
R = Phi*Theta*Psi
simplify(R)
R = R.T # transformacja z [X,Y,Z] do [x,y,z]
R
```

Out[2]:

$$\begin{bmatrix} \cos(\phi(t))\cos(\theta(t)) & -\sin(\phi(t))\cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) \\ \sin(\phi(t))\cos(\psi(t)) - \sin(\psi(t))\sin(\theta(t))\cos(\phi(t)) & \sin(\phi(t))\sin(\psi(t))\sin(\theta(t)) + \cos(\phi(t))\cos(\psi(t)) & -\sin(\psi(t))\cos(\theta(t)) \\ \sin(\phi(t))\sin(\psi(t)) + \sin(\theta(t))\cos(\phi(t))\cos(\psi(t)) & -\sin(\phi(t))\sin(\theta(t))\cos(\psi(t)) + \sin(\psi(t))\cos(\phi(t)) & \cos(\psi(t))\cos(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

In [3]:
```
Omega = simplify(R.diff(t)*R.T)
Omega
```

Out[3]:

$$\begin{bmatrix} 0 & \sin(\psi(t))\frac{d}{dt}\theta(t) - \cos(\psi(t))\cos(\theta(t))\frac{d}{dt}\phi(t) & -\sin(\psi(t))\cos(\theta(t))\frac{d}{dt}\phi(t) - \cos(\psi(t))\frac{d}{dt}\theta(t) \\ -\sin(\psi(t))\frac{d}{dt}\theta(t) + \cos(\psi(t))\cos(\theta(t))\frac{d}{dt}\phi(t) & 0 & \sin(\theta(t))\frac{d}{dt}\phi(t) - \frac{d}{dt}\psi(t) \\ \sin(\psi(t))\cos(\theta(t))\frac{d}{dt}\phi(t) + \cos(\psi(t))\frac{d}{dt}\theta(t) & -\sin(\theta(t))\frac{d}{dt}\phi(t) + \frac{d}{dt}\psi(t) & 0 \end{bmatrix}$$

In [4]:
```
omega = Matrix([Omega[2,1], Omega[0,2], Omega[1,0]])
omega
```

Out[4]:

$$\begin{bmatrix} -\sin(\theta(t))\frac{d}{dt}\phi(t) + \frac{d}{dt}\psi(t) \\ -\sin(\psi(t))\cos(\theta(t))\frac{d}{dt}\phi(t) - \cos(\psi(t))\frac{d}{dt}\theta(t) \\ -\sin(\psi(t))\frac{d}{dt}\theta(t) + \cos(\psi(t))\cos(\theta(t))\frac{d}{dt}\phi(t) \end{bmatrix}$$

In [5]:
```
C = Matrix([[i.diff(j) for j in [psi.diff(t),theta.diff(t),phi.diff(t)]] for i in omega])
C
```

Out[5]:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin(\theta(t)) \\ 0 & -\cos(\psi(t)) & -\sin(\psi(t))\cos(\theta(t)) \\ 0 & -\sin(\psi(t)) & \cos(\psi(t))\cos(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

Obliczenia symboliczne w jupyther notebook korzystające z sympy

In [6]:
```
alpha = Function('alpha')(t)
beta = Function('beta')(t)
gamma = Function('gamma')(t)
Alpha = Matrix([[cos(alpha),-sin(alpha),0],
                [sin(alpha),cos(alpha),0],
                [0,0,1]])
Beta = Matrix([[1,0,0],
               [0,cos(beta),-sin(beta)],
               [0,sin(beta),cos(beta)]])
Gamma = Matrix([[cos(gamma),-sin(gamma),0],
                [sin(gamma),cos(gamma),0],
                [0,0,1]])
RE = Alpha*Beta*Gamma
```

In [7]:
```
OmegaE = simplify(RE.diff(t)*RE.T)
OmegaE
```

Out[7]:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\cos(\beta(t))\frac{d}{dt}\gamma(t) - \frac{d}{dt}\alpha(t) & \sin(\alpha(t))\frac{d}{dt}\beta(t) - \sin(\beta(t))\cos(\alpha(t))\frac{d}{dt}\gamma(t) \\ \cos(\beta(t))\frac{d}{dt}\gamma(t) + \frac{d}{dt}\alpha(t) & 0 & -\sin(\alpha(t))\sin(\beta(t))\frac{d}{dt}\gamma(t) - \cos(\alpha(t))\frac{d}{dt}\beta(t) \\ -\sin(\alpha(t))\frac{d}{dt}\beta(t) + \sin(\beta(t))\cos(\alpha(t))\frac{d}{dt}\gamma(t) & \sin(\alpha(t))\sin(\beta(t))\frac{d}{dt}\gamma(t) + \cos(\alpha(t))\frac{d}{dt}\beta(t) & 0 \end{bmatrix}$$

In [8]:
```
omegaE = Matrix([OmegaE[2,1], OmegaE[0,2], OmegaE[1,0]])
omegaE
```

Out[8]:

$$\begin{bmatrix} \sin(\alpha(t))\sin(\beta(t))\frac{d}{dt}\gamma(t) + \cos(\alpha(t))\frac{d}{dt}\beta(t) \\ \sin(\alpha(t))\frac{d}{dt}\beta(t) - \sin(\beta(t))\cos(\alpha(t))\frac{d}{dt}\gamma(t) \\ \cos(\beta(t))\frac{d}{dt}\gamma(t) + \frac{d}{dt}\alpha(t) \end{bmatrix}$$

In [9]:
```
CE = Matrix([[i.diff(j) for j in [alpha.diff(t),beta.diff(t),gamma.diff(t)]] for i in omegaE])
CE
```

Out[9]:

$$\begin{bmatrix} 0 & \cos(\alpha(t)) & \sin(\alpha(t))\sin(\beta(t)) \\ 0 & \sin(\alpha(t)) & -\sin(\beta(t))\cos(\alpha(t)) \\ 1 & 0 & \cos(\beta(t)) \end{bmatrix}$$

Bryła spadająca swobodnie - bąk swobodny (Eulera)

Zorientujmy osie układu bryły wzdłuż osi głównych momentu bezwładności. Współrzędne wektora prędkości kątowej w układzie bryły podlega równaniom:

$$\dot{\omega}_x = \omega_y \omega_z \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} \tag{22}$$

$$\dot{\omega}_y = \omega_z \omega_x \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} \tag{23}$$

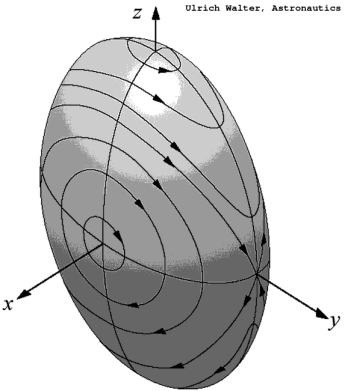
$$\dot{\omega}_z = \omega_x \omega_y \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} \tag{24}$$

Dodatkowo współrzędne wektora $\vec{\omega}$ wiążą zasady zachowania energii i pędu:

$$I_{xx}^2 \omega_x^2 + I_{yy}^2 \omega_y^2 + I_{zz}^2 \omega_z^2 = L^2 \tag{25}$$

$$I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2 = E_k^{(obr)} \tag{26}$$

Bryła spadająca swobodnie - bąk swobodny (Eulera)

Równania (25), (26) definiują dwie elipsoidy o tych samych osiach głównych. Wektor $\vec{\omega}$ musi pozostawać na jednowymiarowej rozmaitości będącej ich przecięciem (polhodii).

- ω jest rozwiązaniem stacjonarnym równań (22 - 24) wtedy i tylko wtedy, gdy leży na jednej z osi elipsoidy (jest wektorem własnym tensora bezwładności).
- Rozwiązania stacjonarne odpowiadające minimalnej i maksymalnej wartości własnej są stabilne, rozwiązanie odpowiadające pośredniej wartości własnej jest niestabilne.
- W przypadku gdy dwie wartości własne są zdegenerowane (bąk symetryczny swobodny), polhodie stają się okręgami, a ciało wykonuje precesję wokół osi niezdegenerowanej wartości własnej.