Matematyka dla AiR

Wykład 5: Mechanika Lagrange'a

Gniewomir Sarbicki

Zasada d'Alemberta w zmiennych uogólnionych

Załóżmy, że układ n cząstek ma k stopni swobody - jego przestrzeń konfiguracyjna jest rozmaitością k-wymiarową, więc lokalnie jest opisana przez k współrzędnych q_j:

$$x_i = x_i(q_1, \ldots, q_k) \tag{1}$$

Zasada d'Alemberta:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(m_i\ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i)\delta\vec{r}_i &= \sum_{i=1}^{3n}(m_i\ddot{x}_i - F_i)\delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{3n}(m_i\ddot{x}_i - F_i)\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j = 0\end{aligned} \tag{2}$$

Zauważając, że

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right) = \ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \dot{x}_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right) \tag{3}$$

Siły uogólnione

Przepisujemy (2) jako:

$$\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=0}^{3n} m_i\left(\frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)-\dot{x}_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)\right)-Q_j\right)\delta q_j=0 \tag{4}$$

gdzie wprowadziliśmy wielkości:

$$Q_j=\sum_{i=1}^{3n}F_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \tag{5}$$

nazywane *siłami uogólnionymi*.

$$\dot{x}_i=\sum_k\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\Rightarrow\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial\dot{q}_j}=\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \tag{6}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial q_j}=\sum_k\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k\partial q_j}\dot{q}_k=\frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \tag{7}$$

Dwuforma energii kinetycznej

Co pozwala zapisać (4) jako:

$$\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=0}^{3n} m_i\left(\frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j}\right)-\dot{x}_i\left(\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j}\right)\right)-Q_j\right)\delta q_j \tag{8}$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=0}^{3n} m_i\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j}\right)-\sum_{i=0}^{3n} m_i\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j}-Q_j\right)\delta q_j \tag{9}$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}-Q_j\right)\delta q_j=0, \tag{10}$$

gdzie

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{3n} m_i\dot{x}_i^2 \tag{11}$$

jest dwuformą energii kinetycznej.

Lagrangian

Ponieważ k przesunięć przygotowanych na powierzchni więzów jest niezależnych, dostajemy układ k równań

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \tag{12}$$

Nazywanych równaniami Lagrange'a II rodzaju
Jeżeli wśród sił działających na cząstkę są siły potencjalne, tzn. dające się wyrazić jako:

$$\vec{Q} = -\vec{\nabla}_{\vec{q}} V(q_1, \ldots, q_k) \qquad \left(\Rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} V(x_1, \ldots, x_{3n})\right), \tag{13}$$

To równania Lagrange'a możemy zapisać jako

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j, \tag{14}$$

gdzie funkcja $L = T - V$ nazywa się funkcją Lagrange'a (Lagrangianem), a po prawej stronie pozostaje wypadkowa sił niepotencjalnych.

Potencjał uogólniony

Zauważmy, że do Lagrangianu możemy włączyć również bardziej ogólne siły, takie które można wyrazić jako:

$$Q_j = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j} \tag{15}$$

gdzie funkcja $V(q_1, \ldots q_k, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_k)$ jest nazywana *potencjałem uogólnionym*.

Przykład: Na ciało rzucone w polu grawitacyjnym Ziemii oprócz siły ciężkości działa siła odśrodkowa i siła Coriolisa: $\vec{F} = m\vec{g} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$
$= m\left(\vec{g} + \omega^2\vec{r} - (\vec{r}\cdot\vec{\omega})\vec{\omega} - 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}\right)$.

$$V(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = m\left(gz - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 + \frac{1}{2}(\vec{\omega}\cdot\vec{r})^2 - \vec{\omega}\cdot(\dot{\vec{r}} \times \vec{r})\right)$$

Przykład - wahadło podwójne

Wahadło podwójne w płaszczyźnie ma 2 stopnie swobody (4 współrzędne kartezjańskie - 2 więzy od połaczeń prętowych). Naturalnym wyborem współrzędnych uogólnionych są kąty $\phi_1 \phi_2$ które tworzą pręty z pionem. Położenia mas wyrażają się przez kąty jako:

$$x_1 = l_1 \sin \phi_1 \qquad x_2 = x_1 + l_2 \sin \phi_2 \tag{16}$$

$$y_1 = -l_1 \cos \phi_1 \qquad y_1 = y_2 - l_2 \cos \phi_2 \tag{17}$$

Po zróżniczkowaniu:

$$\dot{x}_1 = l_1 \dot{\phi}_1 \cos \phi_1 \qquad \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l_2 \dot{\phi}_2 \cos \phi_2 \tag{18}$$

$$\dot{y}_1 = l_1 \dot{\phi}_1 \sin \phi_1 \qquad \dot{y}_1 = \dot{y}_2 + l_2 \dot{\phi}_2 \sin \phi_2 \tag{19}$$

Forma energii kinetycznej jest równa:

$$T = \frac{1}{2} \left(m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \right) \tag{20}$$

Przykład - wahadło podwójne

$$T = \frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2 \dot{\phi}_1^2 + m_2(l_1^2\dot{\phi}_1^2 + 2l_1 l_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) + l_2^2\dot{\phi}_2^2)\right) \tag{21}$$

$$= \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 & \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (m_1+m_2)l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) \\ m_2 l_1 l_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) & m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} \tag{22}$$

Energia potencjalna jest równa:
$V(\phi_1, \phi_2) = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = -m_1 g l_1 \cos\phi_1 - m_2 g(l_1 \cos\phi_1 + l_2 \cos\phi_2)$.
Funkcja Lagrange'a jest równa:

$$L = \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\phi}_1^2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{\phi}_2^2$$
$$+ (m_1+m_2) g l_1 \cos\phi_1 + m_2 g l_2 \cos\phi_2 \tag{23}$$

Przykład - wahadło podwójne

Otrzymujemy równania Lagrange'a:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_1} - \frac{\partial L}{\partial \phi_1} &= \frac{d}{dt}\left((m_1+m_2)l_1^2\dot{\phi}_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(\phi_2-\phi_1)\dot{\phi}_2\right) \\
&- m_2 l_1 l_2 \sin(\phi_2-\phi_1)\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 + (m_1+m_2)g l_1 \sin\phi_1 \\
&= (m_1+m_2)l_1^2\ddot{\phi}_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(\phi_2-\phi_1)\ddot{\phi}_2 \\
&- m_2 l_1 l_2 \sin(\phi_2-\phi_1)\dot{\phi}_2^2 + (m_1+m_2)g l_1 \sin\phi_1 = 0 \qquad (24) \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_2} - \frac{\partial L}{\partial \phi_2} &= \frac{d}{dt}\left(m_2 l_2^2\dot{\phi}_2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\phi_2-\phi_1)\dot{\phi}_1\right) \\
&+ m_2 l_1 l_2 \sin(\phi_2-\phi_1)\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 + m_2 g l_2 \sin\phi_2 \\
&= m_2 l_2^2\ddot{\phi}_2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\phi_2-\phi_1)\ddot{\phi}_1 \\
&+ m_2 l_1 l_2 \sin(\phi_2-\phi_1)\dot{\phi}_1^2 + m_2 g l_2 \sin\phi_2 = 0 \qquad (25)
\end{aligned}$$

Przykład - wahadło podwójne z oporami na przegubach

Przykład: Załóżmy dodatkowo, że na przegubach działa standardowa siła oporu proporcjonalne do prędkości kątowych. Nie jest to siła potencjalna, więc nie możemy jej włączyć do Lagrangianu. Musimy wrócić do równań Lagranga z niezerową prawą stroną (14). Równania z poprzedniego przykładu uzupełniamy o prawą stronę:

$$\begin{aligned}&(m_1+m_2)l_1^2\ddot{\phi}_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(\phi_2-\phi_1)\ddot{\phi}_2\\&- m_2 l_1 l_2 \sin(\phi_2-\phi_1)\dot{\phi}_2^2 + (m_1+m_2)g l_1 \sin\phi_1 = k_1\dot{\phi}_1\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}&m_2 l_2^2\ddot{\phi}_2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\phi_2-\phi_1)\ddot{\phi}_1\\&+ m_2 l_1 l_2 \sin(\phi_2-\phi_1)\dot{\phi}_1^2 + m_2 g l_2 \sin\phi_2 = k_2(\dot{\phi}_2-\dot{\phi}_1)\end{aligned} \tag{27}$$

Przykład - wahadła połączone prętem

Wróćmy do przykładu dwóch zawieszonych mas powiązanych prętem. Układ ten ma tylko jeden stopień swobody, ale wyrażenie położeń obu mas przez jeden tylko kąt jest bardzo trudne. Jeżeli masy nie byłyby połaczone, każda z nich opisana jest funkcją Lagrange'a wahadła $L_i = \frac{1}{2}m_i b^2 \dot{\phi}_i^2 + mgb\cos\phi_i$, która prowadzi do równania Lagrange'a: $m_i b^2 \ddot{\phi}_i^2 + m_i gb\sin\phi_i$. Kąty ϕ_1 i ϕ_2 wiąże równanie więzów: $b^2(\cos\phi_2 - \cos\phi_1)^2 + (b\sin\phi_1 + a + b\sin\phi_2)^2 = c^2$.
Wróćmy zatem do równania (10):

$$(m_1 b^2 \ddot{\phi}_1 + m_1 gb\sin\phi_1)\delta\phi_1 + (m_2 b^2 \ddot{\phi}_2 + m_2 gb\sin\phi_2)\delta\phi_2 = 0, \tag{28}$$

gdzie przesunięcia wirtualne spełniają warunek:

$$(b\sin(\phi_1 + \phi_2) + a\cos\phi_1)\,\delta\phi_1 + (b\sin(\phi_1 + \phi_2) + a\cos\phi_2)\,\delta\phi_2 = 0. \tag{29}$$

Przykład - wahadła połączone prętem

Łączymy równania (10) i (29) i otrzymujemy jedno równanie (bo jeden stopień swobody):

$$\begin{aligned}&(m_1 b^2 \ddot{\phi}_1 + m_1 g b \sin\phi_1)\,(b\sin(\phi_1+\phi_2) + a\cos\phi_2) - \\ &(m_2 b^2 \ddot{\phi}_2 + m_2 g b \sin\phi_2)\,(b\sin(\phi_1+\phi_2) + a\cos\phi_1) = 0\end{aligned} \tag{30}$$

Teraz trzeba wyeliminować jedną ze zmiennych (np. ϕ_1 i $\ddot{\phi}_1$) używając równania więzów i jego pochodnych.

Łatwiej będzie tego dokonać po wprowadzeniu nowych zmiennych $\phi_\pm = (\phi_1+\phi_2)/2$. Warunek więzów przyjmie wtedy postać $4b^2\sin^2\phi_+ + 4ab\sin\phi_+\cos\phi_- = c^2 - a^2$. Wprowadzając nowe zmienne w równaniu (30) będziemy mogli wyeliminować ϕ_- i jego pochodne.

Wróćmy do równań (24), (25). Możemy je przepisać jako:

$$\begin{bmatrix} (m_1+m_2)l_1 & m_2 l_2 \cos(\phi_2-\phi_1) \\ m_2 l_1 \cos(\phi_2-\phi_1) & m_2 l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_2 l_2 \sin(\phi_2-\phi_1)\dot{\phi}_2^2 - (m_1+m_2) g \sin\phi_1 \\ -m_2 l_1 \sin(\phi_2-\phi_1)\dot{\phi}_1^2 - m_2 g \sin\phi_2 \end{bmatrix} \tag{31}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{m_1 + m_2 \sin^2(\phi_2(t)-\phi_1(t))} \begin{bmatrix} \frac{1}{l_1} & -\frac{1}{l_1}\cos(\phi_2-\phi_1) \\ -\frac{1}{l_2}\cos(\phi_2-\phi_1) & \frac{m_1+m_2}{m_2}\frac{1}{l_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_2 l_2 \sin(\phi_2-\phi_1)\dot{\phi}_2^2 - (m_1+m_2) g \sin\phi_1 \\ -m_2 l_1 \sin(\phi_2-\phi_1)\dot{\phi}_1^2 - m_2 g \sin\phi_2 \end{bmatrix} \tag{32}$$

$$\ddot{\phi}_1 = \frac{m_2 \sin(\phi_2 - \phi_1)(l_2\dot{\phi}_2^2 + l_1 \cos(\phi_2 - \phi_1)\dot{\phi}_1^2 + g\cos\phi_2) - m_1 g \sin\phi_1}{l_1(m_1 + m_2 \sin^2(\phi_2(t) - \phi_1(t)))} \tag{33}$$

$$\ddot{\phi}_2 = \frac{\sin(\phi_1 - \phi_2)\left((m_1 + m_2)(g\cos\phi_1 + l\dot{\phi}_1^2) + m_2 l_2 \dot{\phi}_2^2 \cos(\phi_1 - \phi_2)\right)}{l_2(m_1 + m_2 \sin^2(\phi_2(t) - \phi_1(t)))} \tag{34}$$

$$\dot{\phi}_1 = \omega_1 \tag{35}$$

$$\dot{\phi}_2 = \omega_2 \tag{36}$$

$$\dot{\omega}_1 = \frac{m_2 \sin(\phi_2 - \phi_1)(l_2\omega_2^2 + l_1 \cos(\phi_2 - \phi_1)\omega_1^2 + g\cos\phi_2) - m_1 g \sin\phi_1}{l_1(m_1 + m_2 \sin^2(\phi_2(t) - \phi_1(t)))} \tag{37}$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{\sin(\phi_1 - \phi_2)\left((m_1 + m_2)(g\cos\phi_1 + l\omega_1^2) + m_2 l_2 \omega_2^2 \cos(\phi_1 - \phi_2)\right)}{l_2(m_1 + m_2 \sin^2(\phi_2(t) - \phi_1(t)))} \tag{38}$$

In [1]:
```
from sympy import *
from IPython.display import display, Math, Latex, HTML
display(HTML("<style>.container { width:95% !important; }</style>"))
init_printing()
```

In [2]:
```
m1,m2,l1,l2,g,t = symbols('m_1,m_2,l_1,l_2,g,t')
phi1=Function('phi_1')(t)
phi2=Function('phi_2')(t)
L = Rational(1,2)*(m1+m2)*l1**2*phi1.diff(t)**2 + m2*l1*l2*cos(phi1-phi2)*phi1.diff(t)*phi2.diff(t) + Rational(1,2)*m2*l2**2*phi2.diff(t)**2+ (m1+m2)*g*l1*cos(phi1)+m2*g*l2*cos(phi2)
L
```

Out[2]:

$$g l_1 (m_1 + m_2)\cos(\phi_1(t)) + g l_2 m_2 \cos(\phi_2(t)) + l_1^2 \left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2}\right)\left(\frac{d}{dt}\phi_1(t)\right)^2 + l_1 l_2 m_2 \cos(\phi_1(t) - \phi_2(t))\frac{d}{dt}\phi_1(t)\frac{d}{dt}\phi_2(t) + \frac{l_2^2 m_2 \left(\frac{d}{dt}\phi_2(t)\right)^2}{2}$$

In [3]:
```
RL1 = simplify(L.diff(phi1.diff(t)).diff(t) - L.diff(phi1))/l1
RL1
```

Out[3]:

$$g m_1 \sin(\phi_1(t)) + g m_2 \sin(\phi_1(t)) + l_1 m_1 \frac{d^2}{dt^2}\phi_1(t) + l_1 m_2 \frac{d^2}{dt^2}\phi_1(t) + l_2 m_2 \sin(\phi_1(t) - \phi_2(t))\left(\frac{d}{dt}\phi_2(t)\right)^2 + l_2 m_2 \cos(\phi_1(t) - \phi_2(t))\frac{d^2}{dt^2}\phi_2(t)$$

In [4]:
```
RL2 = simplify(L.diff(phi2.diff(t)).diff(t) - L.diff(phi2))/l2
RL2
```

Out[4]:

$$m_2 \left(g \sin(\phi_2(t)) - l_1 \sin(\phi_1(t) - \phi_2(t))\left(\frac{d}{dt}\phi_1(t)\right)^2 + l_1 \cos(\phi_1(t) - \phi_2(t))\frac{d^2}{dt^2}\phi_1(t) + l_2 \frac{d^2}{dt^2}\phi_2(t)\right)$$

In [5]:
```
from sympy.solvers import solve
solve((RL1,RL2),phi1.diff(t,2),phi2.diff(t,2))
```

Out[5]:

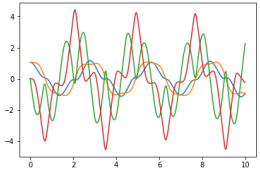
$$\left\{\frac{d^2}{dt^2}\phi_1(t) : \frac{g m_1 \sin(\phi_1(t)) + \frac{g m_2 \sin(\phi_1(t) - 2\phi_2(t))}{2} + \frac{g m_2 \sin(\phi_1(t))}{2} + \frac{l_1 m_2 \sin(2\phi_1(t) - 2\phi_2(t))\left(\frac{d}{dt}\phi_1(t)\right)^2}{2} + l_2 m_2 \sin(\phi_1(t) - \phi_2(t))\left(\frac{d}{dt}\phi_2(t)\right)^2}{l_1 \left(-m_1 + m_2 \cos^2(\phi_1(t) - \phi_2(t)) - m_2\right)}, \frac{d^2}{dt^2}\phi_2(t) : \frac{(m_1 + m_2)\left(g \sin(\phi_2(t)) - l_1 \sin(\phi_1(t) - \phi_2(t))\left(\frac{d}{dt}\phi_1(t)\right)^2\right) - \left(g m_1 \sin(\phi_1(t)) + g m_2 \sin(\phi_1(t)) + l_2 m_2 \sin(\phi\right.}{l_2 \left(-m_1 + m_2 \cos^2(\phi_1(t) - \phi_2(t)) - m_2\right)}\right.$$

In [2]:
```
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
from IPython.display import display, Math, Latex, HTML
display(HTML("<style>.container { width:95% !important; }</style>"))
#init_printing()
```

In [5]:
```
m1 = 1; m2 = 1.25; l1 = .8; l2 = 1.2; g = 9.81
def pole(punkt,t):
    phi1,phi2,omega1,omega2 = punkt
    s21 = np.sin(phi2-phi1)
    c21 = np.cos(phi2-phi1)
    d = m1+m2*s21**2
    return [omega1,omega2,(m2*s21*(l2*omega2**2+l1*c21*omega1**2+g*np.cos(phi2))-m1*g*np.sin(phi1))/(l1*d),
            -s21*((m1+m2)*(g*np.cos(phi1)+l1*omega1**2)+m2*l2*omega2**2*c21)/(l2*d)]
```

In [6]:
```
t = np.arange(0,10,.01)
y = odeint(pole,[np.pi/3,np.pi/3,0,0],t)
```

In [7]:
```
plt.plot(t,y)
plt.show()
```



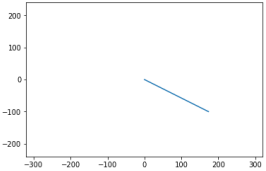
In [14]:
```
from matplotlib.animation import FuncAnimation

fig, ax = plt.subplots()
w1, = ax.plot([0,80*np.sin(np.pi/3),80*np.sin(np.pi/3)+120*np.sin(np.pi/3)],[0,-80*np.cos(np.pi/3),-80*np.cos(np.pi/3)-120*np.cos(np.pi/3)])

def anim(i):
    w1.set_xdata([0,80*np.sin(y[i,0]),80*np.sin(y[i,0])+120*np.sin(y[i,1])])
    w1.set_ydata([0,-80*np.cos(y[i,0]),-80*np.cos(y[i,0])-120*np.cos(y[i,1])])

a = FuncAnimation(fig,anim,range(len(y)),interval = 10)
ax.set_xlim([-320,320])
ax.set_ylim([-240,240])
```

Out[14]: (-240, 240)



In [15]:
```
HTML(a.to_html5_video())
```