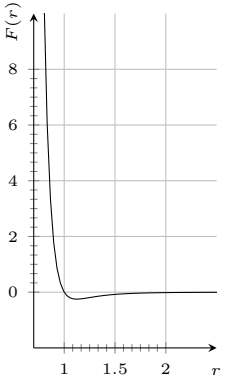
Mechanika dla AiR

Wykład 4: Układy nieswobodne

Gniewomir Sarbicki

Siły reakcji

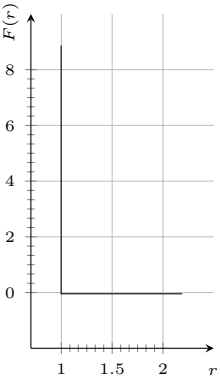


Siły van der Waalsa:

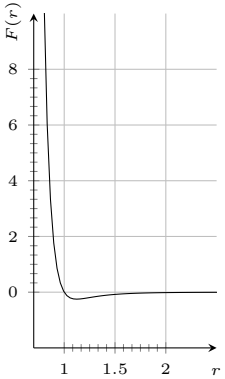
$$F(r) = \left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{6}$$

- Dla $r > r_0$ dominuje $(r_0/r)^6$ - przyciąganie indukowanych dipoli.
- Dla $r < r_0$ dominuje $(r_0/r)^{12}$ - odpychanie chmur elektronowych z zakazu Pauliego.

w dużej skali →



Siły reakcji

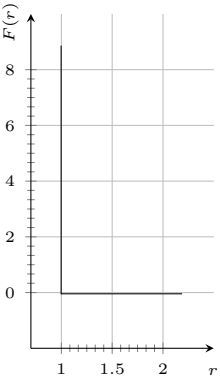


Siły van der Waalsa:

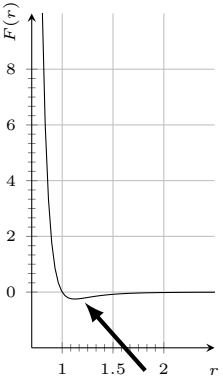
$$F(r) = \left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{6}$$

- Dla $r > r_0$ dominuje $(r_0/r)^6$ - przyciąganie indukowanych dipoli.
- Dla $r < r_0$ dominuje $(r_0/r)^{12}$ - odpychanie chmur elektronowych z zakazu Pauliego.

w dużej skali →



Siły reakcji

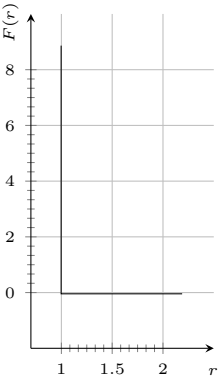


Siły van der Waalsa:

$$F(r) = \left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{6}$$

- Dla $r > r_0$ dominuje $(r_0/r)^6$ - przyciąganie indukowanych dipoli.
- Dla $r < r_0$ dominuje $(r_0/r)^{12}$ - odpychanie chmur elektronowych z zakazu Pauliego.

w dużej skali →



Więzy

Definicja:

Więzami nazywamy warunki które muszą spełniać położenia i prędkości cząstek układu podczas ruchu.

Więzy dzielimy na:

- dwustronne - równościowe (pręt), jednostronne - nierównościowe (nić, ściana stołu bilardowego)
- skleronomiczne (niezależne od czasu) i reonomiczne (zależne od czasu)
- geometryczne (zależne tylko od położeń) i kinematyczne (zależne również od wyższych pochodnych, rząd najwyższej pochodnej - rząd więzu, będziemy rozpatrywać więzy najwyżej pierwszego rzędu)

Więzy

- holonomiczne - gdy więzy są geometryczne, albo są pochodną po czasie więzów geometrycznych (są całkowalne), nieholonomiczne - prawdziwie kinematyczne (niecałkowalne)
- Więzy geometryczne dzielimy na idealne (siła reakcji prostopadła do powierzchni więzów) i nieidealne (składową styczną siły reakcji nazywamy tarciem).

Przykłady więzów

- **Więzy holonomiczne, skleronomiczne**: Koralik na drucie w kształcie paraboli
- **Więzy holonomiczne, reonomiczne**: Koralik na drucie w kształcie paraboli, obracającej się dookoła swojej osi
- **Więzy nieholonomiczne, skleronomiczne**: Tłok w cylindrze wahliwym - prędkość tłoka musi mieć kierunek zgodny z kątem obrotu cylindra
- **Więzy nieholonomiczne, skleronomiczne, jednostronne**: punkt materialny zsuwający się po powierzchni półsfery - przy przekroczeniu pewnej prędkości oderwałby się od powierzchni więzów

Równania Newtona układu cząstek z więzami

Równania Newtona układu cząstek z więzami

$$\forall i \; m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^Z(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i) + \sum_j \vec{F}_{ij}^W(\vec{r}_i, \vec{r}_j) + \vec{R}_i^Z(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i) + \sum_j \vec{R}_{ij}^W(\vec{r}_i, \vec{r}_j), \tag{1}$$

Siły reakcji więzów (węwnętrznych i zewnętrznych) nie mają prostych wzorów, zależą od położeń i prędkości i przyjmują taką wartość, jaka jest potrzebna, by spełnić warunki więzów.

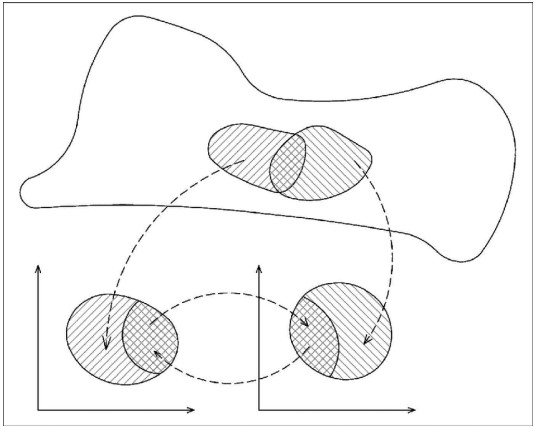
Przykład: Siła reakcji cylindrycznej podłogi jest zawsze taka, by wypadkową siłą była siłą dośrodkowa.

Definicja rozmaitości

Definicja:

Rozmaitością nazywamy zbiór wyglądający lokalnie jak podzbiór $\mathbb{R}^n$, precyzyjniej:

- Każdy punkt rozmaitości y posiada otoczenie otwarte $V \ni y$ będące obrazem pewnego podzbioru $U \subset \mathbb{R}^n$ w odwracalnej (1-1) funkcji ϕ (mapa).
- Na przecięciu obszarów dwóch map, funkcja $\phi_2^{-1} \circ \phi_1 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ jest gładka (klasy C^∞, wszystkie pochodne ciągłe).



Sposoby definiowania rozmaitości

Sfera $S^2(R,0) \subset \mathbb{R}^3$ jest przykładem rozmaitości. Rozmaitość możemy zdefiniować:

- bezpośrednio jak w definicji, poprzez podanie mapy:

$$x = R\sin\theta\cos\phi$$
$$y = R\sin\theta\sin\phi$$
$$z = R\cos\theta$$

  przypisującej punktowi na mapie (ϕ - długość geograficzna, θ - szerokość geograficzna) punkt na sferze,

- lub jako miejsce zerowe zbioru warunków (w tym przypadku jednego):

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

Zasada d'Alemberta

Definicja:

Przesunięciem przygotowanym nazywamy infintezymalne przesunięcie zgodne z więzami. Oznaczamy je jako $\delta\vec{r}$. Jest ono infintezymalnym wektorem stycznym do rozmaitości więzów.

Jeżeli k-wymiarowa rozmaitość więzów w $\mathbb{R}^n$ zadana jest przez $n-k$ warunków $f_i(x_1,\ldots,x_n)=0$, to przesunięcie przygotowane musi spełniać warunek: $\forall i \in \{1,\ldots,k\}\ \delta\vec{r}\cdot\vec{\nabla}f_i = 0$.

Zasada d'Alemberta:

$$\sum_{i=1}^{n=3N} \left(m_i\ddot{x}_i - F_i\right)\delta x_i = 0$$

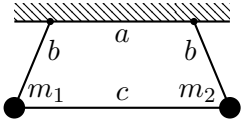
Zasada d'Alemberta

Jeżeli układ jest skrępowany więzami dwustronnymi idealnymi, to praca sił działających w układzie (bez sił reakcji) jest równa pracy sił bezwładności.

(*zasada prac wirtualnych*).

W zasadzie a'Alemberta mamy tylko jedno równanie skalarne, ale które musi być spełnione dla wszystkich możliwych przesunięć wirtualnych. Niezależnych przesunięć jest tyle ile wynosi wymiar rozmaitości więzów: $n - k$. Liczbę tę nazywamy liczbą stopni swobody układu.

Zasada d'Alemberta



Rozważmy płaski układ dwóch mas m_1 i m_2 połączonych prętem o długości c i podwieszonych na prętach o długości b. Odległość między punktami zawieszenia wynosi a.

Na współrzędne mas x_1, y_1, x_2, y_2 nałożone są więzy:

$$\vec{f}(x_1, y_1, x_2, y_2) = \begin{bmatrix} x_1^2 + y_1^2 - b^2 \\ (x_2 - a)^2 + y_2^2 - b^2 \\ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - c^2 \end{bmatrix} = \vec{0} \tag{2}$$

Przesunięcia wirtualne spełniają zatem układ równań:

$$\vec{\nabla} \vec{f} \cdot \delta \vec{r} = 2 \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 - a & y_2 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta y_1 \\ \delta x_2 \\ \delta y_2 \end{bmatrix} = \vec{0} \tag{3}$$

Zasada d'Alemberta

Zasada d'Alemberta mówi, że

$$m_1\ddot{x}_1\delta x_1 + (m_1\ddot{y}_1 - m_1 g)\delta y_1 + m_2\ddot{x}_2\delta x_2 + (m_2\ddot{y}_2 - m_2 g)\delta y_2 = 0$$

(oś y skierowana w dół). Z układu (3) wyrażamy δy_1, δx_2 i δy_2 przez δx_1 i po wstawieniu to powyższego równania dostajemy:

$$\begin{aligned} &m_1\left(y_1(x_2-a) - y_2(x_1-a)\right)\left(y_1\ddot{x}_1 - (\ddot{y}_1 - g)x_1\right) \\ &-m_2\left(y_2x_1 - y_1x_2\right)\left(y_2\ddot{x}_2 - (\ddot{y}_2 - g)(x_2-a)\right) = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Różniczkując pierwszy i drugi wiąz otrzymamy:

$$y_1 = \sqrt{b^2 - x_1^2} \qquad \ddot{y}_1 = -\frac{b^2\dot{x}_1^2 + x_1\ddot{x}_1(b^2 - x_1^2)}{\sqrt{b^2 - x_1^2}^3} \tag{5}$$

$$y_2 = \sqrt{b^2 - (x_2-a)^2} \qquad \ddot{y}_2 = -\frac{b^2\dot{x}_2^2 + (x_2-a)\ddot{x}_2(b^2 - (x_2-a)^2)}{\sqrt{b^2 - (x_2-a)^2}^3} \tag{6}$$

Zasada d'Alemberta

Po wstawieniu do (4):

$$\left(\sqrt{b^2-x_1^2}(x_2-a)-\sqrt{b^2-(x_2-a)^2}(x_1-a)\right)\left(b^2\frac{(b^2-x_1^2)\ddot{x}_1+x_1\dot{x}_1^2}{\sqrt{b^2-x_1^2}^3}+gx_1\right)$$
$$-\left(\sqrt{b^2-(x_2-a)^2}x_1-\sqrt{b^2-x_1^2}x_2\right)$$
$$\left(b^2\frac{(b^2-(x_2-a)^2)\ddot{x}_2+(x_2-a)\dot{x}_2^2}{\sqrt{b^2-(x_2-a)^2}^3}+g(x_2-a)\right)=0 \tag{7}$$

Zasada d'Alemberta

Po wyeliminowaniu y_1 i y_2 z trzeciego równania więzów przyjmie ono postać:

$$(b^2 + a^2 - 2ax_1)x_2^2 + (2ax_1^2 - (2b^2 - a^2 - c^2)x_1 - a(b^2 + a^2 + c^2))x_2 + \left(\frac{a^2 + c^2}{4} - b^2c^2 - a^2x_1^2\right) = 0 \qquad (8)$$

Wyznaczamy z niego x_2 (uwaga na jednoznaczność - po rozprzegnięciu pręta łączącego możemy złożyć mechanizm na dwa sposoby), a następnie dwukrotnie różniczkując ten wzór otrzymamy wzór na $\ddot{x}_2$. Możemy teraz wyeliminować x_2 i $\ddot{x}_2$ z (7) i otrzymać równanie różniczkowe drugiego rzędu na jedną funkcję $x_1(t)$ (układ z jednym stopniem swobody).

równania Lagrange'a I rodzaju

Zasada d'Alemberta:

$$\sum_{i=1}^{n=3N} \left(m_i \ddot{x}_i - F_i\right) \delta x_i = 0, \tag{9}$$

$$\nabla \vec{f}_k \cdot \delta \vec{r} = 0. \tag{10}$$

W warunku (10) zakładamy, że macierz gradientu jest rzędu pełnego $= k$ (wyznaczalność sił reakcji) więc jest tylko $n - k$ niezależnych δx_i.
Mnożymy każdy z warunków (10) przez λ_k i łączymy je z równaniami (9):

$$\sum_{i=1}^{n=3N} \left(m_i \ddot{x}_i - F_i - \sum_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i}\right) \delta x_i = 0 \tag{11}$$

Teraz możemy uważać δx_i za dowolne, a za spełnianie warunków odpowiadają mnożniki λ_k przyjmujące odpowiednie wartości.

równania Lagrange'a I rodzaju

Otrzymujemy zatem układ n niezależnych równań:

równania Lagrange'a pierwszego rodzaju

$$m_i \ddot{x}_i = F_i + \sum_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i},$$

nazywanych *równaniami Lagrange'a pierwszego rodzaju* z k niewiadomymi funkcjami λ_k.

Wyraz $\lambda_k \partial_{x_i} f_k$ jest i-tą składową k-tej siły reakcji więzów.

równania Lagrange'a I rodzaju

Równania Lagrange'a pierwszego rodzaju pozwalają wyznaczać siły reakcji więzów (potrzebne w obliczeniach wytrzymałościowych).

Przykład - wahadło: Wahadło spełnia równanie więzów: $x^2 + y^2 - R^2 = 0$. Gradient tego równania wprowadza jedną siłę reakcji $\lambda[x, y]$ do równania Newtona.

Otrzymujemy równania Lagrange'a pierwszego rodzaju:

$$m\ddot{x} = \lambda x \tag{12}$$

$$m\ddot{y} = \lambda y - mg \tag{13}$$

Mnożymy pierwsze równanie przez x, a drugie przez y i dodajemy stronami. Następnie obustronnie dodajemy $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$ i zauważamy, że lewa strona jest równa zero, jako druga pochodna warunku więzów. Otrzymujemy:

$$\lambda = -\frac{mv^2}{R^2} + \frac{mg}{R^2}y$$

zasady zachowania w układach związanych

Zauważmy, że w przykładzie z wahadłem pęd w kierunku osi x przestaje być stałą ruchu, mimo, że przed nałożeniem więzów był (siła reakcji ma składową poziomą). Więzy (nawet idealne holonomiczne) mogą niszczyć zachowanie pędu.

Rozważmy ciało podlegające działaniu siły centralnej (np. grawitacyjnej GMm/r^2), którego ruch ograniczony jest do linii prostej. Możemy sprawdzić, że moment pędu przestaje być zachowany (siła reakcji ma niezerowy moment).

W obu powyższych przypadkach energia pozostanie stałą ruchu - siła reakcji jest prostopadła do powierzchni więzów, więc nie wykonuje żadnej pracy. Pozostanie to prawdą dla dowolnych więzów holonomicznych idealnych i skleronomicznych.

W przypadku więzów nieidealnych tarcie odbiera energię z układu

W przypadku więzów reonomicznych, tor układu nie pokrywa się z powierzchnią więzów w danej chwili czasu, zatem nawet dla idealnych więzów holonomicznych, jeżeli zależą one od czasu siła ich reakcji nie jest prostopadła do prędkości układu i może odbierać lub pompować energię do układu (układ nieautonomiczny).