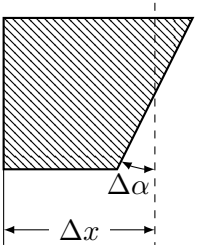
Mechanika dla AiR

Wykład 3: Fale w układach mechanicznych

Gniewomir Sarbicki

Rozważmy mały fragment zginanej belki:



Na odcinku Δx pojawi się moment siły:

$$M = -EI\frac{\operatorname{tg}\Delta\alpha}{\Delta x} \tag{1}$$

Kąt α to nachylenie linii ugięcia belki $y(x)$.
W granicy małych kątów:
$\operatorname{tg}\Delta\alpha \approx \Delta\operatorname{tg}\alpha = \Delta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \approx \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Delta x$.

Stąd w granicy:

$$M = -EI\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} \tag{2}$$

Przyrost momentu na odcinku Δx to $F(x)\Delta x$, stąd

$$F = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = -EI\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} \tag{3}$$

Otrzymaliśmy siłę działającą na element przekroju wywołaną zgięciem belki (w statyce jest ona równoważona przez obciążenie i otrzymujemy równanie linii ugięcia).

W sytuacji dynamicznej linia ugięcia zmienia się w czasie, i z drugiej zasady dynamiki mamy:

$$m_{\Delta x} a_{\Delta x} = \rho S \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -EI \left(\left. \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \right|_{x+\Delta x} - \left. \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \right|_{x} \right) + F_{\Delta x} = -EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \Delta x + P \Delta x, \tag{4}$$

gdzie P to liniowa gęstość obciążenia poprzecznego belki.

Po podzieleniu przez Δx otrzymamy równanie różniczkowe drgań poprzecznych belki:

$$\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = P \tag{5}$$

(przy założeniu stałego momentu bezwładności I przekroju).

Od tej chwili rozważań będziemy drgania belek nie obciążonych, tzn. $P = 0$.

Każde rozwiązanie $y(x,t)$ da się rozłożyć na kombinacje rozwiązań o rozseparowanych zmiennych: $y(x,t) = X(x)T(t)$. Szukamy takich rozwiązań:

$$\frac{T^{(2)}}{T} = -\frac{EI}{\rho S}\frac{X^{(4)}}{X} \tag{6}$$

Znajdujemy rozwiązanie ogólne:

$$T = A\sin(\omega t + \phi_t) \tag{7}$$

$$X = B_1 \mathrm{sh}\,(kx) + B_2 \mathrm{ch}\,(kx) + C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx) \tag{8}$$

gdzie $k = \sqrt[4]{\frac{\rho S \omega^2}{EI}}$.

Dopuszczalne wartości ω znajdziemy z warunków brzegowych.

Belka swobodnie podparta:

$$y(0) = y(l) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X(0) = X(l) = 0 \tag{9}$$

$$M(0) = M(l) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X^{(2)}(0) = X^{(2)}(l) = 0 \tag{10}$$

$$. \tag{11}$$

Z (9) i (10) dostajemy:

$$B_1 = B_2 = C_2 = 0, \qquad kl = m\pi \tag{12}$$

Rozwiązanie ogólne jest kombinacją tak znalezionych rozwiązań:

$$y(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin\left(\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}t + \phi_t\right) \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) \tag{13}$$

W chwili $t = 0$ kształt linii ugięcia zadany jest znaną funkcją $y_0(x)$. Porównujemy go z naszym rozwiązaniem:

$$y_0(x) = \sin\phi_i \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) \tag{14}$$

Obliczmy całkę:

$$\int_0^l \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^l \cos\left((n-m)\pi\frac{x}{l}\right)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^l \cos\left((n+m)\pi\frac{x}{l}\right)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{gdy} \quad n \neq m \\ \frac{1}{2}l & \text{gdy} \quad n = m \end{cases} \tag{15}$$

Pomnóżmy obustronnie (14) przez $\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$ i wycałkujmy po $[0, l]$. Otrzymamy:

$$A_n = \frac{2}{l\sin\phi_t}\int_0^l y_0(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x \tag{16}$$

Belka obustronnie utwierdzona - warunki brzegowe mają teraz postać:

$$X(0) = X(l) = 0 \tag{17}$$

$$X^{(1)}(0) = X^{(1)}(l) = 0 \tag{18}$$

Otrzymamy układ równań:

$$B_1 + C_1 = 0 \tag{19}$$

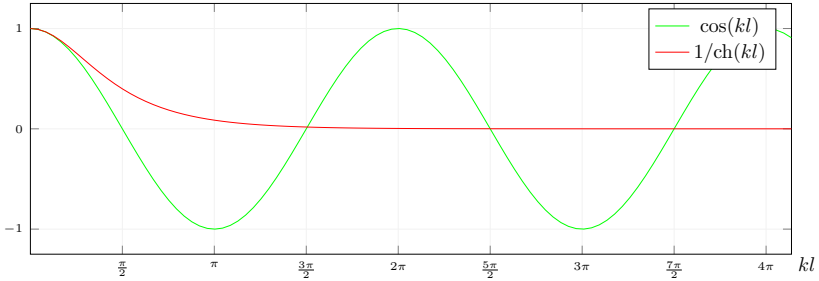
$$B_2 + C_2 = 0 \tag{20}$$

$$\mathrm{sh}(kl)B_1 + \mathrm{ch}(kl)B_2 + \sin(kl)C_1 + \cos(kl)C_2 = 0 \tag{21}$$

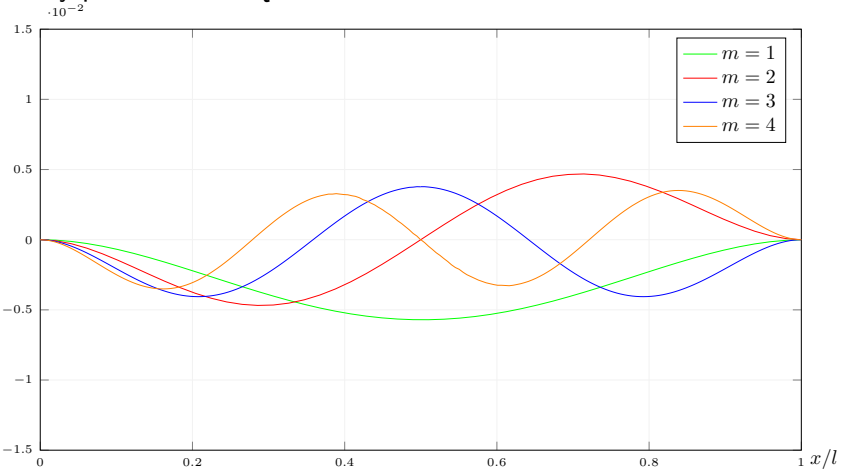
$$\mathrm{ch}(kl)B_1 + \mathrm{sh}(kl)B_2 + \cos(kl)C_1 - \sin(kl)C_2 = 0 \tag{22}$$

Układ ten ma niezerowe rozwiązanie wtw gdy jego wyznacznik jest równy 0, czyli:

$$\cos(kl)\mathrm{ch}(kl) = 1 \tag{23}$$



Z wykresu widzimy, że $kl \approx \frac{2m+1}{2}\pi, m \in \mathbb{Z}_+$. Otrzymujemy rozwiązanie ogólne:

$$y(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \left(\frac{\mathrm{sh}(kx) - \sin(kx)}{\mathrm{sh}\left(\frac{2m+1}{2}\pi\right) - \sin\left(\frac{2m+1}{2}\pi\right)} - \frac{\mathrm{ch}(kx) - \cos(kx)}{\mathrm{ch}\left(\frac{2m+1}{2}\pi\right)} \right) \tag{24}$$

Cztery pierwsze rozwiązania: