Mechanika dla AiR

Wykład 2: Drgania

Gniewomir Sarbicki

Drgania nietłumione: $m\ddot{x} + kx = 0$

Współczynnik sztywności sprężyny śrubowej o n zwojach, średnicy D, wykonanej z drutu o średnicy d wykonanej z materiału o współczynniku Kirchoffa G jest równy:

$$k = \frac{Gd^4}{8D^3n} \tag{1}$$

Współczynnik sztywności sprężyny płaskiej jednostronnie utwierdzonej wykonanej z materiału o module Younga E, o długości l i momencie bezwładności przekroju I wzgl osi neutralnej jest równy :

$$k = \frac{3EI}{l^3} \tag{2}$$

($\Leftarrow$ *wzór na strzałkę ugięcia z poprzedniego semestru*)

W drganiach skrętnych: $I\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + k\varphi = 0$ współczynnik sztywności wału wykonanego z materiału o module Kirchoffa G, długości l i biegunowym momencie bezwładności przekroju I jest równy:

$$k = \frac{GI}{l} \tag{3}$$

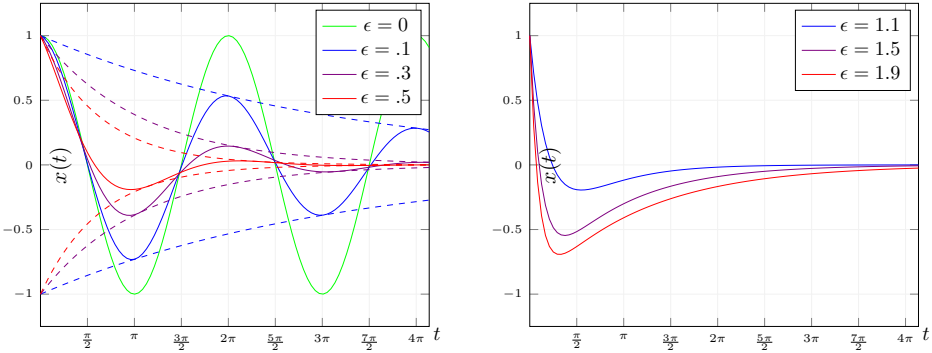
Współczynnik sztywności sprężyny spiralnej z materiału o module Younga E, momencie bezwładności przekroju I i długości L:

$$k = 2\pi \frac{EI}{L} \tag{4}$$

Drgania tłumione: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$

$$\begin{cases} x = Ae^{-\epsilon\omega_0 t}\sin(\sqrt{1-\epsilon^2}\omega_0 t + \phi) & \text{gdy} \quad \epsilon < 1, \\ x = Ae^{(-\epsilon+\sqrt{\epsilon^2-1})\omega_0 t} + Be^{(-\epsilon-\sqrt{\epsilon^2-1})\omega_0 t} & \text{gdy} \quad \epsilon > 1 \quad \text{(tłumienie nadkrytyczne)}, \end{cases} \tag{5}$$

gdzie $\epsilon = \frac{b}{b_{cr}}, b_{cr} = 2\sqrt{mk}$.



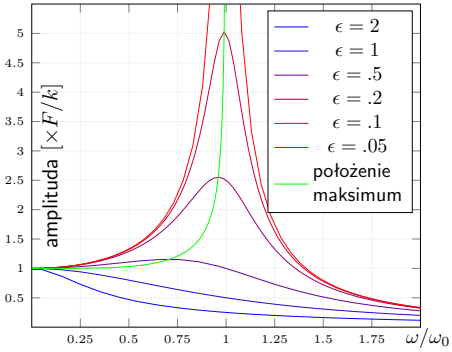
Tłumienie:

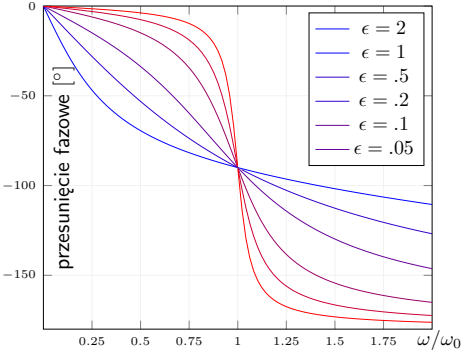
- tarcie wewnętrzne - histereza krzywej sprężystości
- tarcie powierzchni (tarcie Culomba, tarcie suche), nie zależne od wartości prędkości
- tarcie wiskotyczne - proporcjonalne do prędkości, związane z lepkością cieczy i gazów
- opór czołowy (tarcie hydrodynamiczne) - zależne od kwadratu prędkości.

Zależnośc od prędkości tarcia smarowanych - krzywa Stribecka

Drgania wymuszone dynamicznie: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F\sin(\omega t)$

$$x = \frac{F/k}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4\epsilon^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \sin\left(\omega t - \operatorname{arc\,tg}\frac{2\epsilon\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right) \tag{6}$$





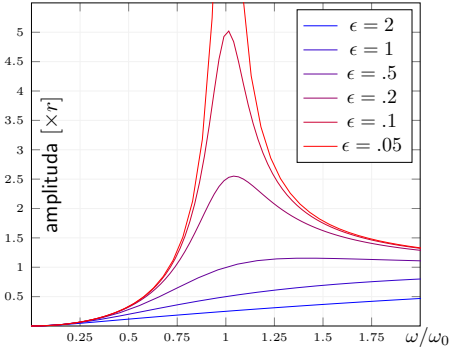
Maksimum wzbudzenia występuje dla $\omega = \omega_0\sqrt{1-2\epsilon^2}$. Dla $\epsilon > \sqrt{2}/2$ ($b > b_{cr}/\sqrt{2}$) maksimum wzbudzenia nie istnieje i amplituda drgań wzbudzonych maleje monotonicznie wraz z ω.

Dla dużych ω, amplituda zachowuje się jak

$$A_\omega = \frac{F\omega_0^2}{k\omega^2} \tag{7}$$

Gdy masą m jest silnik, a siłą wymuszającą jest siła odśrodkowa $m_W\omega^2 r$ pochodząca od niewyważonego wału o masie m_W i ekscentryczności r, wtedy w granicy $\omega \to \infty$ mamy skończoną amplitudę drgań wzbudzonych:

$$A_\infty = \frac{m_W}{m}r = \frac{m_W\omega_0^2 r}{k} \tag{8}$$

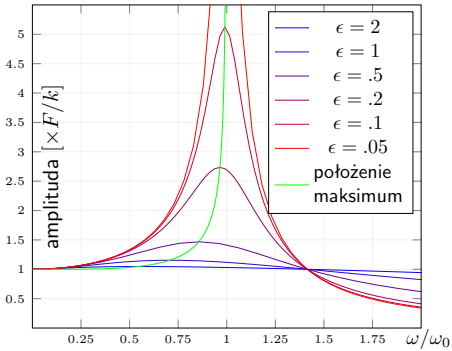


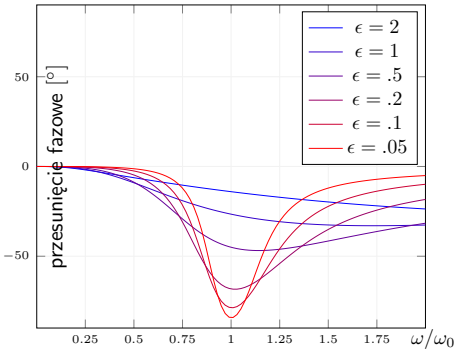
Maksimum wzbudzenia dla $\omega = \omega_0$, niezależnie od tłumienia.

Drgania wymuszone kinematycznie: $m\ddot{x} = -b(\dot{x} - \dot{y}) - k(x - y)$, gdzie $y = C \sin \omega t$.

Rozwiązujemy: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = kC \sin \omega t + b\omega C \cos \omega t$:

$$x = C \sqrt{\frac{1 + 4\epsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4\epsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \sin \left(\omega t - \operatorname{arc\,tg} \frac{2\epsilon \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^3}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2} \right) \tag{9}$$

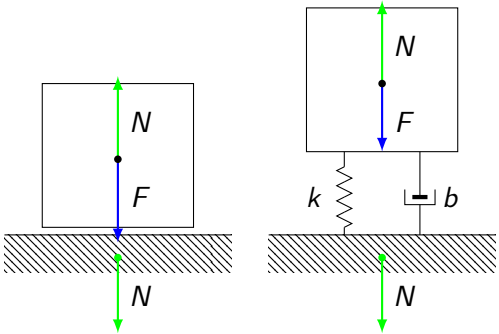




Krzywe rezonansowe dla wszystkich tłumień przecinają się dla $\omega/\omega_0 = \sqrt{2}$.

Dla tłumienia ϵ maksimum wzmocnienia w punkcie $\omega/\omega_0 = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+8\epsilon^2}}{4\epsilon^2}}$.

Załóżmy, że ma środek ciężkości maszyny posadowionej na fundamencie działa siła okresowa o amplitudzie F. Na fundament przenoszona jest siła $N = F$.



Jeżeli posadowimy maszynę na podkładkach sprężystych o współczynniku sztywności k i tłumienności b siła reakcji podłoża N będzie równa:

$$N(t) = kx + b\dot{x} = F\frac{\sin(\omega t) + \omega b/k\cos(\omega t)}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4\epsilon^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \tag{10}$$

Jej amplituda jest równa:

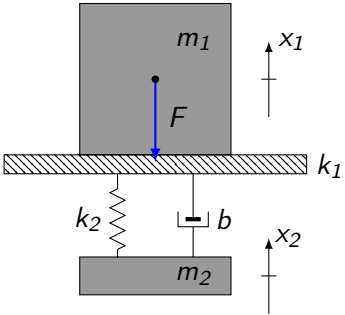
$$N_{max} = F\frac{\sqrt{1+(\omega b/k)^2}}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4\epsilon^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = F\frac{\sqrt{1+4\epsilon^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4\epsilon^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \tag{11}$$

Warunek wibroizolacji zachodzi, gdy amplituda siły F jest mnożona przez czynnik mniejszy od 1. Zachodzi to, gdy:

$$\omega_0 < \omega/\sqrt{2} \tag{12}$$

Gdy $\omega_0 \to \infty$ mamy $N_{max} = F$. Odpowiada to brakowi podkładek. W przypadku zastosowania zbyt sztywnych podkładek (niespełnienia warunku (12)) amplituda nacisku na fundament przekroczy amplitudę siły F.

Rozważmy maszynę podpartą na podporze o współczynniku sztywności k_1 z tłumikiem dynamicznym (eliminatorem drgań) - masą podwieszoną na sprężynie o współczynniku sztywności k_2 i współczynniku tłumienia b. Na maszynę działa siła harmoniczna o amplitudzie F:



$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = F\sin(\omega t) - k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) - b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\ m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) - b(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \end{cases} \tag{13}$$

Szukamy rozwiązania postaci:

$$x_i(t) = A_i\sin(\omega t) + B_i\cos(\omega t) \tag{14}$$

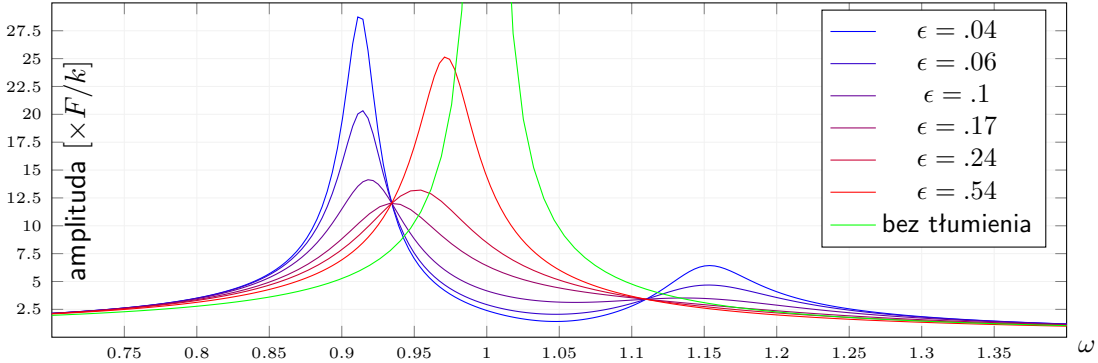
Otrzymujemy wzór na amplitudę drgań masy m_1:

$$X_1 = \frac{F}{k_1}\sqrt{\frac{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right)^2 + 4\epsilon^2\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}{\left(\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right) - \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right)^2 + 4\epsilon^2\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\left(1-\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right)^2}}, \tag{15}$$

gdzie:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}, \quad \epsilon = \frac{b}{b_{cr}}, \quad b_{cr} = 2\sqrt{m_2 k_2}.$$

Amplituda drgań dla stosunku mas $\frac{m_2}{m_1} = .05$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1.05$.



Wszystkie krzywe przecinają się w dwóch punktach. Wybór $\epsilon = .17$ daje krzywą o maksimum w jednym z tych punktów i najlepsze tłumienie drgań w całym zakresie częstotliwości.