# Matematyka dla AiR

## Wykład 1: Mechanika Newtona układu cząstek swobodnych

Gniewomir Sarbicki

# Literatura


- W.Rubinowicz, W.Królikowski *Mechanika Teoretyczna*
- J. Awrejcewicz *Mechanika*
- H. Głowacki *Mechanika techniczna: Dynamika*
- T.Niezgodziński *Mechanika Ogólna*
- W.Tybor, K.Kowalski *Mechanika*

# Równania Newtona punktu materialnego

W układzie inercjalnym, definiowanym przez pierwszą zasadę dynamiki Newtona, dynamiką ruchu rządzi druga zasada dynamiki Newtona:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \tag{1}$$

Prawa strona jest sumą wektorową sił działających na cząstkę.

W układach nieinercjalnych ratujemy prawdziwość zasady wprowadzając siły bezwładności (pozorne).

Jest to układ trzech równań skalarnych drugiego rzędu.

Jeżeli siła wypadkowa nie zależy od czasu, układ jest *autonomiczny*.

# Całkowanie jednowymiarowego równania Newtona

Jeżeli cząstka porusza się tylko w jednym wymiarze, to równanie Newtona przyjmuje postać:

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t) \tag{2}$$

Jeżeli $F$ zależy tylko od $\dot{x}$, to rozwiązujemy równanie przez separację zmiennych: $t - t_0 = \int_{v=v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{F(v)}$.

**Przykład:** Ruch pod wpływem siły oporu

Jeżeli $F$ zależy tylko od $x$, to mnożymy obie strony przez $\dot{x}$: $m\dot{x}\ddot{x} = F(x)\dot{x} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) = F(x)\dot{x} \Rightarrow \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \int_{x=x_0}^{x} F(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}m\dot{x}_0^2$ i dalej przez separację zmiennych (rozwiązanie poprzez całkę energii).

**Przykład:** Oscylator harmoniczny, wahadło matematyczne

Równanie liniowe o stałych współczynnikach z zależnym od czasu członem wymuszającym - transformata Laplace'a.

# Równania Newtona układu punktów materialnych

**Równania Newtona układu cząstek swobodnych**

$$\forall i \; m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^Z(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i) + \sum_j \vec{F}_{ij}^W(\vec{r}_i, \vec{r}_j), \tag{3}$$

gdzie:

- $\vec{r}_i$ - wektor położenia cząstki
- $\vec{F}_i^Z(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i)$ - suma sił zewnętrznych działających na $i$-tą cząstkę
- $\vec{F}_{ij}^W(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$ - suma sił pochodzących od cząstki $j$ i działających na cząstkę $i$.

III zasada dynamiki: $\vec{F}_{ij}^W(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = -\vec{F}_{ji}^W(\vec{r}_j, \vec{r}_i)$

# Zasada zachowania pędu

Wysumujmy równania (3) stronami:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i m_i\dot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{F}_i^Z(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i) \tag{4}$$

pochodna całkowitego pędu układu jest równa sumie sił zewnętrznych $\Rightarrow$ w układzie izolowanym pęd jest zachowany.

Po scałkowaniu po przedziale czasu $\Delta t$: $\Delta p = \int_{t=0}^{\Delta t} \vec{F}(t)\mathrm{d}t$. Prawą stronę tej równości nazywamy *impulsem siły*.

# Zasada zachowania pędu

Sumując układ równań (3) otrzymamy równanie ruchu środka masy:

$$\left(\sum_i m_i\right) \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \sum_i \vec{F}_i^Z(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i) \tag{5}$$

$$M\ddot{\vec{R}} = \sum_i \vec{F}_i^Z(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i) \tag{6}$$

- układ jako całość zachowuje się tak, jakby miał masę skupioną w swoim środku ciężkości, ale do wyznaczenia wypadkowej sił zewnętrznych musimy wysumować po rzeczywistych położeniach cząstek.

# Dynamika układów o zmiennej masie

Załóżmy, że do punktu materialnego o masie $m$ i prędkości $\vec{v}$ w jednostce czasu $dt$ dokleja się masa $dm$ poruszająca się względem punktu z prędkością $\vec{w}$. Dodatkowo, na punkt materialny działa siła zewnętrzna $\vec{F}$.

Porównując przyrost pędu otrzymujemy: $\dot{\vec{p}} = \vec{F} + \dot{m}(\vec{v} + \vec{w})$, lub $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \dot{m}\vec{w}$. Ostatni składnik jest siłą generowaną przez przybywającą masę.

**Przykład:** Produkty spalania opuszczają rakietę ze stałą prędkością $\vec{w}$ względem rakiety w stałym tempie $\rho$ (masa na jednostkę czasu).

W polu grawitacyjnym Ziemi mamy równanie: $m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} - \rho\vec{w}$. Przy rozwiązywaniu wygodnie jest zamienić zmienną niezależną: $t \mapsto m$. Mamy: $\dot{\vec{r}} = -\rho\ \mathrm{d}r/\mathrm{d}m \overset{ozn}{=} -\rho\vec{r}'$, $\ddot{\vec{r}} = \rho^2\vec{r}''$ i równanie przyjmuje postać:

$$\vec{r}'' = \frac{\vec{g}}{\rho^2} - \frac{1}{m}\frac{\vec{w}}{\rho} \tag{7}$$

Całkujemy dwukrotnie obustronnie z warunkiem początkowym $\vec{r}(m_0) = r_0$, $\vec{r}'(m_0) = -\vec{v}_0/\rho$:

$$\vec{r}' = -\vec{v}_0/\rho + \frac{\vec{g}}{\rho^2}(m - m_0) - \frac{\vec{w}}{\rho}\ln\frac{m}{m_0} \tag{8}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 - \frac{\vec{v}_0}{\rho}(m - m_0) + \frac{\vec{g}}{2\rho^2}(m - m_0)^2 - \frac{\vec{w}m_0}{\rho}\left(\frac{m}{m_0}\left(\ln\frac{m}{m_0} - 1\right) + 1\right) \tag{9}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{\vec{g}}{2}(t - t_0)^2 - \frac{\vec{w}m_0}{\rho}\left(\frac{m}{m_0}\left(\ln\frac{m}{m_0} - 1\right) + 1\right), \tag{10}$$

gdzie $m/m_0 = 1 - \rho/m_0(t - t_0)$. Gdy $\rho/m_0(t - t_0) << 1$, z rozwinięcia logarytmu w szereg dostaniemy wzór przybliżony:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\left(\vec{g} - \frac{\rho}{m_0}\vec{w}\right)(t - t_0)^2. \tag{11}$$

# Zasada zachowania momentu pędu

Wymnóżmy równania (3) lewostronnie przez $\vec{r}_i$ i wysumujmy:

$$\sum_i \vec{r}_i \times m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^Z(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i) = \vec{M}. \tag{12}$$

Prawa strona jest całkowitym momentem sił zewnętrznych działających na układ.

Zakładamy, że siły wewnętrzne pomiędzy punktami materialnymi w układzie działają wzdłuż linii łączącej te punkty (*siły centralne*).

Wtedy $\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = 0$ i wkłady do $\vec{M}$ od momentów sił wewnętrznych się parami znoszą.

# Zasada zachowania momentu pędu

Ze wzoru na pochodną iloczynu możemy zauważyć, że

$$\vec{r}_i \times m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i\right) - \dot{\vec{r}}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i\right) \tag{13}$$

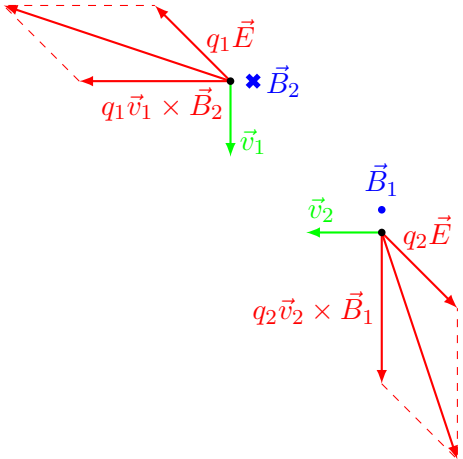
Lewa strona równania (12) jest pochodną wielkości $L = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ nazywanej *momentem pędu* układu.

Otrzymujemy w ten sposób równość:

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M} \tag{14}$$

Pod nieobecność zewnętrznego momentu sił, moment pędu układu cząstek jest zachowany.

# Zasada zachowania momentu pędu




Przykładem siły niecentralnej jest siła Lorenza

Moment pędu układu nie jest zachowany

Promieniowanie unosi moment pędu z układu

Zasada zachowania pędu będzie zachowana, jeżeli uwzględnimy moment pędu pola elektromagnetycznego.

# Zasada zachowania energii

Pomnóżmy skalarnie każde z równań Newtona przez $\dot{\vec{r}}_i$ i zsumujmy je ze sobą. Otrzymamy:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \tag{15}$$

Wyrażenie po lewej stronie to pochodna energii kinetycznej układu. Po scałkowaniu:

$$E_K(t) - E_K(0) = \sum_i \int_{\vec{r}_i(0)}^{\vec{r}_i(t)} \vec{F}_i \cdot \mathrm{d}\vec{r}, \tag{16}$$

czyli zmiana energii kinetycznej układu jest równa pracy sił (wewnętrznych i zewnętrznych).

Jeżeli część sił działających na cząstkę są siłami potencjanymi, tzn. można je zapisać jako $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_P$, wtedy $\int_{\vec{r}_i(0)}^{\vec{r}_i(t)} \vec{F}_i \cdot \mathrm{d}\vec{r} = E_P(0) - E_P(t)$.

# Zasada zachowania energii

Całka z każdej siły potencjalnej wprowadza do równania (16) różnicę energii potencjalnej. Po przerzuceniu tych różnic na drugą stronę otrzymamy:

$$\Delta(E_K + E_P) = \sum_i \int_{\vec{r}_i(0)}^{\vec{r}_i(t)} \vec{F}_i \cdot \mathrm{d}\vec{r}. \tag{17}$$

Po lewej stronie pozostają prace sił niepotencjalnych, a po lewej jest przyrost całkowitej energii układu.

Siła jest potencjalna, jeżeli zależy tylko od położeń. Pole takiej siły jest potencjalne wtw gdy $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ [1].

Praca siły potencjalnej zależy tylko od punktu początkowego i końcowego, nie od drogi je łączącej.

[1]

# Zasada zachowania energii

Całka z każdej siły potencjalnej wprowadza do równania (16) różnicę energii potencjalnej. Po przerzuceniu tych różnic na drugą stronę otrzymamy:

$$\Delta(E_K + E_P) = \sum_i \int_{\vec{r}_i(0)}^{\vec{r}_i(t)} \vec{F}_i \cdot \mathrm{d}\vec{r}. \tag{17}$$

Po lewej stronie pozostają prace sił niepotencjalnych, a po lewej jest przyrost całkowitej energii układu.

Siła jest potencjalna, jeżeli zależy tylko od położeń. Pole takiej siły jest potencjalne wtw gdy $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ [1].

Praca siły potencjalnej zależy tylko od punktu początkowego i końcowego, nie od drogi je łączącej.

[1] Gdy siła jest określona na obszarze jednospójnym, konsekwencja lematu Poincaré

# Zasada zachowania energii

**Twierdzenie Koeniga**

Energia kinetyczna układu punktów materialnych jest równa:

$$E_K = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \sum_i \frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i'^2,$$

gdzie $M$ - masa całkowita, $\vec{R}$ - położenie środka masy, $\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{R}$ - położenie w układzie środka masy.