Lista zadań na kolokwium

1. Udowodnij własność cykliczności śladu.

2. Udowodnij, że dla macierzy hermitowskiej H macierz $\exp\left(-\frac{i}{\hbar}Ht\right)$ jest unitarna.

3. Pokaż, że iloczyn HS jest niezmienniczy na działanie grupy unitarnej.

4. Pokaż, że iloczyn HS dwóch macierzy gęstości o współrzędnych w kuli Blocha $\vec{r}_1 = [x_1, y_1, z_1]$, $\vec{r}_2 = [x_2, y_2, z_2]$ wynosi $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2$.

5. Pokaż, że para projektorów na ortogonalne podprzestrzenie odpowiada parze antypodycznych punktów na sferze Blocha.

6. Pokaż, że jeżeli macierz gęstości ma dwa przedstawienia: $\rho = \sum_i \alpha_i \left|\phi_i\right\rangle \left\langle\phi_i\right| = \sum_i \beta_i \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right|$, to $\sqrt{\beta_i}\psi_i = \sum_j a_{ji}\sqrt{\alpha_i}\phi_j$, a wyrazy a_{ji} tworzą macierz prostokątną A o własności $A \cdot A^\dagger = I$.

7. Znaleźć obraz kanału (bit flip channel): $\rho \mapsto p\rho + (1-p)\sigma_x\rho\sigma_x^\dagger$

8. Jaka jest reprezentacja kanału który dokonuje skalowania macierzy Blocha w kierunkach x, y, pozostawiając niezmieniony kierunek z (phase flip channel)?

9. Jaka jest reprezentacja kanału, który jednostajnie skaluje sferę Blocha (depolarising channel)?

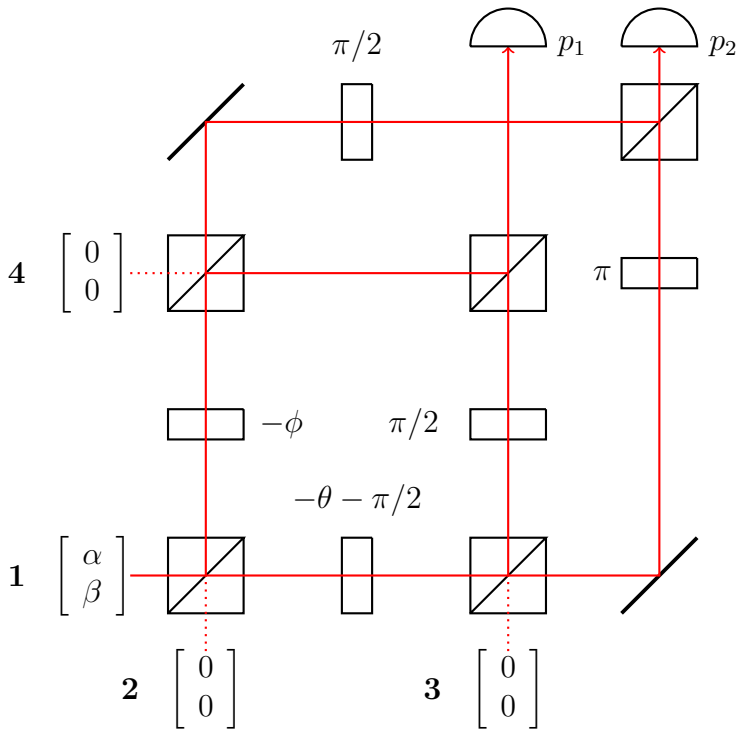
10. Znajdź reprezentację Kraussa kanału *amplitude damping* (kurczenie się s. Blocha do bieguna północnego).

11. Jak wygląda zbiór efektów dla qubitu? Jakie są jego punkty ekstremalne?

12. Wyprowadź wzór na prawdopodobieństwo sukcesu rozróżnienia dwóch stanów czystych wysyłanych z dowolnymi prawdopodobieństwami, zależne od $p_1 - p_2$ i $\left|\left\langle\Psi_1|\Psi_2\right\rangle\right|^2$.

13. Źródło produkuje dwa ustalone, niekoniecznie ortogonalne, stany czyste Ψ_1 i Ψ_2. POVM dla qubitu ma trzy możliwe wyniki pomiaru: 1, 2 i ?. Ma tę własność, że jeżeli nadajemy Ψ_1, możemy otrzymać tylko 1 lub ?, a jeżeli Ψ_2 to tylko 2 lub ?. Znajdź postać macierzy efektów dla POVM-u.

14. Przeanalizuj działanie układu z rysunku



Wyprowadź wzory na wektory stanu na wejściach detektorów:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \qquad \Psi_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & \cos\phi \end{bmatrix} |\Psi\rangle\langle\Psi| \qquad \Psi_1 = \begin{bmatrix} \sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\phi \end{bmatrix} |\Psi\rangle\langle\Psi|$$

15. Jak przy pomocy tego układu i jednoqubitowych branek unitarnych skonstruować dowolny POVM dla qubitu?

16. Pokaż, że dowolną bramkę qubitową w polaryzacjach fotonu można zrealizować jako trzy ściśnięcia światłowodu w kierunkach $0°, 45°, 0°$.

17. Pokaż, że nierówność CHSH nie jest łamana w stanach separowalnych.

18. Załóżmy, że

$$p(ab|AB) = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \tag{1}$$

Pokaż, że jest taki układ prawdopodobieństw warunkowych nie przenosi informacji. Ile wynosi lewa strona nierówność CHSH dla tego rozkładu? Jak należałoby zmodyfikować powyższą macierz, by dostać rozkład przenoszący informację?

19. Jak wyglądają wektory bazy magicznej dwóch qutritów? W jaki sposób teleportować stan qutritu przy pomocy stanu czystego o wektorze z bazy magicznej dwóch qutritów?

20. Pokaż, że stany z bazy magicznej dwóch qutritów można przekształcać na siebie za pomocą lokalnej transformacji unitarnej.

21. Niech nadawca i odbiorca dzielą parę w stanie czystym $\alpha\,|00\rangle + \beta\,|11\rangle$, gdzie $\alpha \geqslant \beta$. Skonstruuj POVM, który z maksymalnym prawdopodobieństwem doprowadzi stan (nieunormowany) po pomiarze $\alpha\gamma\,|00\rangle + \beta\delta\,|11\rangle)$ do postaci stanu wyjściowego dla teleportacji idealnej: $(\gamma\,|00\rangle + \delta\,|11\rangle)/sqrt2$. Ile wynosi te prawdopodobieństwo? Wykonaj to samo dla pozostałych stanów po pomiarze. Jakie jest prawdopodobieństwo całkowite poprawnej teleportacji?

22. Pokaż, że kryterium częściowej transpozycji wykrywa wszystkie czyste stany splątane.

23. Znajdź podzbiór stanów separowalnych w sympleksie stanów diagonalnych w bazie magicznej dwóch qbitów.

24. Pokaż, że nierówność CHSH można zapisać jako wartość oczekiwaną pewnego świadka splątania.

25. Dla odwzorowania Choi:

$$\begin{aligned} CH(|e_i\rangle\langle e_i|) &= |e_i\rangle\langle e_i| + |e_{i+1}\rangle\langle e_{i+1}| \\ CH(|e_i\rangle\langle e_j|) &= -\,|e_i\rangle\langle e_j|\,,\ \text{dla } i \neq j \end{aligned} \tag{2}$$

znajdź odwzorowanie dualne

26. W dwuparametrowej rodzinie operatorów o śladzie równym 1:

$$\rho = \frac{1}{3(1+a+b)} \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & a & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & b & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & b & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{array}\right] \tag{3}$$

Na płaszczyźnie ab narysuj obszary:

- stanów
- stanów NPT
- stanów wykrywanych przez odwzorowanie Choi
- stanów wykrywanych przez odwzorowanie Choi dualne
- stanów wykrywanych przez kryterium realignmentu

27. Pokaż, że stany w powyższej rodzinie dla których $a, b \geqslant 1$ są separowalne.

28. Znajdź świadków odpowiadających odwzorowaniom Choi i Choi dualne.

29. Oblicz promienie kul wpisanej i opisanej na zbiorze stanów.

30. Znajdź bazy MUB dla qutritu.

31. Znajdź postać macierzy efektów dla SIC-POVM dla qubitu.

Lista pytań egzaminacyjnych

1. Zdefiniuj zbiór wypukły. Co to są punkty ekstremalne? Co mówi tw. Caratheodory'ego?

2. Czym są stany i obserwable w klasycznym i kwantowym rachunku prawdopodobieństwa? Jak definiujemy pomiar projektywny i uogólniony w klasycznym i kwantowym rachunku prawdopodobieństwa?

3. W jaki sposób ze stanu układu otrzymujemy stan podukładu w klasycznym i kwantowym rachunku prawdopodobieństwa?

4. Co jest generatorem ewolucji, równaniem ewolucji i grupą dynamiczną w mechanice klasycznej i kwantowej?

5. Przedstaw graficznie rozkład macierzy gęstości na kombinacje projektorów. Który z rozkładów jest rozkładem spektralnym? Przedstaw graficznie pomiar projektywny obserwabli o zadanej bazie własnej. Czemu odpowiadają na rysunku prawdopodobieństwa wyników? Omów graficznie zasadę nieoznaczoności dla dwóch obserwabli dla qubitu.

6. Co to jest reprezentacja Kraussa kanału kwantowego? Jak sprawdzić, czy dwie reprezentacje odpowiadają temu samemu kanałowi?

7. Co to są kanały klasyczno-kwantowe i kwantowo-klasyczne?

8. Co to jest rozkład Schmidta elementu iloczynu tensorowego dwóch przestrzeni Hilberta? Jaka jest maksymalna długość rozkładu?

9. Jak definiujemy stany separowalne i splątane?

10. Udowodnij, że każdy kanał kwantowy da się zapisać jako $\rho \mapsto \mathrm{Tr}_1(U\eta \otimes \rho U^\dagger)$.

11. Jaki jest stan układu po pomiarze POVM? W jaki sposób pomiar POVM realizujemy jako pomiar projektywny na układzie złożonym po etapie wspólnej ewolucji unitarnej.

12. Jakie jest prawdopodobieństwo rozróżnienia dwóch stanów ρ_1 i ρ_2 nadawanych z prawdopodobieństwami p_1 i p_2?

13. Przedstaw położenie różnych polaryzacji na sferze Poincaré.

14. Udowodnij twierdzenie o nieklonowaniu. Jakie stany klasyczne podlegają klonowaniu? W jaki sposób maszyna klonująca działa na pozostałych stanach klasycznych?

15. Omów protokół ustalania klucza BB84. W jaki sposób wykrywamy podsłuch w tym protokole? Na czym polega niedoskonałość współczesnych implementacji tego protokołu?

16. Udowodnij zachodzenie nierówność CHSH przy założeniu istnienia przestrzeni probabilistycznej dla doświadczenia.

17. Sformułuj warunek *non-signaling*. Jaką maksymalną wartość może przyjąć lewa strona nierówności CHSH w mechanice kwantowej, a jaką w teoriach *non-signaling*?

18. Omów protokół teleportacji. Jakie jest prawdopodobieństwo poprawnej teleportacji, jeżeli używamy pary niemaksymalnie splątanej?

19. Zdefiniuj miary splątania *entanglement of formation* i *entanglement of distillation*. Jaka relacja zachodzi między tymi miarami? Co to są stany bound entanglement?

20. Omów kryterium częściowej transpozycji. Jakie są impilkacje pomiędzy destylowalnością, łamaniem nierówności Bella i łamaniem kryterium częściowej transpozycji?

21. Skonstruuj stan splątany o dodatniej częściowej transpozycji za pomocą nierozszerzalnych baz produktowych.

22. Omów kryterium odwzorowań dodatnich. Co mówi twierdzenie Horodeckich? W jakich wymiarach mamy klasyfikację odwzorowań dodatnich?

23. Zdefiniuj izomorfizm Jamiołkowskiego. Jakie zbiory przeprowadza na siebie ten izomorfizm?

24. Co to jest świadek splątania? W jaki sposób znajdujemy świadka wykrywającego stan, którego splątanie pokazuje odwzorowanie dodatnie Λ?

25. W jaki sposób wykonujemy pomiar świadka na stanie układu o rozseparowanych przestrzennie podukładach?

26. Omów i udowodnij kryterium realignmentu.

27. Co to jest kula Gurvitsa? Jaki jest wzór na jej promień?

28. Omów klasyczny algorytm Shora. Który fragment algorytmu źle (ponadwielomianowo) skaluje się ze względu na liczbę bitów liczby na wejściu?

29. Jak realizujemy qubity w realizacji komputera kwantowego poprzez NMR w cieczach? Jakie warunki musi spełniać cząsteczka cieczy? W jaki sposób realizujemy bramki jednoqubitowe, a w jaki dwuqubitowe? Co to są efektywne stany czyste?

30. Jak wygląda realizacja komputera kwantowego wykorzystująca NMR w ciałach stałych?

31. Co to są bazy MUB? W jakich wymiarach d potrafimy udowodnić istnieje $d+1$ takich baz? W jaki sposób wykonujemy tomografię stanu przy użycie $d+1$ pomiarów projektywnych w bazach MUB?

32. Co to jest SIC POVM? W jaki sposób wykonujemy tomografię stanu przy jego użyciu?