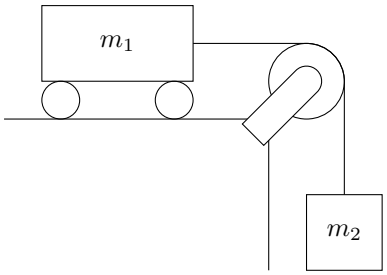
Zadania na kolokwium

1. Ciało o masie m wisi na sprężynie o stałej sprężystości k i zostaje odciągnięte w pionie od położenia równowagi. Znajdź równania ruchu ciała.

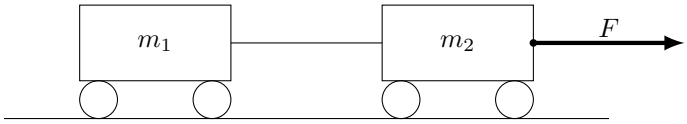
2. Punkt materialny o masie m wisi na nitce o długości l i zostaje odchylony od położenia równowagi w poziomie (wahadło matematyczne). Znajdź równania ruchu.

3. Znajdź równania ruchu układu z rysunku



4. Łańcuch w chwili początkowej zwisa ze stołu w $\frac{1}{4}$ długości i ześlizguje się bez tarcia. Znajdź równania ruchu.

5. Znajdź równania ruchu układu z rysunku



6. Na rakietę działa stała siła ciągu powstająca ze spalania w chwili czasu stałej ilości paliwa. Znajdź równanie ruchu rakiety poruszającej się w pionie w stałym polu grawitacyjnym.

7. Klocek o masie m jest przyczepiony do poziomej sprężyny o stałej sprężystości k i odciągnięty od położenia równowagi. Współczynnik tarcia kinetycznego między klockiem a stołem wynosi μ. Znajdź równanie ruchu klocka.

8. Rozwiąż zadanie 4 uwzględniając współczynnik tarcia kinetycznego μ pomiędzy łańcuchem a stołem.

9. Rozwiąż zagadnienie rzutu ukośnego w stałym polu grawitacyjnym z siłą oporu proporcjonalną do prędkości i przeciwnie do niej skierowaną.

10. Sztywna rama z drutu w kształcie trójkąta jest umieszczona w płaszczyźnie pionowej. Na bokach ramy o kątach nachylenia α i β do poziomu i wspólnym wierzchołku nawleczone są dwa koraliki o masach odpowiednio m_1 i m_2 połączone nierozciągliwą nitką. Koraliki mogą się ślizgać po bokach ramy bez tarcia. Jaki kąt γ tworzy nić z poziomem, gdy układ jest w równowadze?

11. Znajdź trajektorię między ustalonymi punktami, w jednorodnym polu grawitacyjnym, którą ciało pokona w najkrótszym czasie (brachistona). Rozwiązanie doprowadzić do etapu równania różniczkowego pierwszego stopnia.

12. Znajdź kształt, który przybierze nierozciągliwy łańcuch zawieszony pomiędzy dwoma ustalonymi punktami w jednorodnym polu grawitacyjnym.

13. Wyprowadź równanie ruchu wahadła matematycznego z równań Eulera-Lagrage'a dla jego Lagrangianu.

14. Wyprowadź równania ruchu podwójnego wahadła sprzężonego z równań Eulera-Lagrage'a dla jego Lagrangianu.

15. Znajdź funkcję Hamiltona dla Lagrangianu oscylatora harmonicznego: $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$.

16. Znajdź algebrę Liego grupy Liego $O(n)$.

17. Znajdź pole wytwarzane przez odcinek długości l jednorodnie naładowany z liniową gęstością ładunku λ (skierowany wzdłuż osi x). Znajdź rozwiązanie dla $l \to \infty$.

18. Znajdź pole nieskończonego pręta naładowanego z liniową gęstością ładunku λ z prawa Gaussa. Znajdź potencjał pola elektrycznego, całkując pole elektryczne.

19. Znajdź rozkład potencjału w nieskończonej, pustej rurze o przekroju kwadratowym, której trzy ścianki są uziemione, a czwarta jest odizolowana od pozostałych i ma przyłożony potencjał V_0.

20. Znajdź trajektorię cząstki naładowanej w jednorodnym polu magnetycznym.

21. Jakie pole magnetyczne wytwarza wokół siebie nieskończenie długi prosty przewód, przez który płynie prąd I ?

22. Jakie pole magnetyczne wytwarza nieskończona zwojnica o n zwojach na jednostkę długości?

23. Pokaż, że równania Maxwella wynikają z minimalizacji po A^μ funkcjonału $\int_{T\times V} \mathcal{L}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}V$ gdzie:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\epsilon_0}\sum_{\alpha,\beta} G_{\alpha\beta}G^{\alpha\beta} - \sum_\nu j_\nu A^\nu = -\frac{1}{4\mu_0}\sum_{\alpha,\beta}\sum_\lambda \left(\eta_{\alpha\lambda}\frac{\partial A^\lambda}{\partial x^\beta} - \eta_{\beta\lambda}\frac{\partial A^\lambda}{\partial x^\alpha}\right)\sum_\lambda\left(\eta^{\beta\lambda}\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\lambda} - \eta^{\alpha\lambda}\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\lambda}\right) - \sum_{\nu,\mu} j^\nu \eta_{\nu\mu}A^\mu.$$

24. Wyprowadź wzór na współczynniki koneksji afinicznej:

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\gamma\mu}(g_{\gamma\alpha,\beta} + g_{\gamma\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\gamma})$$

25. Wyprowadź równania geodezyjnej dla rozmaitości $[0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ wyposażonej w tensor metryczny: $\mathrm{d}s^2 = R^2\,\mathrm{d}\theta^2 + R^2\cos^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2$.

26. Pokaż, że dla metryki słabego pola $\mathrm{d}s^2 = (1 + \frac{2}{c^2}\phi)\,\mathrm{d}(ct)^2 - (1 - \frac{2}{c^2}\phi)(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)$ równania geodezyjnej dają (w przybliżeniu dużego c) drugą zasadę dynamiki Newtona.

27. Znajdź metrykę Schwarzschilda rozwiązując równania Einsteina w pustej przestrzeni dla diagonalnego tensora Einsteina:

$$G_{tt} = -\frac{g_{tt}}{r^2 g_{rr}^2}\left(r g'_{rr} + g_{rr}^2 - g_{rr}\right)$$
$$G_{rr} = \frac{g'_{tt}}{r g_{tt}} - \frac{1}{r^2}g_{rr} + \frac{1}{r^2}$$
$$G_{\theta\theta} = \frac{r^2 g''_{tt}}{2g_{rr}g_{tt}} - \frac{r^2 g'^2_{tt}}{4g_{rr}g_{tt}^2} - \frac{r^2 g'_{rr}g'_{tt}}{4g_{rr}^2 g_{tt}} + \frac{r g'_{tt}}{2g_{rr}g_{tt}} - \frac{r g'_{rr}}{2g_{rr}^2}$$
$$G_{\phi\phi} = \sin^2(\theta)G_{\theta\theta}$$

28. Pokaż, że mechanika kwantowa jest teorią niekołmogorowską (łamanie nierówności CHSH dla odpowiednio wybranych obserwabli i stanu).

29. Udowodnij, że operator $-i\hbar\partial_x$ jest samosprzężony w $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$.

30. Pokaż, że kwantowy hamiltonian oscylatora harmonicznego $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 = \frac{1}{2m}\left(m^2\omega^2\hat{x}^2 - (i\hat{p})^2\right)$ można zapisać jako $\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$ przy pomocy operatora $\hat{a}$ o własności $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$.

31. Pokaż, że widmem operatora $\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$ (gdzie $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$) są liczby naturalne. Znajdź wektor własny odpowiadający wartości własnej 0.

Pytania na egzamin

1. Omów zasady dynamiki Newtona.
2. Omów tranformatę Legendre'a (przechodzenie z funkcji Lagrange'a do funkcji Hamiltona) i równania Hamiltona. Jaka struktura geometryczna przestrzeni fazowej jest charakterystyczna dla mechaniki hamiltonowskiej?
3. Co mówi twierdzenie Liouville'a?
4. Co opisuje równanie Liouville'a?
5. Co to jest algebra Liego? Co to jest grupa Liego? Co to jest algebra Liego grupy Liego? Jakim strukturom w algebrze odpowiadają podgrupy i dzielniki normalne? Co jest algebrą Liego iloczynu prostego grup?
6. Co mówi twierdzenie Noether? Jakie prawa zachowania wprowadza grupa Galileusza?
7. Podaj równania Maxwella w postaci całkowej i różniczkowej.
8. Podaj wzór na siłę Lorenza i siłę elektrodynamiczną.
9. Omów efekt Halla
10. Omów działanie silnika prądu stałego
11. Omów działanie prądnicy
12. Wprowadź zasadę zachowania ładunku elektrycznego z równań Maxwella. Z jakiej symetrii ona wynika?
13. Omów zasadę zachowania energii dla pola elektromagnetycznego
14. Zapisz równania Maxwella za pomocą potencjałów

15. Co to jest transformacja cechowania? Co to jest cechowanie Lorenza?

16. Zapisz równania Maxwella jako róœnania na formy różniczkowe. W jaki sposób utożsamiamy formy różniczkowe z polami wektorowymi?

17. Jak wyglądają równania Maxwella w zapisie czterowymiarowym? Które równanie potrzebuje metryki o sygnaturze $(1, -1, -1, -1)$.

18. Szukamy grupy przekształceń dwuwymiarowej izotropowej czasoprzestrzeni przeprowadzającej ruchy prostoliniowe w prostoliniowe. Chcemy by w układzie poruszającym się z prędkością v ruch z prędkością v był widziany jako spoczynek. Jakie są możliwe grupy symetrii i która możliwość jest realizowana w Naturze?

19. Omów jak z transformacji Lorenza wynika skrócenie relatywistyczne i wolniejszy upływ czasu w układzie poruszającym się.

20. Dlaczego biegnąc szybko można zmieścić do garażu drabinę dłuższą niż on sam (można na krótko zamknąć jednocześnie przednie i tylne drzwi garażu) mimo, że z punktu widzenia biegnącego to garaż się skrócił?

21. Co to jest pochodna kowariantna? Skąd się bierze wyraz różniący ją od pochodnej cząstkowej?

22. Podaj dwie definicje geodezyjnej. Jaki jest związek między nimi?

23. Co to jest tensor Riemanna (interpretacja), Ricciego i Einsteina?

24. Napisz równanie Einsteina. Co jest źródłem pola? Jak tłumaczymy efekty grawitacyjne?

25. W jaki sposób wykrywamy fale grawitacyjne?

26. Jak można zapisać ogólny sferycznie symetryczny, stacjonarny tensor metryczny przy pomocy jak najmniejszej liczby parametrów?

27. Co to jest czarna dziura i horyzont zdarzeń?

28. Jak wykrywamy fale grawitacyjne?

29. W jaki sposób uogólniamy klasyczny rachunek prawdopodobieństwa do mechaniki kwantowej?

30. Jakie są równania dynamiki w mechanice kwantowej?

31. Jaka jest geometria zbioru stanów kwantowych układu dwupoziomowego?

32. Omów interpretację geometryczną pomiaru i zasady nieoznaczoności dla układu dwupoziomowego.

33. Omów protokół BB84.

34. Na czym polega teleportacja kwantowa?